

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Вариант № 1

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности. На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов №1.

Ответ: -15,5.

10	-	15,5																	
----	---	------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов №2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, или капиллярной, или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

*Желаем успеха!*

Справочные материалы

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

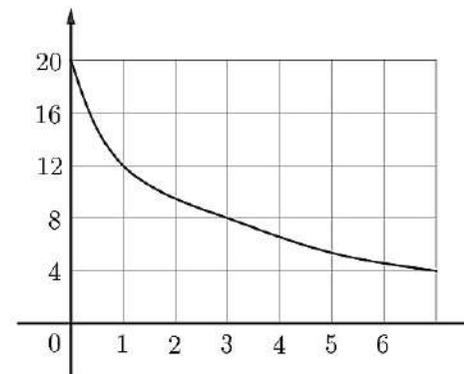
*Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.*

Часть 1.

1. Бегун пробежал 189 метров за 28 секунд. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: \_\_\_\_\_.

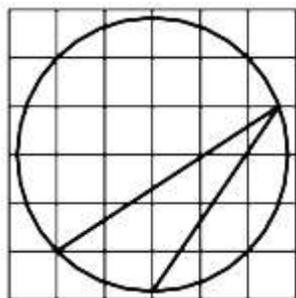
2. В ходе химической реакции масса исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, постепенно уменьшается. На графике показана зависимость массы реагента от времени. На горизонтальной оси отмечено время, прошедшее с начала реакции, в минутах, на вертикальной оси — масса реагента, который ещё **не вступил** в реакцию, в граммах.



Определите по графику, сколько граммов реагента **вступило** в реакцию за первые 3 минуты.

Ответ: \_\_\_\_\_.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображена окружность и вписанный в неё острый угол. Найдите градусную меру данного угла. Ответ дайте в градусах.



Ответ: \_\_\_\_\_.

4. Из множества натуральных чисел от 60 до 84 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 5?

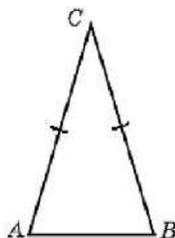
Ответ: \_\_\_\_\_.

5. Решите уравнение  $8^{9-x} = 64^x$ .

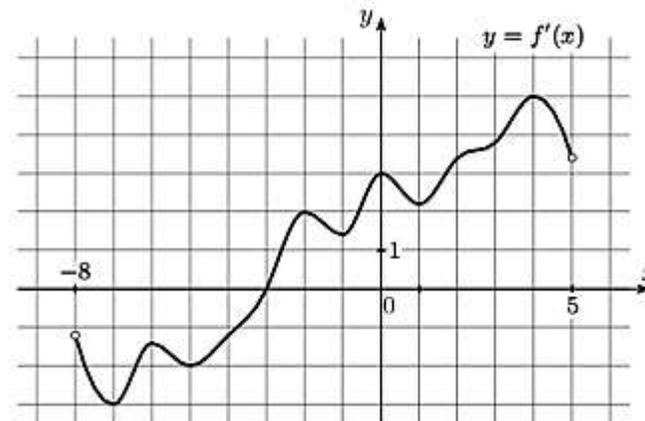
Ответ: \_\_\_\_\_.

6. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника равен  $30^\circ$ , найдите боковую сторону этого треугольника, если его площадь равна 25.

Ответ: \_\_\_\_\_.

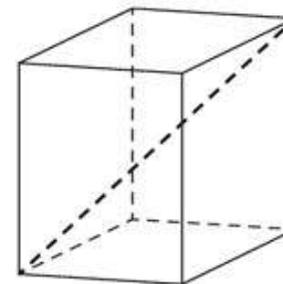


7. На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-8; 5)$ . В какой точке отрезка  $[0; 4]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение?



Ответ: \_\_\_\_\_.

8. Одна из граней прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Диагональ параллелепипеда равна  $2\sqrt{3}$  и образует с плоскостью этой грани угол  $60^\circ$ . Найдите объём параллелепипеда.



Ответ: \_\_\_\_\_.

*Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.*

**Часть 2.**

9. Найдите  $\log_a(a^3b^4)$ , если  $\log_a b = 5$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

10. Двигаясь со скоростью  $v = 5$  м/с, трактор тащит сани с силой  $F = 32$  кН, направленной под острым углом  $\alpha$  к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле  $N = Fv \cos \alpha$ . Найдите, при каком угле  $\alpha$  (в градусах) эта мощность будет равна 80 кВт (кВт – это кН·м/с).

Ответ: \_\_\_\_\_.

11. Плиточник должен уложить 280 м<sup>2</sup> плитки. Если он будет укладывать на 9 м<sup>2</sup> в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 7 дней раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

Ответ: \_\_\_\_\_.

12. Найдите точку максимума функции  $y = 9x^2 - x^3$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

*Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.*

13. а) Решите уравнение:  $\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos x = -\frac{1}{2}$ .

б) Найдите все корни данного уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ .

