# Вариант № 11963923

**1.** В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 800 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 250 купюр по 1000 рублей и 110 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 80 000 рублей, а остальное поделить поровну на 80 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

Задание 19 № 514431

**2.** Найдите все простые числа $b$, для каждого из которых существует такое целое число $a$, что дробь $\frac{a^4+12a^2-5}{a^3+11a}$ можно сократить на $b$.

Задание 19 № 484669

**3.** Решите в натуральных числах уравнение $n!+5n+3=k^2$, где $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до $n$.

Задание 19 № 511497

**4.** Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Каково наименьшее возможное значение полученного результата?

Задание 19 № 500197

**5.** Известно, что $a$, $b$, $c$, и $d$ — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{9}{23}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a>5b$ и $c>8d$?

Задание 19 № 512341

**6.** Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{25}$, где $m>n$.

Задание 19 № 507826

**7.** Четыре натуральных числа таковы, что

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1.$$

а) Могут ли все эти числа быть попарно различны?

б) Может ли одно из этих чисел равняться 7?

в) Найдите все возможные наборы таких чисел, среди которых есть равные.

Задание 19 № 514711

**8.** Рассмотрим частное трёхзначного числа, в записи которого нет нулей, и произведения его цифр.

а) Приведите пример числа, для которого это частное равно $\frac{113}{27}$.

б) Может ли это частное равняться $\frac{125}{27}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать это частное, если оно равно несократимой дроби со знаменателем 27?

Задание 19 № 514744

**9.** Будем называть четырёхзначное число интересным, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 6321.

а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна пяти.

б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 91?

в) Найдите наименьшее нечётное число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

Задание 19 № 513371

**10.** На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившиъся чисел.

Задание 19 № 510077

**11.** Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 12 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма оценивают следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{25}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Задание 19 № 505427

**12.** Найдите все такие пары натуральных чисел $a$ и $b$, что если к десятичной записи числа $a$ приписать справа десятичную запись числа $b$, то получится число, большее произведения чисел $a$ и $b$ на $21$.

Задание 19 № 511318

**13.** Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число $n$, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число $n$, а остальные числа, равные $n$, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Задание 19 № 501989

**14.** На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно $-3$, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, среднее арифметическое всех отрицательных из них равно $-8$.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Задание 19 № 501889

**15.** Найдите все простые числа $b$, для каждого из которых существует такое целое число $a$, что дробь $\frac{a^4+18a^2+9}{a^3+17a}$ сократима на $b$.

Задание 19 № 484670

**16.** Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Если какое-то число $n$, выписанное на доске, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число $n$, а остальные числа, равные $n$, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 3, 6, 9, 12, 15.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 21, 23?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 8, 9, 10, 17, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39, 47.

Задание 19 № 502298

**17.** Найдите все простые числа $p$, для каждого из которых существует такое целое число $k$, что число $p$ является общим делителем чисел $k^4+4k^2+4$ и $k^3+3k$.

Задание 19 № 511321

**18.** Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geq 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?
б) Каково наибольшее значение $n$, если сумма всех данных чисел меньше 1000?
в) Найдите все возможные значения $n$, если сумма всех данных чисел равна 129.

Задание 19 № 502119

**19.** Найдите несократимую дробь $\frac{p}{q}$ такую, что $\frac{p}{q} = \frac{1234567\overbrace{888...8}^{2000}7654321}{12345678\underbrace{999...9}_{1999}87654321}.$

Задание 19 № 484665

**20.** Найдите все простые числа $b$, для каждого из которых существует такое целое число $a$, что дробь $\frac{a^4+6a^2+1}{a^3+5a}$ можно сократить на $b$.

Задание 19 № 511322

**21.** На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т.д.).

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?
б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 63?
в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

Задание 19 № 500005

**22.** Рассматриваются конечные непостоянные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, которые не имеют простых делителей, отличных от 2 и 3.
а) Может ли в этой прогрессии быть три числа?
б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

Задание 19 № 500116

**23.** Четыре натуральных числа таковы, что

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1.$$

а) Могут ли все числа быть попарно различны?
б) Может ли одно из этих чисел равняться 9?
в) Найдите все возможные наборы чисел, среди которых ровно два числа равны.

Задание 19 № 512994

**24.** В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2046.
а) Может ли в последовательности быть три члена?
б) Может ли в последовательности быть четыре члена?
в) Может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

Задание 19 № 507487

**25.** Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{3}{11}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{3}{7}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
б) Какое наибольшее количество мальчиков МОГЛО быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?
в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Задание 19 № 500371

**26.** Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма оценивают следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания равняться $\frac{1}{30}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания равняться $\frac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Задание 19 № 505421

**27.** На сайте проводится опрос, кого из 134 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округлённая до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 17 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 41. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?

б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться не менее чем на 27?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

Задание 19 № 514199

**28.** а) Можно ли число 2014 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли число 199 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

Задание 19 № 505503

**29.** Перед каждым из чисел 14, 15, . . ., 20 и 4, 5, . . ., 8 прозвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Задание 19 № 484654

**30.** Участники одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл участников, сдавших тест, составил 100, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших — 79. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Задание 19 № 509953

**31.** Каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{450}$ равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

$$S_1 = a_1+a_2+\ldots+a_{450},$$
$$S_2 = a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{450}^2,$$
$$S_3 = a_1^3+a_2^3+\ldots+a_{450}^3,$$
$$S_4 = a_1^4+a_2^4+\ldots+a_{450}^4.$$

Известно, что $S_1 = 739$.

