

# ГИА-9

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,  
С.Ю. Кулабухова



ГИА-9

# МАТЕМАТИКА

## ПОДГОТОВКА К ГИА

## ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

# 9 класс

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС  
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ГИА»



**Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ГИА»**

*Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова*

# **МАТЕМАТИКА**

---

## **9 класс**

### **Подготовка к ГИА**

### **ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРОМ**

Учебно-методическое пособие



**ЛЕГИОН**  
Ростов-на-Дону  
2014

ББК 22.1

К 65

Рецензенты:

*Ханин Д.И.* — аспирант факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета;

*Дерезин С.В.* — кандидат физико-математических наук.

**Коннова Е.Г.**

К 65 Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА. Задания с параметром. — Ростов-на-Дону, Легион, 2014. — 64 с. — (Готовимся к ГИА.)

ISBN 978-5-9966-0512-5

Материал, представленный в данном пособии, предназначен для формирования навыков в решении заданий с параметром, которые являются неотъемлемой частью КИМов по математике в 9 и 11 классах.

Книга основана на материале по математике 7 — 9 классов и состоит из 7 параграфов, каждый из которых разделён на пункты, посвящённые определённым типам задач и способам их решения. Также пособие содержит упражнения для самостоятельной работы и ответы к ним.

Предлагаемое издание адресовано учащимся старших классов общеобразовательных учреждений и учителям математики.

Книга является частью **учебно-методического комплекса «Математика. Подготовка к ГИА»**, включающего такие пособия, как «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2014», «Математика. 9 класс. Тренажёр по новому плану экзамена: алгебра, геометрия, реальная математика» и т.д.

Продиагностировать уровень математической подготовки и в соответствии с полученными результатами оптимально подобрать необходимые пособия поможет брошюра «Готовимся к ГИА по математике. С чего начать?», содержащая всю информацию об учебно-методическом комплексе «Математика. Подготовка к ГИА» издательства «Легион».

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0512-5

© ООО «Легион», 2014

# Оглавление

|                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| От авторов .....                                                                      | 4  |
| § 1. Решение линейных уравнений с параметром .....                                    | 5  |
| § 2. Решение линейных неравенств с параметром .....                                   | 9  |
| 1. Линейные неравенства .....                                                         | 9  |
| 2. Системы линейных неравенств .....                                                  | 13 |
| § 3. Графики на плоскости <i>Oxy</i> .....                                            | 17 |
| 1. Уравнение прямой .....                                                             | 17 |
| 2. Взаимное расположение прямых на плоскости.<br>Системы линейных уравнений .....     | 19 |
| 3. График функции $y = k/x$ .....                                                     | 23 |
| 4. Окружность .....                                                                   | 26 |
| 5. Парабола .....                                                                     | 30 |
| 6. Кусочные графики .....                                                             | 33 |
| § 4. Квадратные уравнения с параметром .....                                          | 35 |
| § 5. Разложение квадратного трёхчлена на множители.<br>Формулы Виета .....            | 43 |
| 1. Разложение квадратного трёхчлена на множители .....                                | 43 |
| 2. Теорема Виета .....                                                                | 45 |
| § 6. Расположение корней квадратного уравнения отно-<br>сительно заданных точек ..... | 48 |
| 1. Поиск корней и ограничения .....                                                   | 48 |
| 2. Сравнение корней с нулём .....                                                     | 50 |
| 3. Расположение корней квадратичной функции .....                                     | 52 |
| § 7. Использование свойств функций и алгебраических<br>выражений .....                | 55 |
| 1. Использование симметрии алгебраических выражений ....                              | 55 |
| 2. Использование монотонности функций .....                                           | 57 |
| 3. Использование ОДЗ и оценка множества значений .....                                | 59 |
| Ответы .....                                                                          | 62 |

## От авторов

На государственной итоговой аттестации, как в 9, так и в 11 классе, обязательно встречаются задания с параметром. Кроме того, такие задачи — обязательная часть олимпиад различного уровня.

С помощью этих задач проверяются не базовые умения выпускников, а уровень математического и логического мышления и навыки исследовательской деятельности.

В школьных учебниках задачи с параметром относятся к заданиям повышенного уровня сложности и их решению уделяется мало внимания.

Настоящее пособие поможет учащимся подготовиться к решению таких задач на примере математического материала 7—9 классов.

Материал пособия разделён не только на параграфы, но и на пункты, каждый из которых посвящён определённому типу задач. Упражнения для самостоятельной работы приводятся после соответствующего пункта.

Эта книга может стать пособием для учебного курса в школе или для студентов педагогических институтов, будущих учителей математики.

Также она предназначена школьникам, которые хотят самостоятельно или под руководством учителя освоить способы решения задач с параметром.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать по почте или на электронный адрес: [legionrus@legionrus.com](mailto:legionrus@legionrus.com).

Обсудить пособие, оставить свои замечания и предложения, задать вопросы можно на официальном форуме издательства <http://legion-posobiya.livejournal.com>.

## § 1. Решение линейных уравнений с параметром

1. Решите уравнение  $ax = p$  при всех значениях параметров  $a$  и  $p$ .

*Решение:* Сначала разберём случай, когда  $a \neq 0$ . Тогда уравнение имеет один корень  $x = \frac{p}{a}$ .

Если  $a = 0$ , то уравнение принимает вид  $0 \cdot x = b$  или  $0 = b$ .

Это уравнение не имеет корней, если  $b \neq 0$ , и имеет бесконечно много корней, если  $b = 0$  ( $x$  — любое число из области допустимых значений, в данном случае  $x$  — любое действительное число).

*Ответ:* Если  $a \neq 0$ ,  $x = \frac{p}{a}$ .

Если  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ , нет корней.

Если  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $x$  — любое число.

2. Решите уравнение  $5(x - a) + 2a^2 = x$  при всех значениях параметра  $a$ .

*Решение:* Выполним преобразования.

$$5x - 5a + 2a^2 = x,$$

$$5x - x = 5a - 2a^2,$$

$$4x = 5a - 2a^2.$$

Поделим обе части уравнения на 4.

$$x = \frac{5a - 2a^2}{4}.$$

*Ответ:*  $x = \frac{5a - 2a^2}{4}$ .

3. Решите уравнение  $a(x - 2) + 8a = 6(x - a^2)$  при всех значениях параметра  $a$ .

*Решение:* Выполним преобразования.

$$ax - 2a + 8a = 6x - 6a^2,$$

$$ax - 6x = -6a^2 - 6a,$$

$$(a - 6)x = -6a(a + 1).$$

Разберём два случая:

1)  $a - 6 \neq 0$ . Тогда  $x = \frac{-6a(a + 1)}{a - 6}$ .

2)  $a - 6 = 0$ , то есть  $a = 6$ . В этом случае уравнение примет вид  $0 \cdot x = -6 \cdot 6 \cdot 7$ ,  $0 \cdot x = -252$ . Это равенство неверно, значит корней нет.

Ответ: Если  $a = 6$ , корней нет.

$$\text{Если } a \neq 6, x = \frac{-6a(a+1)}{a-6}.$$

4. Решите уравнение  $a^2(x-2) = 2(2x-a-6)$  при всех значениях параметра  $a$ .

Решение: Преобразуем уравнение.

$$a^2x - 2a^2 = 4x - 2a - 12;$$

$$a^2x - 4x = 2a^2 - 2a - 12;$$

$$(a^2 - 4)x = 2(a^2 - a - 6);$$

$$(a-2)(a+2)x = 2(a+2)(a-3).$$

Рассмотрим возможные случаи:

$$1) (a-2)(a+2) \neq 0, \text{ то есть } a \neq 2, a \neq -2.$$

$$\text{В этом случае } x = \frac{2(a+2)(a-3)}{(a-2)(a+2)}; x = \frac{2(a-3)}{a-2}.$$

2)  $a = 2$ . Подставим  $a = 2$  в уравнение. Получим  $0 \cdot x = -8$ . Это неверное равенство, какое бы значение ни принимало  $x$ . Поэтому корней при  $a = 2$  уравнение не имеет.

3)  $a = -2$ . При таком значении  $a$  уравнение принимает вид  $0 \cdot x = 0$ , что верно при любом значении переменной  $x$ .

Ответ: При  $a = 2$  нет корней.

При  $a = -2$   $x$  — любое число.

$$\text{При } a \neq \pm 2 \quad x = \frac{2(a-3)}{a-2}.$$

5. Найдите, при каких значениях параметра  $a$  уравнение  $2a^2(x-1) = a - 3(ax+1)$  имеет корень, принадлежащий промежутку  $[-3; 2)$ .

Решение: Выясним, при каких значениях параметра  $a$  уравнение имеет корни.

$$2a^2x - 2a^2 = a - 3ax - 3;$$

$$2a^2x + 3ax = 2a^2 + a - 3;$$

$$ax(2a+3) = 2a^2 + a - 3.$$

Если  $a(2a+3) \neq 0$ , то есть  $a \neq 0$  и  $a \neq -1,5$ , то  $x = \frac{2a^2 + a - 3}{a(2a+3)}$ ;

$x = \frac{(2a+3)(a-1)}{a(2a+3)}$ ;  $x = \frac{a-1}{a}$ . Найдём, при каких значениях  $a$  корень уравнения принадлежит промежутку  $[-3; 2)$ .

$-3 \leq \frac{a-1}{a} < 2$ . Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} \frac{a-1}{a} \geq -3, \\ \frac{a-1}{a} < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4a-1}{a} \geq 0, \\ \frac{-a-1}{a} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0 \text{ или } a \geq 0,25, \\ a < -1 \text{ или } a > 0. \end{cases}$$

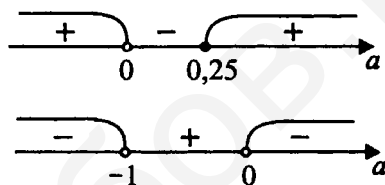


Рис. 1.

$a < -1$  или  $a \geq 0,25$  (см. рис. 1).

Учитывая, что  $a \neq -1,5$  и  $a \neq 0$ , получим

$$a \in (-\infty; -1,5) \cup (-1,5; -1) \cup [0,25; +\infty).$$

Если  $a = 0$ , уравнение принимает вид  $0 \cdot x = -3$ , корней нет.

Если  $a = -1,5$ , уравнение превращается в тождество  $0 \cdot x = 0$ . Корнем уравнения является любое действительное число, то есть при  $a = -1,5$  уравнение имеет корни, принадлежащие промежутку  $[-3; 2)$ .

Значит, искомые  $a \in (-\infty; -1) \cup [0,25; +\infty)$ .

Ответ:  $a \in (-\infty; -1) \cup [0,25; +\infty)$ .

**6.** Найдите, при каких значениях параметра  $a$  корень уравнения  $ax^2 + 3x = 2a$  является корнем уравнения  $ax^2 - 5a^2x = 2a$ .

**Решение:** Если некоторое число  $x = t$  является корнем как первого, так и второго уравнения, то выполняются оба равенства  $at^2 + 3t - 2a = 0$  и  $at^2 - 5a^2t - 2a = 0$ .



Тогда  $at^2 + 3t - 2a = at^2 - 5a^2t - 2a$ ,  $3t + 5a^2t = 2a - 2a$ ,  
 $(3 + 5a^2)t = 0$ .