14. Дана правильная четырехугольная пирамида  $PABCD$ . Через вершину основания, точку  $B$ , проведена плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная прямой  $PD$  и пересекающая боковые рёбра  $PA$ ,  $PD$  и  $PC$  в точках  $K$ ,  $L$  и  $M$  соответственно.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  параллельна прямой  $AC$ .

б) Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью основания пирамиды, если известно, что  $AB = 5\sqrt{2}$ ,  $AP = 15$ .

15. Решите неравенство:

$$2^{x+1} + \frac{9}{x} - \frac{3 \cdot 2^x}{x} \geq 6.$$

16. В прямоугольнике  $ABCD$  длины сторон  $AB$  и  $AD$  относятся как 1 : 3. На отрезке  $AD$  как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагонали  $AC$  и  $BD$  в точках  $N$  и  $M$  соответственно.

а) Докажите, что прямые  $MN$  и  $AD$  параллельны.

б) Найдите площадь четырехугольника  $AMND$ , если  $AD = 6$ .

17. Борис Петрович пользуется банковским вкладом на следующих условиях: ежегодно 16 марта банк начисляет 10% на остаток и добавляет их к сумме вклада, 17 марта Борис Петрович может пополнить вклад на любую сумму или снять любую сумму с вклада, вплоть до полного его закрытия.

1 марта 2020 года сумма вклада Бориса Петровича составляла 210 тыс. рублей. Борис Петрович планирует следующие операции по вкладу:

– 17 марта 2020 года и 17 марта 2021 года пополнить вклад на некоторую сумму  $x$  тыс. рублей;

– 17 марта 2022 года и 17 марта 2023 года снять с вклада по 242 тыс. рублей, причем последняя операция должна закрыть вклад.

Найдите  $x$ .

18. Найдите все такие значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $2x^3 + (3a + 2)x^2 + ax - 3a^2 = 0$  имеет ровно два различных действительных корня.

19. Юля любит все натуральные числа, которые делятся на 22, но не делятся на 6. А Гоше нравятся только те натуральные числа, цифры в десятичной записи которых не повторяются.

а) Существует ли число, которое нравится и Юле, и Гоше, и десятичная запись которого состоит из 2 цифр?

б) Существует ли число, которое нравится и Юле, и Гоше, и десятичная запись которого состоит из 5 цифр?

в) Из какого наибольшего количества цифр может состоять десятичная запись числа, которое нравится и Гоше, и Юле?

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Вариант № 2

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности. На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов №1.

Ответ: -15,5.

10	-	15	,	5															
----	---	----	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов №2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, или капиллярной, или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

*Желаем успеха!*

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

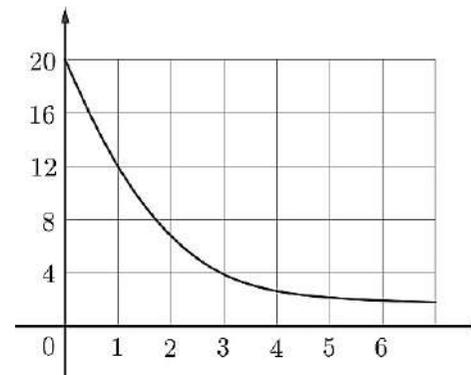
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1.

1. Бегун пробежал 143 метра за 22 секунды. Найдите среднюю скорость бегуна на дистанции. Ответ дайте в километрах в час.

Ответ: \_\_\_\_\_.

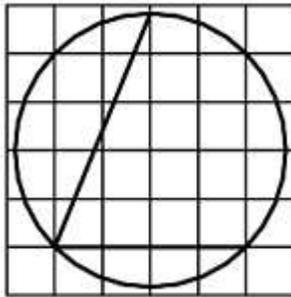
2. В ходе химической реакции масса исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, постепенно уменьшается. На графике показана зависимость массы реагента от времени. На горизонтальной оси отмечено время, прошедшее с начала реакции, в минутах, на вертикальной оси — масса реагента, который ещё **не вступил** в реакцию, в граммах.



Определите по графику, сколько граммов реагента **вступило** в реакцию за первые 3 минуты

Ответ: \_\_\_\_\_.

3. На клетчатой бумаге с размером клетки  $1 \times 1$  изображена окружность и вписанный в неё острый угол. Найдите градусную меру данного угла. Ответ дайте в градусах.



Ответ: \_\_\_\_\_.

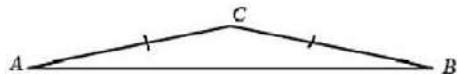
4. Из множества натуральных чисел от 20 до 39 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 4?

Ответ: \_\_\_\_\_.

5. Решите уравнение  $7^{3-x} = 49^x$ .