а) Найдите $S_4$, если еще известно, что $S_2 = 1779$, $S_3 = 5611$.

б) Может ли $S_4 = 6547$ ?

в) Пусть $S_4 = 6435$. Найдите все значения, которые может принимать $S_2$.

Задание 19 № 502099

**32.** Натуральные числа $a$, $b$, $c$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причём все они больше 500 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение $b$.

Задание 19 № 507744

**33.** Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-3, -1, 2, 4, 6, 7, 9$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 6 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Задание 19 № 502318

**34.** Каждое из чисел 2, 3, …, 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, …, 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Задание 19 № 507495

**35.** В игре «Дротики» есть 20 наружных секторов, пронумерованных от 1 до 20 и два центральных сектора. При попадании в наружный сектор игрок получает количество очков, совпадающее с номером сектора, а за попадание в центральные сектора он получает 25 или 50 очков соответственно. В каждом из наружных секторов есть области удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Так, например, попадание в сектор 10 (не в зоны удвоения и утроения) дает 10 очков, в зону удвоения сектора — 20 очков, в зону утроения — 30 очков.

а) Может ли игрок тремя бросками набрать ровно 167 очков?

б) Может ли игрок шестью бросками набрать ровно 356 очков?

в) С помощью какого наименьшего количества бросков, игрок может набрать ровно 1001 очко?

Задание 19 № 509048

**36.** Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 12, либо в 8 раз. Сумма всех членов последовательности равна 437.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой последовательности?

Задание 19 № 507829

**37.** На доске написаны числа 2 и 3. За один ход из них можно получить числа $a+b$ и $2a-1$ или числа $a+b$ и $2b-1$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить числа 5 и 3 или 5 и 5).

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из чисел, написанных на доске окажется числом 19.

б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 200?

в) Сделали 1007 ходов, причем на доске никогда не было равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

Задание 19 № 514452

**38.** Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отлично от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.

а) Может ли в такой прогрессии быть десять членов?

б) Докажите, что число её членов меньше 100.

в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.

г) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами

Задание 19 № 500971

**39.** На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно $-4$, среднее арифметическое всех положительных из них равно 5, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно $-5$.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Задание 19 № 511413

**40.** Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Задание 19 № 505539

**41.** Даны $n$ различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geq 3)$.
а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?
б) Каково наибольшее значение $n$, если сумма всех данных чисел меньше 900?
в) Найдите все возможные значения $n$, если сумма всех данных чисел равна 123.

Задание 19 № 505040

**42.** На доске написано 10 неотрицательных чисел. За один ход стираются два числа, а вместо них записывается сумма, округлённая до целого числа (например, вместо 5,5 и 3 записывается 9, а вместо 3,3 и 5 записывается 8).
а) Приведите пример 10 нецелых чисел и последовательности 9 ходов, после которых на доске будет записано число, равное сумме исходных чисел.
б) Может ли после 9 ходов на доске быть написано число, отличающееся от суммы исходных чисел на 7?
в) На какое наибольшее число могут отличаться числа, записанные на доске после 9 ходов, выполненных с одним и тем же набором исходных чисел в различном порядке?

Задание 19 № 514485

**43.** Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны все целые неотрицательные степени некоторого однозначного натурального числа $p$. В результате получается рациональное число. Найдите это число.

Задание 19 № 484660

**44.** По окружности расставляют 48 ненулевых целых чисел с общей суммой 20. При этом любые два стоящих рядом числа должны отличаться не более чем на 7 и среди любых четырёх подряд идущих чисел должно быть хотя бы одно положительное.
а) Среди таких 48 чисел найдите наибольшее возможное количество положительных.
б) Среди таких 48 чисел найдите наименьшее возможное количество положительных.

Задание 19 № 514946

**45.** За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. В турнире принимают участие $m$ мальчиков и $d$ девочек, причём каждый играет с каждым дважды.
а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если $m = 3$, $d = 2$.
б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если $m + d = 10$.
в) Каковы все возможные значения $d$, если $m = 7d$ и известно, что в сумме мальчики набрали ровно в 3 раза больше очков, чем девочки?

Задание 19 № 505570

**46.** Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{16}$, где $m > n$.

Задание 19 № 511500

**47.** Наибольшее целое число, не превосходящее число $x$, равно $\frac{x^2+2}{10}$. Найдите все такие значения $x$.

Задание 19 № 511434

**48.** Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ состоит из различных натуральных чисел.
а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_7$ ровно три числа делятся на 36?
б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{30}$ ровно 9 чисел делятся на 36?
в) Для какого наибольшего натурального $n$ могло оказаться так, что среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ больше кратных 36, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, ..., a_{5n}$?

Задание 19 № 513452

**49.** Сумма двух натуральных чисел равна 17, а их наименьшее общее кратное в 70 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите эти числа.

Задание 19 № 511323

**50.** Множество чисел назовём хорошим, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой суммой чисел.
а) Является ли множество {200; 201; 202; ...; 299} хорошим?
б) Является ли множество $\{2; 4; 8; ...; 2^{100}\}$ хорошим?
в) Сколько хороших четырёхэлементных подмножеств у множества {1; 2; 4; 5; 7; 9; 11}?

Задание 19 № 513630