Так как  $3 + 5a^2 > 0$  при любом значении  $a$ , равенство возможно только при  $t = 0$ . Мы получили, что если у заданных уравнений есть общий корень, то он равен 0.

Подставим нуль в первое исходное уравнение  $a \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 2a$ ,  $2a = 0$ ,  $a = 0$ .

Второе уравнение при  $a = 0$  и  $x = 0$  также превратится в равенство, т.е.  $ax^2 - 5a^2x - 2a = 0$  при  $x = t = 0$ .

Ответ: 0.

7. Решите систему уравнений с двумя неизвестными  $\begin{cases} ax + y = 7, \\ 5ax - 2y = 2 \end{cases}$  при всех значениях параметра  $a$ .

Решение: Выразим  $y$  из первого уравнения и подставим полученное выражение во второе уравнение системы.

$$y = 7 - ax, \quad 5ax - 2(7 - ax) = 2,$$

$$5ax - 14 + 2ax = 2,$$

$$7ax = 16,$$

$$ax = \frac{16}{7}.$$

$$\text{Если } a \neq 0, \quad x = \frac{16}{7a}, \quad y = 7 - ax = 7 - a \cdot \frac{16}{7a} = 4\frac{5}{7}.$$

$$\text{Если } a = 0, \quad 0 \cdot x = \frac{16}{7}, \text{ корней нет.}$$

Ответ: Если  $a = 0$ , нет решений.

$$\text{Если } a \neq 0, \quad x = \frac{16}{7a}, \quad y = 4\frac{5}{7}.$$

### Упражнения

Решите уравнение при всех значениях параметра.

1.1.  $8x = 40a$ .

1.2.  $18 - 7(x + a) = x - a^3$ .

1.3.  $(a + 2)x = 7a$ .

1.4.  $(1 - a^2)x = 2a + 2$ .

1.5.  $a^2(x - 1) = 3x + a(2x - 3)$ .

1.6. Найдите, при каких значениях параметра  $a$  уравнение  $a^2(x - 1) = 5(ax - 5)$  имеет корень, принадлежащий промежутку  $[-4; -3]$ .

1.7. Найдите, при каких значениях параметра  $a$  хотя бы один корень уравнения  $2a^2t - at - 1 = 0$  является корнем уравнения  $a^2t - at - t + a^2 = 0$ .

1.8. Решите систему уравнений  $\begin{cases} x - ay = 3, \\ 3x + 2ay = 4 \end{cases}$  для всех значений параметра  $a$ .

## § 2. Решение линейных неравенств с параметром

### 1. Линейные неравенства

1. При каких значениях параметра  $a$  число 8 является решением неравенства  $3x > 5a - 7a(x + 2)$ ?

*Решение:* Решение неравенства — такое значение неизвестного, которое при подстановке в неравенство превращает его в верное числовое неравенство.

$$3 \cdot 8 > 5a - 7a \cdot (8 + 2),$$

$$24 > 5a - 70a,$$

$$24 > -65a,$$

$$65a > -24,$$

$$a > -\frac{24}{65}.$$

*Ответ:*  $a > -\frac{24}{65}$ .

2. Решите неравенство  $ax > b$  при всех значениях параметров  $a$  и  $b$ .

*Решение:* При решении линейных неравенств может возникнуть три принципиально разных случая:

1)  $a > 0$ . Тогда мы имеем право разделить обе части неравенства на  $a$ , получим  $x > \frac{b}{a}$ .

2)  $a < 0$ . Мы также можем разделить на  $a$ , но знак неравенства при этом нужно поменять на противоположный. Получим  $x < \frac{b}{a}$ .

3)  $a = 0$ . Неравенство превращается в числовое неравенство  $0 > b$ . Если  $b < 0$ , то неравенство верно и решением неравенства является любое число.

Если  $b \geq 0$ , то неравенство неверно и неравенство не имеет решений.

Ответ: Если  $a > 0$ ,  $x > \frac{b}{a}$ .

Если  $a < 0$ ,  $x < \frac{b}{a}$ .

Если  $a = 0$ ,  $b < 0$ , то  $x$  — любое число.

Если  $a = 0$ ,  $b \geq 0$ , то решений нет.

3. Решите неравенство  $ax + 3 < 5(a + 2x)$  при каждом значении параметра  $a$ .

Решение: Выполним преобразования.

$$ax + 3 < 5a + 10x;$$

$$ax - 10x < 5a - 3;$$

$$(a - 10)x < 5a - 3.$$

Рассмотрим несколько случаев.

1)  $a - 10 > 0$ ,  $a > 10$ . Тогда  $x < \frac{5a - 3}{a - 10}$ .

2)  $a - 10 < 0$ ,  $a < 10$ . Тогда  $x > \frac{5a - 3}{a - 10}$ .

3)  $a = 10$ . Неравенство принимает вид  $0 \cdot x < 47$ , то есть  $0 < 47$ . Неравенство верно, поэтому любое число будет решением неравенства.

Ответ: Если  $a > 10$ ,  $x < \frac{5a - 3}{a - 10}$ .

Если  $a < 10$ ,  $x > \frac{5a - 3}{a - 10}$ .

Если  $a = 10$ ,  $x$  — любое число.

4. Решите неравенство  $2(ax - 16) \geq a - 5x$  при всех значениях параметра  $a$ .

*Решение:* Преобразуем неравенство.

$$2(ax - 16) \geq a - 5x;$$

$$2ax - 32 \geq a - 5x;$$

$$(2a + 5)x \geq a + 32.$$

1)  $2a + 5 > 0$ ,  $a > -2,5$ . Тогда  $x \geq \frac{a + 32}{2a + 5}$ .

2)  $2a + 5 < 0$ ,  $a < -2,5$ . Тогда  $x \leq \frac{a + 32}{2a + 5}$ .

3)  $a = -2,5$ . Неравенство принимает вид  $0 \cdot x \geq 29,5$ ,  $0 \geq 29,5$ . Данное числовое неравенство неверно, поэтому решений нет.

*Ответ:* Если  $a > -2,5$ ,  $x \geq \frac{a + 32}{2a + 5}$ .

Если  $a < -2,5$ ,  $x \leq \frac{a + 32}{2a + 5}$ .

Если  $a = -2,5$ , решений нет.

5. При каких значениях параметра  $p$  решением неравенства

$$9x - p + 7 \geq 2(p + x)$$
 будет промежуток  $[3; +\infty)$ ?

*Решение:*  $9x - p + 7 \geq 2(p + x)$ ,

$$9x - 2x \geq 2p + p - 7,$$

$$7x \geq 3p - 7,$$

$$x \geq \frac{3}{7}p - 1.$$

Решением этого неравенства будет промежуток  $[3; +\infty)$ , если

$$\frac{3}{7}p - 1 = 3, \quad \frac{3}{7}p = 4, \quad p = \frac{28}{3}; \quad p = 9\frac{1}{3}.$$

*Ответ:*  $p = 9\frac{1}{3}$ .

6. Найдите все значения параметра  $p$ , при которых хотя бы одно значение переменной  $x$  из промежутка  $[-3; 2)$  является решением неравенства  $8(-x + p) > 5$ .

*Решение:* Решим неравенство.

$$-8x + 8p > 5;$$

$$-8x > -8p + 5;$$

$$x < \frac{-8p + 5}{-8};$$

$$x < p - \frac{5}{8}.$$

Изобразим множество решений неравенства на числовой оси (см. рис. 2).

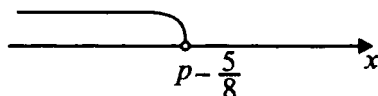


Рис. 2.

Нам нужно, чтобы хотя бы одно значение из промежутка  $[-3; 2)$  являлось решением неравенства  $x < p - \frac{5}{8}$ . Чтобы понять, какие  $p$  нам подойдут, рассмотрим ряд случаев.

1. Все значения  $[-3; 2)$  являются решениями неравенства (см. рис. 3).

В этом случае  $2 \leq p - \frac{5}{8}$  и такие  $p$  нам подходят.

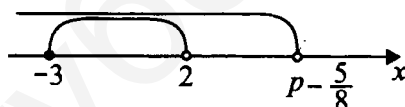


Рис. 3.

2.  $-3 < p - \frac{5}{8} < 2$ . В этом случае часть чисел из промежутка  $[-3; 2)$  являются решениями неравенства, а часть не являются (см. рис. 4). Эти  $p$  нам тоже подходят.

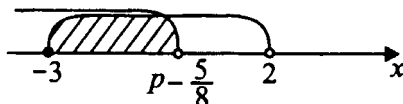


Рис. 4.

3.  $p - \frac{5}{8} = -3$ . Видим, что  $x = -3$  не является решением неравенства в этом случае, а  $x > -3$  не являются решениями тем более (см. рис. 5). Такое  $p$  нам не подходит.

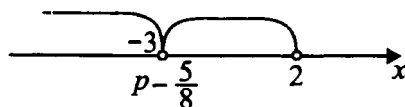


Рис. 5.

4.  $p - \frac{5}{8} < -3$ . В этом случае ни одно из чисел из промежутка  $[-3; 2)$  не является решением неравенства (см. рис. 6), значит при  $p - \frac{5}{8} < -3$  условие не выполняется.

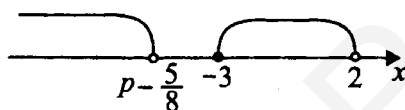


Рис. 6.

Мы получили, что при  $p - \frac{5}{8} > -3$ , т.е.  $p > -2\frac{3}{8}$ , условие выполнено.

Ответ:  $p > -2\frac{3}{8}$ .

## 2. Системы линейных неравенств

Напомним, решением системы неравенств является пересечение решений всех неравенств системы, другими словами, все значения переменной, при которых выполняются все неравенства.

1. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых число 4 является решением системы неравенств 
$$\begin{cases} 5ax - 7a > 3; \\ 8x + 2a \leq ax. \end{cases}$$

Решение:  $x = 4$  — решение системы. Подставим его в оба неравенства системы и найдём те значения  $a$ , при которых неравенства верны.

$$\begin{cases} 5a \cdot 4 - 7a > 3, \\ 8 \cdot 4 + 2a \leq a \cdot 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 13a > 3, \\ -2a \leq -32; \end{cases} \quad \begin{cases} a > \frac{3}{13}, \\ a \geq 16; \end{cases} \quad a \geq 16.$$

Ответ:  $a \geq 16$ .

2. Решите систему неравенств  $\begin{cases} 3x + 8 \geq 26, \\ x + 3 < a \end{cases}$  при всех значениях параметра  $a$ .

Решение:  $\begin{cases} 3x \geq 26 - 8; \\ x < a - 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 6, \\ x < a - 3. \end{cases}$

Изобразим решения неравенств на числовой оси (см. рис. 7)



Рис. 7.

Возможны три случая.

1)  $6 < a - 3$  (см. рис. 8), т.е.  $a > 9$ . Тогда  $x \in [6; a - 3)$ .



Рис. 8.

2)  $a - 3 = 6$  (см. рис. 9),  $a = 9$  — решений нет.