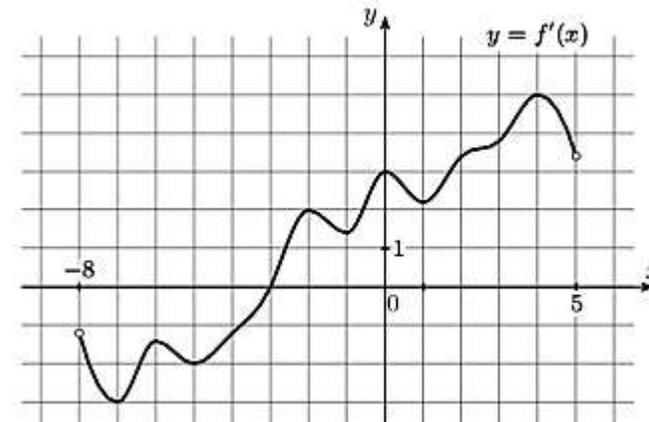
Ответ: \_\_\_\_\_.

6. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника равен  $150^\circ$ , найдите боковую сторону этого треугольника, если его площадь равна 36.



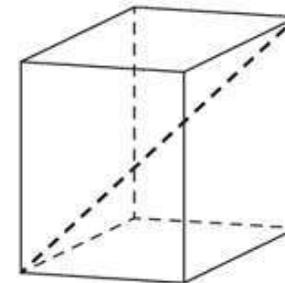
Ответ: \_\_\_\_\_.

7. На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-8; 5)$ . В какой точке отрезка  $[-2; 1]$  функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение?



Ответ: \_\_\_\_\_.

8. Одна из граней прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Диагональ параллелепипеда равна 2 и образует с плоскостью этой грани угол  $30^\circ$ . Найдите объём параллелепипеда.



Ответ: \_\_\_\_\_.

*Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.*

**Часть 2.**

9. Найдите  $\log_a(a^4b^3)$ , если  $\log_a b = 8$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

10. При нормальном падении света с длиной волны  $\lambda = 400$  нм на дифракционную решётку с периодом  $d$  нм наблюдают серию дифракционных максимумов. При этом угол  $\varphi$ , под которым наблюдается максимум, и номер максимума  $k$  связаны соотношением  $d \sin \varphi = k\lambda$ . Под каким наименьшим углом  $\varphi$  (в градусах) можно наблюдать второй максимум на решётке с периодом 1600 нм?

Ответ: \_\_\_\_\_.

11. Плиточник должен уложить 240 м<sup>2</sup> плитки. Если он будет укладывать на 10 м<sup>2</sup> в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 4 дня раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

Ответ: \_\_\_\_\_.

12. Найдите точку минимума функции  $y = 12x - x^3$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

*Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.*

13. а) Решите уравнение  $\sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) + 2 \sin \frac{3\pi}{4} \cdot \sin x + \frac{1}{2} = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ .

14. Дана правильная четырехугольная пирамида  $SKLMN$ . На ребре  $SN$  выбрана точка  $B$  так, что  $BL \perp SN$ . Через прямую  $BL$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $KM$  и пересекающая боковые рёбра  $SK$  и  $SM$  в точках  $A$  и  $C$  соответственно.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  перпендикулярна прямой  $SN$ .

б) Найдите угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью основания пирамиды, если известно, что  $KL = 3\sqrt{2}$ , а высота пирамиды  $SH = 12$ .

15. Решите неравенство

$$3^{x-1} + \frac{14}{3x} - \frac{2 \cdot 3^{x-1}}{x} \leq \frac{7}{3}.$$

16. В прямоугольнике  $MNHK$  длины сторон  $MN$  и  $MK$  относятся как 1 : 7. На отрезке  $MK$  как на диаметре построена окружность, которая пересекает диагонали  $NK$  и  $MH$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно.

а) Докажите, что прямые  $AB$  и  $MK$  параллельны.

б) Найдите площадь четырехугольника  $MABK$ , если  $MN = 2$ .

17. Борис Петрович пользуется банковским вкладом на следующих условиях: ежегодно 16 марта банк начисляет 20% на остаток и добавляет их к сумме вклада, 17 марта Борис Петрович может пополнить вклад на любую сумму или снять любую сумму с вклада, вплоть до полного его закрытия.

1 марта 2020 года сумма вклада Бориса Петровича составляла 55 тыс. рублей. Борис Петрович планирует следующие операции по вкладу:

– 17 марта 2020 года и 17 марта 2021 года пополнить вклад на некоторую сумму  $x$  тыс. рублей;

– 17 марта 2022 года и 17 марта 2023 года снять с вклада по 144 тыс. рублей, причем последняя операция должна закрыть вклад.

Найдите  $x$ .

18. Найдите все такие значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $27x^3 - 9(2a + 1)x^2 + 3ax + 2a^2 = 0$  имеет ровно два различных действительных корня.

19. Юля любит все натуральные числа, которые делятся на 44, но не делятся на 18. А Гоше нравятся только те натуральные числа, цифры в десятичной записи которых не повторяются.

а) Существует ли число, которое нравится и Юле, и Гоше, и десятичная запись которого состоит из 2 цифр?

б) Существует ли число, которое нравится и Юле, и Гоше, и десятичная запись которого состоит из 6 цифр?

в) Из какого наибольшего количества цифр может состоять десятичная запись числа, которое нравится и Гоше, и Юле?