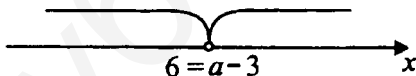


Рис. 9.

2)  $a - 3 < 6$  (см. рис. 10),  $a < 9$ . В этом случае система также не имеет решений.

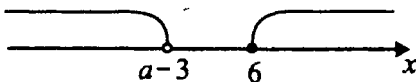


Рис. 10.

Ответ: Если  $a > 9$ ,  $x \in [6; a - 3)$ .

Если  $a \leq 9$ , решений нет.

3. При каких значениях параметра  $a$  система неравенств

$\begin{cases} 3x \leq 5 + ax, \\ 17(x - a) \geq 2(5x + 7) - 17a \end{cases}$  имеет хотя бы одно решение?

Решение: Преобразуем систему:

$$\begin{cases} 3x \leq 5 + ax, \\ 17x - 17a \geq 10x - 17a + 14; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - ax \leq 5, \\ 7x \geq 14; \end{cases} \quad \begin{cases} (3-a)x \leq 5, \\ x \geq 2. \end{cases} \quad (1)$$

Решим первое неравенство системы.

Если  $3 - a > 0$ , т.е.  $a < 3$ , то  $x \leq \frac{5}{3-a}$ .

Если  $3 - a < 0$ , т.е.  $a > 3$ , то  $x \geq \frac{5}{3-a}$ .

Если  $3 - a = 0$ , т.е.  $a = 3$ , то  $0 \leq 5$  — верное неравенство, решениями системы являются все решения второго неравенства, т.е.  $x \geq 2$ .

Рассмотрим систему (1).

$$1) a = 3, \quad \begin{cases} 0 \leq 5, \\ x \geq 2; \end{cases} \quad x \geq 2.$$

При  $a = 3$  система (1) имеет решение.

$$2) a < 3, \quad \begin{cases} x \leq \frac{5}{3-a} \\ x \geq 2. \end{cases}$$

Эта система имеет хотя бы одно решение, если  $\frac{5}{3-a} \geq 2$  (см. рис. 11).

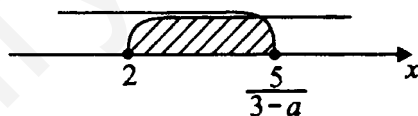


Рис. 11.

Так как в этом случае  $a < 3$ , т.е.  $3 - a > 0$ , можно неравенство  $\frac{5}{3-a} \geq 2$  умножить на  $3 - a$ , получим  $5 \geq 2(3 - a)$ ,  $5 \geq 6 - 2a$ ,  $2a \geq 1$ ,  $a \geq 0,5$ .

При  $\begin{cases} a \geq 0,5, \\ a < 3 \end{cases}$  система (1) имеет решения.

$$2) a > 3. \text{ В этом случае } \begin{cases} x \leq \frac{5}{3-a}, \\ x \leq 2. \end{cases}$$



Эта система при любом  $a > 3$  имеет решения.

Учитывая все рассмотренные случаи, получаем, что исходная система имеет решения при  $a \geq 0,5$ .

Ответ:  $a \geq 0,5$ .

### Упражнения

2.1. При каких значениях параметра  $a$  число 3 является решением неравенства  $8x(a + 4) \leq 3a(x - 7)$ ?

Решите неравенство при каждом значении параметра.

2.2.  $7x \geq 3a + 49$ .

2.3.  $x - 8 < 5(x + a)$ .

2.4.  $(a + 2)x > 6a$ .

2.5.  $a(5x - 3) \geq 1 + 2x$ .

2.6. При каких значениях параметра  $p$  решением неравенства  $8p - 2x + 3 < 6(p + x)$  будет промежуток  $(2; +\infty)$ ?

2.7. Найдите все значения параметра  $m$ , при которых хотя бы одно значение  $x$  из промежутка  $(1; 7]$  является решением неравенства  $3(2p - x) \leq 5 + p$ .

2.8. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых число  $-8$  является решением системы неравенств  $\begin{cases} x - 5a < 3, \\ 3 - 2ax \leq a. \end{cases}$

2.9. Решите систему неравенств  $\begin{cases} 2x - 4 < 15, \\ 5 - x > a \end{cases}$  при всех значениях параметра  $a$ .

2.10. При каких значениях параметра  $m$  система неравенств  $\begin{cases} 8(a - x) + 28 \leq 3(2x + a) + 5a, \\ ax > 3 - 2x \end{cases}$  не имеет решений?

### § 3. Графики на плоскости $Oxy$

Некоторые задания с параметром удобно решать, представив условие в графическом виде. Для этого нужно уметь строить графики уравнений и семейства кривых, зависящих от параметра.

#### 1. Уравнение прямой

Уравнение прямой можно записать так:  $ax + by + c = 0$  или  $y = kx + p$ .

Уравнение прямой, проходящей параллельно оси абсцисс  $Ox$ , выглядит так:  $y = c$ , где  $c$  — ордината любой точки прямой (см. рис. 12а).

Уравнение прямой, проходящей параллельно оси ординат  $Oy$ , выглядит так:  $x = p$ , где  $p$  — абсцисса любой точки прямой (см. рис. 12б).

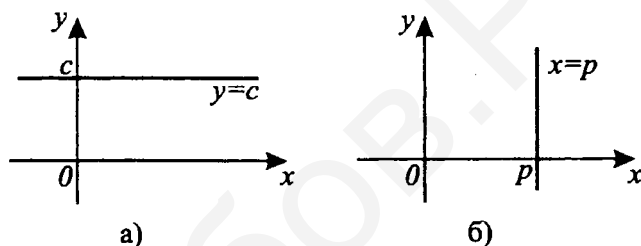


Рис. 12.

Рассмотрим уравнение прямой  $ax + by + c = 0$ .

Если  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ , то уравнение примет вид  $by + c = 0$ ,  $y = -\frac{c}{b}$ .

Если  $a \neq 0$ ,  $b = 0$ , то  $ax + c = 0$ ,  $x = -\frac{c}{a}$ . Эти случаи мы уже разобрали.

Если  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ , то уравнение можно записать так  $by = -c - ax$ ,  $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ , то есть в виде  $y = kx + p$ .

Выясним, как зависит вид прямой от параметров  $k$  и  $p$ .

Если  $x = 0$ , то  $y = p$ , значит прямые  $y = kx + p$  проходят через точку  $(0; p)$ , то есть пересекают ось  $Oy$  в этой точке.

Например,  $y = kx + 2$  — это семейство прямых, пересекающих ось  $Oy$  в точке  $(0; 2)$ . Некоторые из этих прямых показаны на рисунке 13. То есть

параметр  $p$  показывает, какая ордината у точки пересечения прямой с осью ординат. Назовём параметр  $p$  свободным коэффициентом.

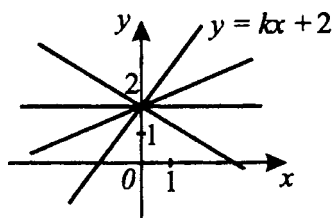


Рис. 13.

Выясним, что показывает значение параметра  $k$  в уравнении  $y = kx + p$ . Рассмотрим две точки с абсциссами  $x_0$  и  $x_0 + \Delta x$ . Найдём их ординаты.

$$y(x_0) = kx_0 + p, \quad y(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + p,$$

$$y(x_0 + \Delta x) = k \cdot x_0 + p + k \cdot \Delta x.$$

Абсциссы этих точек отличаются на  $\Delta x$ , ординаты на  $\Delta y = k\Delta x$ . То есть  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k$ . Другими словами,  $k = \operatorname{tg} \alpha$  (см. рис. 14), где  $\alpha$  — угол между прямой и положительным направлением оси  $Ox$ .

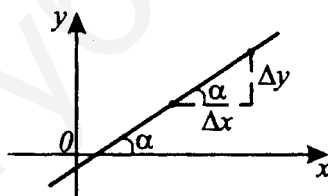


Рис. 14.

Число  $k$  называют угловым коэффициентом, так как он показывает, под каким углом к оси  $Ox$  проходит прямая.

Если  $k = 0$ , то прямая параллельна оси  $Ox$ , если  $k > 0$ , угол  $\alpha$  острый, если же  $k < 0$ , угол  $\alpha$  тупой (см. рис. 15).

Мы получили, что  $y = kx + b$ , где  $k$  — известное число,  $b$  — параметр — это семейство параллельных прямых с угловым коэффициентом  $k$ . Например, на рисунке 16 изображены некоторые из семейства прямых  $y = -0,5x + b$ .

Заметим, что прямые  $y = k(x - x_0) + y_0$  проходят через точку  $(x_0; y_0)$ .

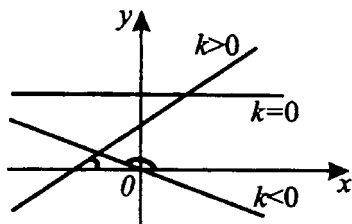


Рис. 15.

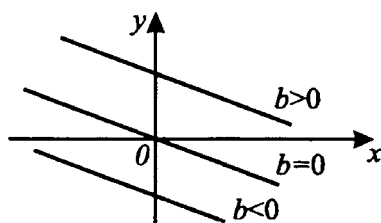


Рис. 16.

Рассмотрим задачу.

1. При каких значениях  $a$  прямая  $y = 2ax + 7$

а) параллельна прямой  $y = (a + 5)x - 3a$ ?

б) совпадает с этой прямой?

*Решение:* Прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны, но свободные коэффициенты не равны:

$$\begin{cases} 2a = a + 5, \\ 7 \neq -3a; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 5, \\ a \neq -\frac{7}{3}; \end{cases} \quad a = 5.$$

При  $a = 5$  прямые параллельны.

Прямые совпадают, если равны и угловые, и свободные коэффициенты соответственно, то есть  $\begin{cases} 2a = a + 5, \\ 7 = -3a. \end{cases}$

Эта система не имеет решений, поэтому эти прямые не могут совпадать.

*Ответ:* а)  $a = 5$ , б) нет таких  $a$ .

## 2. Взаимное расположение прямых на плоскости. Системы линейных уравнений

Прямые не имеют общих точек, если они параллельны. Если они совпадают, то общих точек бесконечно много.

Если прямые пересекаются, у них одна общая точка.

Давайте рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

Их геометрическое представление на плоскости  $Oxy$  — две прямые, причём решение системы — пара  $(x_0, y_0)$  — является общей точкой двух этих прямых.

1) Если  $a_2 b_2 \neq 0$ , то возможны три случая.

а)  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ , тогда прямые пересекаются и система имеет одну общую точку.

б)  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ,  $c_2 \neq 0$  или  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$  и  $c_1 = c_2 = 0$ , тогда прямые совпадают и система имеет бесконечно много решений.

в)  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ , тогда прямые параллельны и система решений не имеет.

2) Рассмотрим случаи, когда  $a_2 b_2 = 0$ .

г) Если  $\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = 0 \end{cases}$  и  $b_2 \neq 0$ , то прямые параллельны при  $\frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2}$ , когда  $c_2 \neq 0$  либо при  $c_1 = c_2 = 0$  или совпадают (при  $c_1 \neq c_2$ ).

Аналогично, если  $\begin{cases} b_1 = 0, \\ b_2 = 0 \end{cases}$  и  $a_2 \neq 0$ , то прямые параллельны при  $\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2}$ , когда  $c_2 = 0$ , и при  $c_1 = c_2 = 0$ .

д) Если  $\begin{cases} a_1 \neq 0, \\ a_2 = 0 \end{cases}$  или  $\begin{cases} b_1 \neq 0, \\ b_2 = 0, \end{cases}$  то прямые пересекаются.

2. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений  $\begin{cases} 5x + ay = 18, \\ (a + 7)x + a^2y = 6 \end{cases}$  имеет ровно одно решение.

*Решение:* Рассмотрим два случая.

1)  $a = 0$ , тогда система примет вид  $\begin{cases} 5x = 18, \\ 7x = 6. \end{cases}$

Эта система не имеет решений.

$$2) a \neq 0.$$

Система имеет одно решение, если  $\frac{a+7}{5} \neq \frac{a^2}{a}$ , то есть  $(a+7)a \neq a^2 \cdot 5$ ,

$$a+7 \neq 5a,$$

$$4a \neq 7,$$

$$a \neq 1\frac{3}{4}.$$

Система имеет единственное решение при  $a \neq 0$ ,  $a \neq 1\frac{3}{4}$ .

Значит,  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1\frac{3}{4}) \cup (1\frac{3}{4}; +\infty)$ .

Ответ:  $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1\frac{3}{4}) \cup (1\frac{3}{4}; +\infty)$ .

3. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых прямая  $y = a(x-2) + 3$  имеет не менее двух общих точек с квадратом, вершины которого находятся в точках  $(-5; 0)$ ,  $(0; 3)$ ,  $(-1; -1)$ .

**Решение:** Построим квадрат  $BCDE$  с заданными вершинами (см. рис. 17).

Найдём координату точки  $D$ . Так как  $DC = BE$  и  $DC \parallel BE$ , то вектор  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$ . Координаты  $\overrightarrow{BE} \{-4; 1\}$ , координаты  $\overrightarrow{CD} \{x_D - x_C; y_D - y_C\}$ , то есть  $\{x_D - 0; y_D - 3\}$ . У равных векторов — равные координаты, поэтому  $x_D - 0 = -4$ ,  $x_D = -4$ ,  $y_D - 3 = 1$ ,  $y_D = 4$ . Получим  $D(-4; 4)$ .

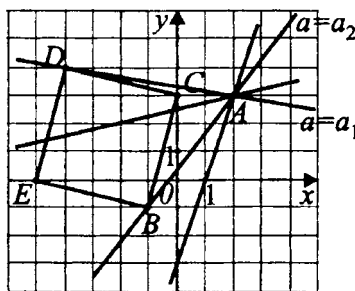


Рис. 17.

$y = a(x-2) + 3$  — семейство прямых, проходящих через точку  $A(2; 3)$ . Это легко доказать, подставив  $x = 2$ ,  $y = 3$  в уравнение прямой. Заметим,

что при увеличении углового коэффициента  $a$  прямые вращаются вокруг точки  $A$  против часовой стрелки.

По рисунку 17 видно, что при  $a \in (a_1; a_2)$  прямая имеет с квадратом более одной общей точки.

Найдём  $a_1$ . Прямая  $y = a(x - 2) + 3$  проходит через точку  $(-4; 4)$ .

$$a(-4 - 2) + 3 = 4,$$

$$-6a = 1,$$

$$a = -\frac{1}{6}.$$

Найдём  $a_2$ . Прямая проходит через точку  $(-1; -1)$ .

$$a(-1 - 2) + 3 = -1,$$

$$-3a = -4,$$

$$a = \frac{4}{3}.$$

Значит, искомые  $a \in \left(-\frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$ .

Ответ:  $a \in \left(-\frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$ .

### Упражнения

3.1. Постройте прямую  $y = a$ , если:

а)  $a = -3$ ,

б)  $a = -1$ ,

в)  $a = 0$ ,

г)  $a = 4$ .

3.2. Постройте прямую  $x = a$ , если:

а)  $a = -3$ ,

б)  $a = -1$ ,

в)  $a = 0$ ,

г)  $a = 4$ .

3.3. Постройте прямую  $y = kx - 3$ , если:

а)  $k = 0$ ,

б)  $k = -1$ ,

в)  $k = 0,5$ ,

г)  $k = 2$ .

3.4. Постройте прямую  $y = \frac{1}{2}x + a$ , если:

а)  $a = 0$ ,

б)  $a = -2$ ,

в)  $a = 2$ ,

г)  $a = 4$ .

3.5. Постройте прямую  $y = a(x - 3) - 2$ , если:

а)  $a = 0$ ,

б)  $a = -1$ ,

в)  $a = 0,5$ ,

г)  $a = 3$ .

3.6. Найдите  $k$ , при котором прямая  $y = kx + 7$  проходит через точку  $(2; 1)$ .

3.7. Найдите  $a$ , при котором прямая  $y = 2x + a$  проходит через точку  $(-3; 5)$ .

3.8. При каких значениях  $a$  прямая  $y = 5ax + 8$

а) параллельна прямой  $y = (a^2 + 2a)x + a + 5$ ?

б) совпадает с этой прямой?

3.9. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2ay = 6, \\ (a + 5)x - a^2y = 10 \end{cases} \text{ имеет}$$

а) ровно одно решение,

б) бесконечно много решений.

3.10. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых прямая  $y = a(x + 2) - 5$  имеет не более одной общей точки с квадратом, вершины которого находятся в точках  $(-1; -2)$ ,  $(3; 2)$ ,  $(7; -2)$ .

### 3. График функции $y = k/x$

Область допустимых значений  $x \neq 0$ . Графиком этой функции является гипербола (при  $k \neq 0$ ).

Если  $k > 0$ , её ветви расположены в I и III четвертях (см. рис. 18а), если же  $k < 0$ , то во II и IV четвертях (см. рис. 18б).



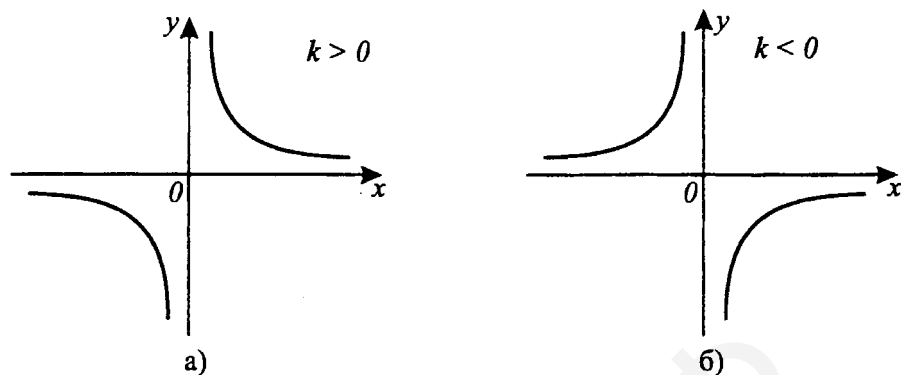


Рис. 18.

Иногда уравнение гиперболы записывают в виде  $xy = k$ ,  $k \neq 0$ .

Если рассмотреть две гиперболы  $y = \frac{k_1}{x}$  и  $y = \frac{k_2}{x}$ , где  $k_1$  и  $k_2$  одного знака и  $|k_1| > |k_2|$ , то ветви гиперболы  $y = \frac{k_2}{x}$  будут лежать к осям координат ближе, чем ветви  $y = \frac{k_1}{x}$  (см. рис. 19).

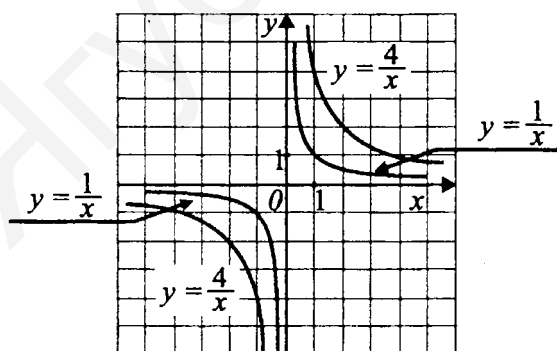


Рис. 19.

4. Найдите, при каких значениях параметра  $p$  уравнение  $p \cdot |x| = \frac{3x - 6}{x^2 - 2x}$  имеет один корень.

**Решение:** Решим задачу графически.

Уравнение  $p \cdot |x| = \frac{3x-6}{x^2-2x}$  имеет столько решений, сколько общих

точек имеют графики  $y = p \cdot |x|$  и  $y = \frac{3x-6}{x^2-2x}$ .

При  $x \geq 0$  график  $y = p \cdot |x|$  — часть прямой  $y = px$ , при  $x < 0$  — часть прямой  $y = -px$ . Несколько графиков такого вида можно увидеть на рисунке 20а.

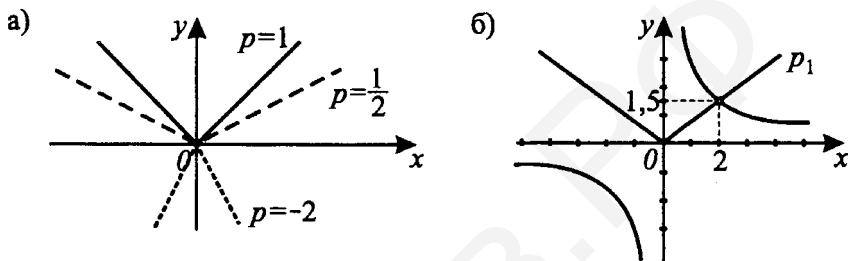


Рис. 20.

Построим график функции  $y = \frac{3x-6}{x^2-2x}$ . (1)

Найдём область допустимых значений аргумента  $x^2 - 2x \neq 0$ ,  $x \neq 0$ ,  $x \neq 2$ . Упростим уравнение (1):

$$\frac{3x-6}{x^2-2x} = \frac{3(x-2)}{x(x-2)} = \frac{3}{x}, \quad y = \frac{3}{x}.$$

График уравнения (1) — гипербола с выколотой точкой (так как  $x \neq 2$ ). По рисунку 20б видно, что графики имеют одну общую точку, если  $p \neq 0$  и если график  $y = p_1 \cdot |x|$  не проходит через точку  $A\left(2; \frac{3}{2}\right)$ .

$$\text{Найдём } p_1. \quad y = p_1|x|, \quad \frac{3}{2} = p_1 \cdot |2|, \quad p_1 = \frac{3}{2} : 2 = \frac{3}{4}.$$

Значит, исходное уравнение имеет один корень при  $p \neq 0$  и  $p \neq \frac{3}{4}$ .

**Ответ:**  $p \neq 0, p \neq \frac{3}{4}$ .

#### 4. Окружность

Уравнение окружности имеет вид  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ , при этом  $(x_0; y_0)$  — координаты центра окружности,  $r > 0$  — радиус окружности.

Например, окружность  $x^2 + y^2 = R^2$  имеет центр в начале координат и радиус  $R$ .

#### 5. Постройте окружность

а)  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1$ ,

б)  $(x - 7)^2 + y^2 = 4$ ,

в)  $x^2 + y^2 = 9$ ,

г)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$ .

*Решение:* а) Это окружность с центром  $(3; -2)$  и радиусом 1 (см. рис. 21а).

б) Это окружность с центром  $(7; 0)$  и радиусом 2 (см. рис. 21б).

в) Это окружность с центром  $(0; 0)$  и радиусом 3 (см. рис. 21в).

г) Преобразуем уравнение, выделив полные квадраты:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 4, \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 4 + 1 + 4, \quad (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9.$$

Строим окружность с центром  $(1; -2)$  и радиусом 3 (см. рис. 21г).

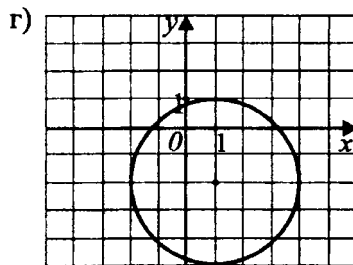
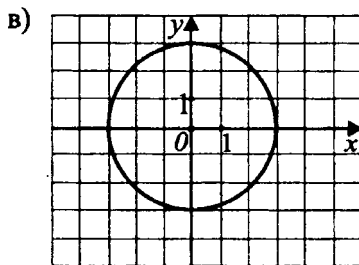
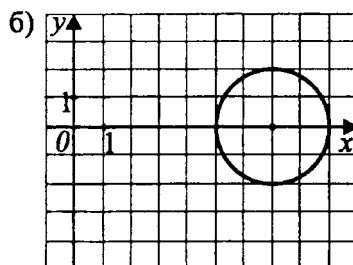
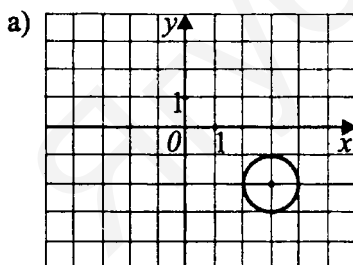


Рис. 21.

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система уравнений
- $$\begin{cases} x^2 + 6x + y^2 = a^2 - 9, \\ (x - 3)(y + 3) = 0 \end{cases}$$
- имеет нечётное число решений.

*Решение:* Решим задачу графически.

Уравнение  $x^2 + 6x + y^2 = a^2 - 9$  можно привести к виду  $(x+3)^2 + y^2 = a^2$ , его график — окружность с центром в точке  $A(-3; 0)$  и радиусом  $R = |a|$ .

$(x-3)(y+3) = 0$  равносильно совокупности  $\begin{cases} x - 3 = 0, \\ y + 3 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = -3. \end{cases}$  (1) (2)

Это две прямых, параллельных осям координат (см. рис. 22).

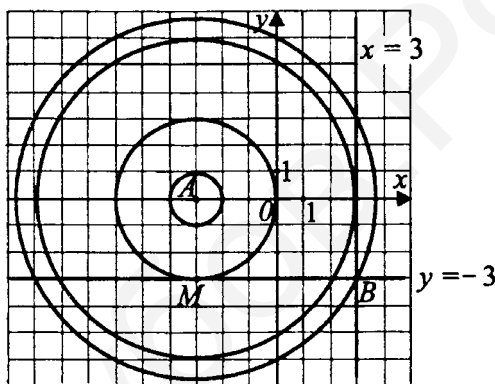


Рис. 22.

По рисунку видно, что расстояние от точки  $A$  до прямой  $y = -3$  равно 3, а до прямой  $x = 3$  равно 6. Значит, при  $R < 3$  окружность и прямая (2) не имеют общих точек, при  $R = 3$  имеют 1 общую точку  $M$  и при  $R > 3$  имеют 2 точки пересечения. Аналогично при  $R < 6$  окружность и прямая (1) не имеют общих точек, при  $R = 6$  — одну и при  $R > 6$  — две общих точки. Таким образом, система имеет нечётное число решений при  $|a| = 3$ , то есть при  $a = \pm 3$ , и при  $|a| = 6$ , то есть при  $a = \pm 6$ . Казалось бы, что других решений задача не имеет, но прямые  $x = 3$  и  $y = -3$  имеют общую точку  $B(3; -3)$ . Если окружность проходит через эту точку, система будет иметь 3 решения. Искомое значение  $a$  можно найти из прямоугольного  $\triangle AMB$  или подставив значения  $x = 3$ ,  $y = -3$  в уравнение окружности.  $|a| = \sqrt{45}$ .

*Ответ:*  $\pm 3; \pm 6; \pm \sqrt{45}$ .

7. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{-x^2 - 6x - 5}, \\ y = a(x - 3) + 2 \end{cases} \quad \text{имеет решения.}$$

*Решение:* Построим график уравнения

$$y = \sqrt{-x^2 - 6x - 5}, \quad y = \sqrt{4 - (x^2 + 6x + 9)}.$$

Если  $y \geq 0$ , то  $y^2 = 4 - (x + 3)^2$ ,  $(x + 3)^2 + y^2 = 4$ . При  $y < 0$  нет точек, удовлетворяющих уравнению. Получилась полуокружность с центром  $(-3; 0)$  и радиусом 2 (см. рис. 23).

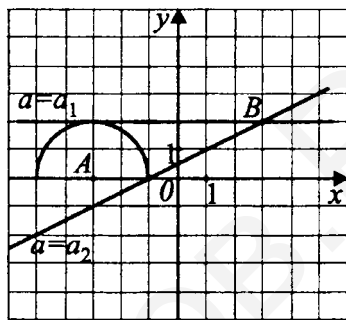


Рис. 23.

$y = a(x - 3) + 2$  — семейство прямых с угловым коэффициентом  $a$ , проходящих через точку  $B(3; 2)$ .

Рассмотрим рисунок 23.

Видно, что кривые имеют общие точки, то есть система уравнений имеет решения, если  $a \in [a_1; a_2]$ .

$a_1 = 0$ . Найдём  $a_2$  из условия, что прямая проходит через точку с координатами  $(-1; 0)$ .

$$a(-1 - 3) + 2 = 0; \quad -4a = -2, \quad a = \frac{1}{2}.$$

Значит, система имеет решения при  $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ .

*Ответ:*  $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ .

## Упражнения

3.11. Постройте график функции  $y = \frac{a}{x}$ , если:

- а)  $a = 1$ ,
- б)  $a = 8$ ,
- в)  $a = 0,2$ ,
- г)  $a = -1$ ,
- д)  $a = -4$ .

3.12. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$a|x| = -\frac{8x + 24}{x^2 + 3x} \text{ не имеет корней.}$$

3.13. Постройте график окружности  $x^2 + y^2 = a^2$ , где:

- а)  $a = 1$ ,
- б)  $a = 2$ ,
- в)  $a = 3$ ,
- г)  $a = -2$ .

3.14. Постройте график уравнения  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = a$ , если:

- а)  $a = 1$ ,
- б)  $a = 4$ ,
- в)  $a = 9$ ,
- г)  $a = -4$ .

3.15. Постройте график уравнения  $(x - a)^2 + (y - 1)^2 = 4$ , если:

- а)  $a = -3$ ,
- б)  $a = 0$ ,
- в)  $a = 4$ .

3.16. Постройте график уравнения  $(x + 2)^2 + (y + a)^2 = 1$ , если:

- а)  $a = -3$ ,
- б)  $a = 0$ ,
- в)  $a = 4$ .

3.17. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система уравне-

ний  $\begin{cases} (x + 5)(y + 3) = 0, \\ (x + 3)^2 + y^2 - 4y = a^2 - 4 \end{cases}$  имеет нечётное число решений.

3.18. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{4x - x^2}, \\ y - 2 = a(x + 4) \end{cases} \text{ имеет решения.}$$

3.19. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 - 10x - 2y = a^2 + 2a - 25 \end{cases} \text{ имеет ровно два решения.}$$

## 5. Парабола

Рассмотрим график функции  $y = x^2$ . Это парабола (см. рис. 24) с вершиной в начале координат и ветвями, направленными вверх. Парабола имеет ось симметрии, проходящую через вершину параллельно оси ординат  $Oy$ .

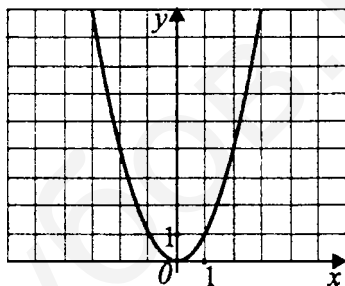


Рис. 24.

Парабола  $y = (x - p)^2 + b$  получается из параболы  $y = x^2$  сдвигом на вектор  $\{p; b\}$ . В точке  $(p; b)$  находится вершина такой параболы. Например,  $y = (x - p)^2 + 2$  — семейство парабол, вершина которых перемещается по прямой  $y = 2$  (см. рис. 25).

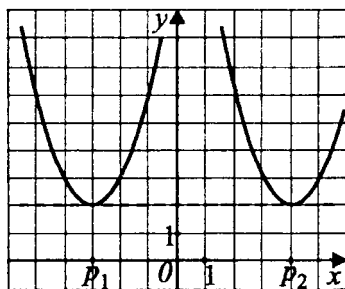


Рис. 25.

Вершины парабол  $y = (x - 2)^2 + b$  перемещаются по прямой  $x = 2$  (см. рис. 26).

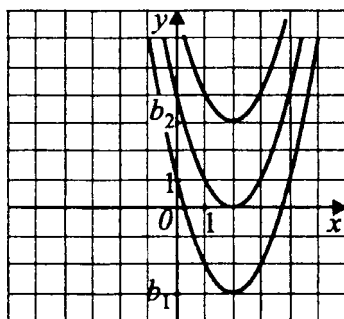


Рис. 26.

Параболы  $y = ax^2$  ( $a > 0$ ) получаются из графика  $y = x^2$  растяжением в  $a$  раз вдоль оси ординат  $Oy$  (см. рис. 27).

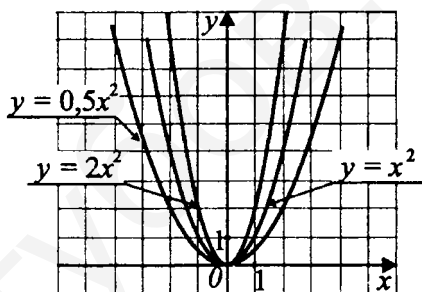


Рис. 27.

Рассмотрим параболу  $y = -ax^2$ . Она получается из параболы  $y = ax^2$  отражением относительно оси абсцисс (см. рис. 28).

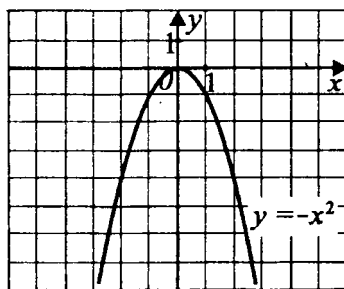


Рис. 28.



Если уравнение параболы имеет вид  $y = ax^2 + bx + c$ , то её вершину можно найти по формулам  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ ;  $y_0 = y(x_0)$ .

8. Найдите значение параметра  $a$ , при котором система

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 4x - 3, \\ y = ax - 5 - 3a \end{cases} \text{ имеет ровно одно решение.}$$

*Решение:* Построим графики уравнений.

$y = 2x^2 + 4x - 3$  — парабола с вершиной с координатами

$$x_0 = -\frac{4}{2 \cdot 2} = -1, y_0 = -5 \text{ (см. рис. 29).}$$

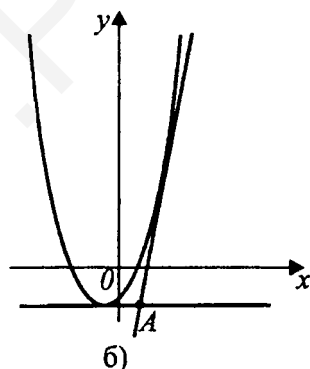
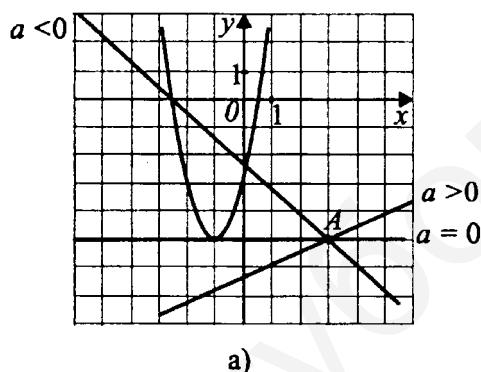


Рис. 29.

Уравнение  $y = ax - 5 - 3a$  запишем в виде  $y = a(x - 3) - 5$ . Это семейство прямых, проходящих через точку  $A(3; -5)$ . Видим, что при  $a < 0$  прямая и парабола имеют 2 общие точки, а при  $a = 0$  у них ровно одна общая точка. Рассмотрим случай  $a > 0$ . На рисунке 29б построен рисунок в другом масштабе. На этом рисунке видно, что при  $a = a_1$  прямая и парабола также имеют единственную общую точку. Найдём  $a_1$ .

$$2x^2 + 4x - 3 = ax - 5 - 3a, 2x^2 + (4 - a)x + 3a + 2 = 0.$$

Найдём дискриминант.

$$D = (4 - a)^2 - 4 \cdot 2(3a + 2) = 16 - 8a + a^2 - 24a - 16 = a^2 - 32a = a(a - 32).$$

Квадратное уравнение имеет один корень при  $a = 0$  и  $a = 32$ .

*Ответ:*  $a = 0$ ,  $a = 32$ .

## 6. Кусочные графики

Один из видов задач с параметром формулируется так: постройте график функции  $y = f(x)$  (задаётся уравнением или системой условий) и определите, при каких значениях параметра  $m$  уравнение  $f(x) = m$  имеет  $k$  (заданное число) корней. Рассмотрим несколько примеров.

9. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 2, \\ (x-3)^2 - 1, & \text{если } 2 < x \leq 5, \\ 5,5 - 0,5x, & \text{если } x > 5. \end{cases} \quad (1)$$

При каких значениях  $m$  график уравнения  $y = m$  имеет ровно три общие точки с графиком функции (1)?

*Решение:* Построим график (1).

$y = x$  и  $y = -0,5x + 5,5$  — прямые.

$y = (x-3)^2 - 1$  — парабола с вершиной  $(3; -1)$ .

График функции (1) изображен на рисунке 30.

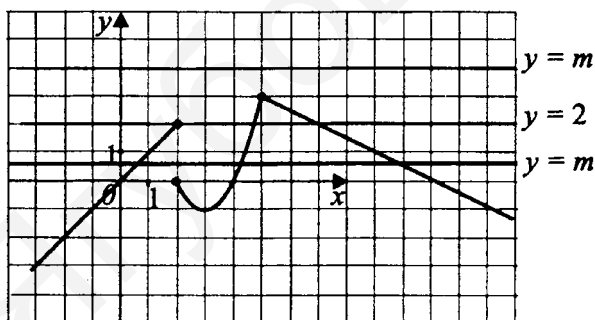


Рис. 30.

Прямые вида  $y = m$  параллельны оси абсцисс. По рисунку видно, что три общие точки графики имеют при  $m \in \{-1\} \cup [0; 2]$ .

*Ответ:*  $m \in \{-1\} \cup [0; 2]$ .

## Упражнения

3.19. Постройте график параболы  $y = ax^2$ , если:

а)  $a = -2$ ,

б)  $a = -1$ ,

- в)  $a = 1$ ,  
г)  $a = 0,5$ ,  
д)  $a = 3$ .

3.20. Постройте график уравнения  $y = -x^2 + a$ , если:

- а)  $a = 0$ ,  
б)  $a = -3$ ,  
в)  $a = 4$ .

3.21. Постройте график уравнения  $y = (x + a)^2 + 5$ , если:

- а)  $a = 0$ ,  
б)  $a = -3$ ,  
в)  $a = 4$ .

3.22. Постройте график уравнения  $y = |x| + a$ , если:

- а)  $a = 0$ ,  
б)  $a = -3$ ,  
в)  $a = 4$ .

3.23. Постройте график уравнения  $y = |x + a| - 5$ , если:

- а)  $a = 0$ ,  
б)  $a = -3$ ,  
в)  $a = 4$ .

3.24. Найдите значения параметра  $a$ , при котором система

$$\begin{cases} y - 2 = 6x - 3x^2, \\ x - 2 = a(y + 3) \end{cases} \text{ имеет ровно одно решение.}$$

3.25. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -x - 2, & \text{если } x < -1, \\ 2x - x^2 + 2, & \text{если } -1 \leq x < 2, \\ 2x - 4, & \text{если } x \geq 2. \end{cases} \quad (1)$$

При каких значениях  $p$  график уравнения  $y = p$  имеет ровно 3 общие точки с графиком функции (1)?

3.26. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -\frac{3}{x}, & \text{если } x \leq -1, \\ 2 - x, & \text{если } -1 < x < 3, \\ x^2 - 10x + 26, & \text{если } x \geq 3. \end{cases} \quad (2)$$

При каких значениях  $p$  график уравнения  $y = p$  имеет ровно 2 общие точки с графиком функции (2)?

3.27. Постройте график функции  $y = \frac{x^3 - 4x}{x + 2}$ . (3)

При каких значениях  $p$  график уравнения  $y = p$  имеет ровно 1 общую точку с графиком функции (3)?

## § 4. Квадратные уравнения с параметром

Напомним, что квадратным называют уравнение вида  $ax^2 + bx + c = 0$ , в котором  $a \neq 0$ . Если  $a = 0$ , то уравнение становится линейным. Если значения параметров  $b$  или  $c$  равны нулю, то уравнение называют неполным.

Решим неполное уравнение  $ax^2 + bx = 0$ ,  $b \neq 0$ . Вынесем за скобку общий множитель, получим  $x(ax + b) = 0$ . Уравнение равносильно совокупности  $\begin{cases} x = 0, \\ ax + b = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ x = -\frac{b}{a}. \end{cases}$  (На  $a$  можно разделить, так как  $a \neq 0$ ). Уравнение имеет два корня.

Решим неполное уравнение  $ax^2 + c = 0$ ,  $c \neq 0$ .  $ax^2 = -c$ ,  $x^2 = -\frac{c}{a}$ .

Если  $-\frac{c}{a} < 0$  (т.е.  $ac > 0$ ), то корней нет.

Если же  $-\frac{c}{a} > 0$  (т.е.  $ac < 0$ ), то  $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ .

Если же  $b = 0$  и  $c = 0$ , то уравнение сводится к виду  $ax^2 = 0$ . Это уравнение имеет единственный корень  $x = 0$ .

Рассмотрим теперь полное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $a \cdot b \cdot c \neq 0$  (то есть все коэффициенты отличны от нуля).

Тогда  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  (1), если  $b^2 - 4ac \geq 0$ ,

а если  $b^2 - 4ac < 0$ , то уравнение не имеет корней.

Выражение  $b^2 - 4ac$  называют дискриминантом квадратного уравнения и обозначают буквой  $D$ .

Итак, если  $D > 0$ , квадратное уравнение имеет два корня,  
если  $D = 0$ , один корень,  
если  $D < 0$ , корней нет.

Если квадратное уравнение неполное, то формула (1) для него справедлива, но её использование не целесообразно.

1. При каких значениях  $p$  уравнение  $x^2 + 3x - 2 = p$  имеет ровно один корень?

*Решение:* Это квадратное уравнение. Решим его двумя способами.

*I способ — аналитический.*

Запишем уравнение в виде  $x^2 + 3x - 2 - p = 0$ ,  $x^2 + 3x - (2 + p) = 0$ .  
Квадратное уравнение имеет один корень, если дискриминант равен нулю.  
 $D = 3^2 - 4 \cdot (-2 - p) = 9 + 8 + 4p = 4p + 17$ .

$$4p + 17 = 0, \quad p = -\frac{17}{4} = -4\frac{1}{4}.$$

*II способ — графический.*

Построим графики уравнений  $y = x^2 + 3x - 2$  и  $y = p$ .

Первый из них — уравнение параболы с вершиной

$x_0 = -\frac{3}{2}$ ,  $y_0 = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 2 = -4\frac{1}{4}$ , ветви которой направлены вверх.

Прямая  $y = p$  проходит параллельно оси  $Ox$  (см. рис. 31) и пересекают ось ординат в точке с координатами  $(0; p)$ .

Видим, что прямая и парабола имеют одну общую точку при  $p = -4\frac{1}{4}$ .

*Ответ:*  $-4\frac{1}{4}$ .

2. При каких значениях  $p$  два различных корня имеет уравнение

а)  $6x^2 - px = 0$ ;

б)  $x^2 + px - 8 = 0$ ;

в)  $9x^2 + px + 4 = 0$ ;

г)  $px^2 - 3 = 0$ ?

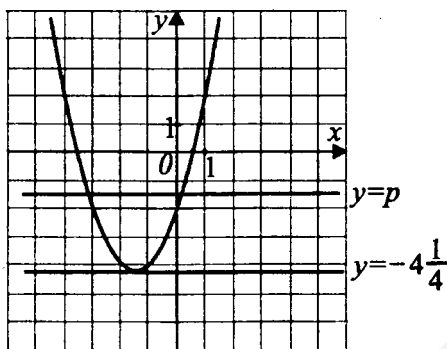


Рис. 31.

Решение:

$$а) 6x^2 - px = 0, x(6x - p) = 0, \begin{cases} x = 0, \\ 6x - p = 0; \end{cases} \quad x_1 = 0, x_2 = \frac{p}{6}.$$

Казалось бы, это уравнение при любом  $p$  имеет два корня. Но если  $x_1 = x_2$ , а это возможно при  $\frac{p}{6} = 0$ , то есть при  $p = 0$ , уравнение будет иметь только один корень. Значит, два корня уравнение имеет при  $p \neq 0$ .

б)  $x^2 + px - 8 = 0$ . Это квадратное уравнение при любом значении  $p$ . У него два корня, если дискриминант больше нуля.

$$D = p^2 - 4 \cdot (-8) = p^2 + 32.$$

Понятно, что  $p^2 \geq 0$ , тогда  $p^2 + 32 > 0$  при любом значении  $p$ .

в)  $9x^2 + px + 4 = 0$ . Аналогично предыдущему пункту, два корня в этом уравнении будет при  $D > 0$ .

$$D = p^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = p^2 - 12^2 = (p - 12) \cdot (p + 12).$$

$$(p - 12) \cdot (p + 12) > 0 \text{ при } p > 12 \text{ или } p < -12.$$

г)  $px^2 - 3 = 0$ . Рассмотрим случай, когда это уравнение не является квадратным, то есть  $p = 0$ . Оно превращается в неверное равенство  $0 - 3 = 0$ , значит корней не имеет.

Если  $p \neq 0$ , то  $x^2 = \frac{3}{p}$ . Это уравнение имеет два корня  $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{p}}$ , если

$$\frac{3}{p} > 0, \text{ что верно при } p > 0.$$

Ответ: а)  $p \neq 0$ , б)  $p$  — любое, в)  $p < -12$  или  $p > 12$ , г)  $p > 0$ .

3. При каких значениях параметра  $m$  уравнение  $mx^2 + 3x - 2 = 0$  имеет единственный корень?

*Решение:* При  $m = 0$  уравнение становится линейным  $3x - 2 = 0$ . Оно имеет единственный корень  $x = \frac{2}{3}$ .

При  $m \neq 0$  уравнение квадратное, оно имеет один корень при  $D = 0$ .

$$\text{Дискриминант } D = 3^2 - 4 \cdot m \cdot (-2) = 9 + 8m.$$

$$D = 0, \text{ если } 9 + 8m = 0, \text{ то есть } m = -\frac{9}{8}.$$

Значит, уравнение имеет единственный корень при  $m = 0$  и  $m = -\frac{9}{8}$ .

*Ответ:*  $0; -1\frac{1}{8}$ .

4. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(a - 8)x^2 + 2ax + a + 1 = 0$  имеет корни?

*Решение:* Если  $a - 8 = 0$  ( $a = 8$ ), то уравнение не является квадратным. Подставим  $a = 8$  в исходное уравнение  $16x + 8 + 1 = 0$ ,  $x = -\frac{9}{16}$  — корень уравнения.

Если  $a \neq 8$ , то уравнение имеет корни при  $D \geq 0$ .

$$D = (2a)^2 - 4 \cdot (a - 8) \cdot (a + 1) = 4a^2 - 4(a^2 - 7a - 8) = 28a + 32.$$

$D \geq 0$  при  $28a + 32 \geq 0$ , т.е.  $a \geq -\frac{32}{28}$ ,  $a \geq -1\frac{1}{7}$ . В этом случае мы должны были бы исключить  $a = 8$ , но при этом значении параметра уравнение тоже имеет корень, значит подойдут все  $a \geq -1\frac{1}{7}$ .

*Ответ:*  $\left[-1\frac{1}{7}; +\infty\right)$ .

5. Решите уравнение  $x^2 - 5px + 6p^2 = 0$ .

*Решение:*  $D = (5p)^2 - 4 \cdot 6p^2 = p^2$ .

$$x_{1,2} = \frac{5p \pm \sqrt{p^2}}{2}, \quad x_1 = \frac{5p + p}{2} = 3p, \quad x_2 = \frac{5p - p}{2} = 2p.$$

*Ответ:*  $3p, 2p$ .

6. Решите уравнение  $x^2 + 2px - x = p - p^2 + 6$ .

*Решение:* Преобразуем уравнение

$$x^2 + (2p - 1)x + p^2 - p - 6 = 0.$$

$$D = (2p - 1)^2 - 4(p^2 - p - 6) = 4p^2 - 4p + 1 - 4p^2 + 4p + 24 = 25,$$

$$x_1 = \frac{-(2p - 1) + \sqrt{25}}{2} = \frac{-2p + 6}{2} = 3 - p.$$

$$x_2 = \frac{-(2p - 1) - 5}{2} = \frac{-2p - 4}{2} = -p - 2.$$

*Ответ:*  $3 - p$ ,  $-p - 2$ .

7. Решите уравнение  $(p - 3)x^2 + (3p - 4)x - 4p + 7 = 0$ .

*Решение:* Если  $p - 3 \neq 0$ , т.е.  $p \neq 3$ , то

$$D = (3p - 4)^2 - 4(p - 3)(-4p + 7) = 9p^2 - 24p + 16 - 4(-4p^2 + 19p - 21) = \\ = 9p^2 - 24p + 16 + 16p^2 - 76p + 84 = 25p^2 - 100p + 100 = (5p - 10)^2.$$

$$x_{1,2} = \frac{-(3p - 4) \pm (5p - 10)}{2(p - 3)},$$

$$x_1 = \frac{-3p + 4 + 5p - 10}{2(p - 3)} = \frac{2p - 6}{2p - 6} = 1.$$

$$x_2 = \frac{-3p + 4 - 5p + 10}{2(p - 3)} = \frac{-8p + 14}{2(p - 3)} = \frac{-4p + 7}{p - 3}.$$

Если  $p = 3$ , то уравнение становится линейным,  $5x - 5 = 0$ ,  $x = 1$ .

*Ответ:* Если  $p = 3$ ,  $x = 1$ ;

если  $p \neq 3$ , то  $x = 1$ ,  $x = \frac{7 - 4p}{p - 3}$ .

8. Решите уравнение  $(p - 7)x^2 + x + 3 = 0$ .

*Решение:* Если  $(p - 7) = 0$ ,  $p = 7$ , то уравнение линейное  $x + 3 = 0$ ,  $x = -3$ .

Если  $p \neq 7$ , то уравнение квадратное. Найдём дискриминант квадратного уравнения.

$$D = 1^2 - 4(p - 7) \cdot 3 = 1 - 12p + 84 = 85 - 12p.$$

Если  $85 - 12p < 0$ ,  $p > \frac{85}{12}$ , то корней нет.



Если  $85 - 12p = 0$ ,  $p = \frac{85}{12}$ , то уравнение имеет один корень

$$x = -\frac{1}{2\left(\frac{85}{12} - 7\right)} = -6.$$

Если  $D > 0$ ,  $p < \frac{85}{12}$ , то  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{85 - 12p}}{2(p - 7)}$ .

Ответ: Если  $p = 7$ , то  $x = -3$ ;

если  $p = \frac{85}{12}$ , то  $x = -6$ ;

если  $p < \frac{85}{12}$ ,  $p \neq 7$ , то  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{85 - 12p}}{2(p - 7)}$ ;

если  $p > \frac{85}{12}$ , то корней нет.

9. Решите уравнение  $(a^2 - 1)x^2 + (3a - 3)x + 2a - 2 = 0$  при всех значениях параметра  $a$ .

Решение: Разберём несколько случаев.

1)  $a^2 - 1 \neq 0$ ,  $a \neq \pm 1$ . Тогда

$$D = (3a - 3)^2 - 4(a^2 - a)(2a - 2) = 9(a - 1)^2 - 4(a - 1)(a + 1) \cdot 2(a - 1) = \\ = (a - 1)^2 \cdot (9 - 8(a + 1)) = (a - 1)^2 \cdot (1 - 8a).$$

Т.к.  $a \neq 1$ ,  $(a - 1)^2 > 0$ . Учитывая это, получаем  $D < 0$  при  $1 - 8a < 0$ , то есть  $a > \frac{1}{8}$ .

При  $a \in \left(\frac{1}{8}; 1\right) \cup (1; +\infty)$  корней нет.

При  $a = \frac{1}{8}$  ( $D = 0$ ) уравнение имеет один корень

$$x = -\frac{(3a - 3)}{2(a^2 - 1)} = -\frac{3}{2(a + 1)} = -\frac{3}{2 \cdot \left(1 + \frac{1}{8}\right)} = -\frac{4}{3}.$$

При  $D > 0$ ,  $1 - 8a > 0$ ,  $a < \frac{1}{8}$ .

Уравнение имеет два корня.

$$x_{1,2} = \frac{-(3a-3) \pm \sqrt{(a-1)^2(1-8a)}}{2a^2-2}.$$

$$x_1 = \frac{-3(a-1) + (a-1)\sqrt{1-8a}}{2(a^2-1)} = \frac{-3 + \sqrt{1-8a}}{2(a+1)},$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{1-8a}}{2(a+1)}.$$

Нам осталось разобрать два случая:  $a = 1$  и  $a = -1$ .

При  $a = 1$  уравнение превращается в тождество  $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0$ . Его корнем будет любое действительное число.

При  $a = -1$  уравнение станет линейным  $(-3-3)x - 2 - 2 = 0$ ,  $-6x - 4 = 0$ ,  $x = -\frac{2}{3}$ .

Мы разобрали все возможные случаи и можно выписать ответ.

**Ответ:** Если  $a = 1$ ,  $x$  — любое число;

если  $a = -1$ ,  $x = -\frac{2}{3}$ ;

если  $a < -1$  или  $-1 < a < \frac{1}{8}$ , то  $x_{1,2} = -\frac{-3 \pm \sqrt{1-8a}}{2(a+1)}$ ;

если  $a = \frac{1}{8}$ , то  $x = -\frac{4}{3}$ ;

если  $\frac{1}{8} < a < 1$  или  $a > 1$ , то корней нет.

Давайте посмотрим, как можно было упростить решение, если заметить, что в левой части уравнения  $(a^2-1)x^2 + (3a-3)x + 2a-2 = 0$  есть общий множитель  $(a-1)$ .

Вынесем его за скобку.

$(a-1)((a+1)x^2 + 3x + 2) = 0$ . Очевидно, что при  $a = 1$  уравнение обращается в тождество при любом действительном  $x$ .

Если  $a \neq 1$ , получим уравнение  $(a+1)x^2 + 3x + 2 = 0$ .

При  $a = -1$  оно линейное вида  $3x + 2 = 0$ ,  $x = -\frac{2}{3}$ .

При  $a \neq -1$  оно квадратное, тогда его дискриминант  $D = 3^2 - 4(a+1) \cdot 2 = 9 - 8a - 8 = 1 - 8a$ .

Если  $D > 0$ ,  $1 - 8a > 0$ ,  $a < \frac{1}{8}$ , то корни уравнения  $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1 - 8a}}{2(a+1)}$ .

Если  $D = 0$ ,  $a = \frac{1}{8}$ , то  $x = -\frac{4}{3}$ .

Если  $D < 0$ ,  $a > \frac{1}{8}$ , то корней нет.

10. Найдите значения  $k$ , при которых прямая  $y = kx - 8$  и парабола  $y = x^2 + 5x - k$  имеют ровно одну общую точку.

*Решение:* Чтобы заданные парабола и прямая имели ровно одну общую точку, нужно, чтобы уравнение  $kx - 8 = x^2 + 5x - k$  имело ровно один корень.

Выполним преобразования.

$$x^2 - kx + 5x - k + 8 = 0,$$

$$x^2 - (k-5)x - k + 8 = 0;$$

Получившееся квадратное уравнение имеет единственный корень при  $D = 0$ .

Найдём дискриминант.

$$D = (k-5)^2 - 4 \cdot (-k+8) = k^2 - 10k + 25 + 4k - 32 = k^2 - 6k - 7.$$

$$k^2 - 6k - 7 = 0 \text{ при } k = -1, k = 7.$$

*Ответ:*  $-1$ ;  $7$ .

11. Найдите значение  $p$ , при котором парабола  $y = -3x^2 + px + 1$  и прямая  $y = 2x + p$  пересекаются в точке с абсциссой  $x = 3$ .

*Решение:* Если графики пересекаются, то их ординаты в точке пересечения равны. Получаем  $-3x^2 + px + 1 = 2x + p$ .

$$\text{Если } x = 3, \text{ то } -3 \cdot 3^2 + 3p + 1 = 2 \cdot 3 + p, 2p = 32, p = 16.$$

*Ответ:*  $16$ .

### Упражнения

4.1. При каких значениях параметра  $m$  уравнение  $3x^2 - 5x + 1 - m = 0$  имеет а) ровно один корень?

б) два корня?

4.2. При каких значениях параметра  $p$  два различных корня имеет уравнение:

а)  $2x^2 - px = 0$ ;

б)  $x^2 - px - 2 = 0$ ;

в)  $25x^2 - px + 9 = 0$ ;

г)  $px^2 + 18 = 0$ ?

4.3. При каких значениях параметра  $p$  уравнение  $px^2 - 2x + 4 = 0$  имеет единственный корень?

4.4. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(a+4)x^2 - 2ax + a - 3 = 0$  имеет корни?

Решите уравнения:

4.5.  $x^2 + 8px - 9p^2 = 0$ .

4.6.  $x^2 + (2a + 3)x + a^2 + 3a = 0$ .

4.7.  $x^2 + 5x - ax - 2a^2 - a + 6 = 0$ .

4.8.  $(p + 2)x^2 + (2p - 4)x - 3p - 2 = 0$ .

4.9.  $(p + 5)x^2 - x - 1 = 0$ .

4.10.  $(a^2 - 4)x^2 - (3a + 6)x - 5a - 10 = 0$ .

4.11. Найдите все значения  $k$ , при которых прямая  $y = kx + 3$  и парабола  $y = x^2 + 3x + k$  имеют ровно одну общую точку.

4.12. Найдите значение  $p$ , при котором прямая  $y = 2x - 3p$  и парабола  $y = 6x^2 - px - 5$  пересекаются в точке с абсциссой  $x = 2$ .

## § 5. Разложение квадратного трёхчлена на множители. Формулы Виета

### 1. Разложение квадратного трёхчлена на множители

Если квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет корни  $x_1$  и  $x_2$ , то трёхчлен  $ax^2 + bx + c$  можно разложить на множители следующим образом:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Если дискриминант соответствующего квадратного уравнения равен нулю, то в уравнении один корень  $x_1$  и  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ . Если при этом  $a > 0$ , то  $ax^2 + bx + c = (\sqrt{a}(x - x_1))^2$  и трёхчлен является полным квадратом.

1. Напишите квадратное уравнение, корнями которого являются числа 3 и  $5p$ .

*Решение:* Нам нужно написать любое квадратное уравнение, корни которого 3 и  $5p$ .

Напишем приведённое квадратное уравнение вида  $x^2 + bx + c = 0$ . Пусть  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 5p$ . Тогда  $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = (x - 3)(x - 5p) = x^2 - 3x - 5px + 15p = x^2 - (3 + 5p)x + 15p$ .

*Ответ:*  $x^2 - (3 + 5p)x + 15p = 0$ .

2. Найдите значение  $p$ , при котором уравнение  $2x^2 + 3px + 90 + p = 0$  имеет корни  $-p$  и  $-5$ .

*Решение:* Если квадратное уравнение имеет корни  $-p$  и  $-5$ , то его можно записать в виде  $a(x + p)(x + 5) = 0$ ,  $a(x^2 + (p + 5)x + 5p) = 0$ .

В искомом уравнении  $a = 2$ , тогда  $2x^2 + (2p + 10)x + 10p = 0$  — искомое. По условию  $2p + 10 = 3p$  и  $10p = p + 90$ .

Получим  $p = 10$ .

*Ответ:*  $p = 10$ .

3. При каких числовых значениях  $m$  выражение  $(4 - m)x^2 + (m + 2)x + m$  является полным квадратом?

*Решение:* Квадратный трёхчлен является полным квадратом, если его можно представить в виде  $(px + q)^2$  или (что то же самое) в виде  $a(x - x_0)^2$ , где  $a > 0$ . Значит, заданное выражение является полным квадратом, если  $4 - m > 0$  и при этом дискриминант  $D$  квадратного уравнения  $(4 - m)x^2 + (m + 2)x + m = 0$  равен нулю.

Найдём  $D$ .

$D = (m + 2)^2 - 4(4 - m) \cdot m = m^2 + 4m + 4 - 16m + 4m^2 = 5m^2 - 12m + 4$ .  
 $5m^2 - 12m + 4 = 0$ , если  $m = 2$  или  $m = \frac{2}{5}$ .

$4 - m > 0$  при  $m < 4$ . Очевидно, что оба значения  $m$  удовлетворяют требуемому условию.

Ответ:  $2; \frac{2}{5}$ .

## 2. Теорема Виета

Для приведённого квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$  (1), имеющего корни  $x_1$  и  $x_2$ , выполняются следующие формулы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q. \end{cases} \quad (2)$$

При этом, если дискриминант равен нулю, то считают  $x_1 = x_2$ .

Справедлива также теорема, обратная теореме Виета.

Если для чисел  $x_1, x_2, p, q$  справедливы формулы (2), то  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения (1) и других корней нет.

Для квадратного уравнения общего вида  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) с корнями  $x_1$  и  $x_2$  верны формулы Виета  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ , а также и обратная теорема Виета, аналогичная указанной выше.

4. Дано уравнение  $x^2 - (3p^2 - p + 2)x + 7p + 3 = 0$ . Известно, что сумма его корней равна 4. Найдите произведение его корней и число  $p$ .

**Решение:** По теореме Виета, если данное квадратное уравнение имеет корни  $x_1$  и  $x_2$ , то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3p^2 - p + 2, \\ x_1 x_2 = 7p + 3. \end{cases}$$

По условию  $x_1 + x_2 = 4$ , тогда  $3p^2 - p + 2 = 4$ ,  $3p^2 - p - 2 = 0$ ,  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = -\frac{2}{3}$ .

Если  $p = 1$ ,  $x_1 x_2 = 7 \cdot 1 + 3 = 10$ , если  $p = -\frac{2}{3}$ ,  $x_1 x_2 = 7 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 3 = -1\frac{2}{3}$ .

Однако мы не нашли  $x_1$  и  $x_2$ , а потому нельзя утверждать, что уравнение будет иметь вещественные корни при найденных значениях  $p$ . При  $p = 1$  уравнение  $x^2 - 4x + 10 = 0$  не имеет вещественных корней, при

$p = -\frac{2}{3}$  уравнение  $x^2 - 4x - \frac{5}{3} = 0$  имеет вещественные корни.

Ответ:  $x_1 x_2 = -1\frac{2}{3}$ ,  $p = -\frac{2}{3}$ .

5. При некотором значении параметра  $p$  корни квадратного уравнения  $5px^2 + (p^2 - 16)x - 2p + 1 = 0$  являются противоположными числами. Найдите эти корни и значения  $p$ .

Решение: По теореме Виета для корней уравнения  $x_1$  и  $x_2$  выполняется:  $x_1 + x_2 = -\frac{p^2 - 16}{5p}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{1 - 2p}{5p}$ , если  $p \neq 0$ . По условию  $x_2 = -x_1$ . Получаем  $x_1 + (-x_1) = 0$ ,  $x_1 x_2 = x_1(-x_1) = -x_1^2$ .

$$-\frac{(p^2 - 16)}{5p} = 0, \text{ тогда } p_1 = 4, p_2 = -4. \text{ Отсюда при } p = 4, \\ -x_1^2 = \frac{1 - 2p}{5p} = \frac{1 - 8}{20} = -\frac{7}{20}, x_1^2 = \frac{7}{20}, x_1 = \sqrt{\frac{7}{20}} \text{ или } x_1 = -\sqrt{\frac{7}{20}}.$$

$$\text{При } p = -4, -x_1^2 = \frac{1 - 2 \cdot (-4)}{5 \cdot (-4)} = -\frac{9}{20}, x_1^2 = \frac{9}{20}, x_1 = \frac{3}{\sqrt{20}} \text{ или } \\ x_1 = -\frac{3}{\sqrt{20}}.$$

Ответ: При  $p = -4$  корни  $\frac{3}{\sqrt{20}}$  и  $-\frac{3}{\sqrt{20}}$ ;

при  $p = 4$  корни  $\sqrt{\frac{7}{20}}$  и  $-\sqrt{\frac{7}{20}}$ .

6. Корни  $x_1$  и  $x_2$  квадратного уравнения  $x^2 + 4tx - 11t^2 = 0$  удовлетворяют условию  $x_1^2 + x_2^2 = 38$ . Найдите  $t$ .

Решение: По теореме Виета  $x_1 + x_2 = -4t$ ,  $x_1 x_2 = -11t^2$ . По условию  $x_1^2 + x_2^2 = 38$ . Выразим  $x_1^2 + x_2^2$  через  $x_1 + x_2$  и  $x_1 x_2$ .  
 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-4t)^2 - 2(-11t^2) = 16t^2 + 22t^2 = 38t^2$ ,  
 $38t^2 = 38$ ,  $t^2 = 1$ ,  $t_{1,2} = \pm 1$ . Очевидно, что при  $t = \pm 1$  уравнение имеет вещественные корни.

Ответ: 1; -1.

7. Разность корней уравнения  $2x^2 - 4x + p = 0$  равна 4. Найдите значение  $p$  и корни уравнения.

**Решение:** По теореме Виета  $x_1 + x_2 = -\frac{-4}{2}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{p}{2}$ . По условию

$$x_1 - x_2 = 4. \text{ Составим систему уравнений } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 x_2 = \frac{p}{2}, \\ x_1 - x_2 = 4. \end{cases}$$

Из системы  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$  найдем  $x_1 = 3$  и  $x_2 = -1$ .

Тогда  $\frac{p}{2} = 3 \cdot (-1)$ ,  $p = -3 \cdot 2 = -6$ .

**Ответ:**  $p = -6$ ,  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -1$ .

8. Напишите приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются  $p + 1$  и  $2p - 9$ .

**Решение:** Будем искать уравнение в виде  $x^2 + kx + q = 0$ , корни которого  $x_1$  и  $x_2$  удовлетворяют формулам Виета:  $x_1 + x_2 = -k$ ,  $x_1 x_2 = q$ .

По условию  $x_1 = p + 1$ ,  $x_2 = 2p - 9$ .

Получаем  $q = (p + 1)(2p - 9) = 2p^2 - 7p - 9$ ,

$-k = (p + 1) + (2p - 9) = 3p - 8$ ,  $k = 8 - 3p$ .

Искомое уравнение  $x^2 + (8 - 3p)x + 2p^2 - 7p - 9 = 0$ .

**Ответ:**  $x^2 + (8 - 3p)x + 2p^2 - 7p - 9 = 0$ .

### Упражнения

5.1. Напишите приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

а) 4 и  $p$

б)  $-8$  и  $p + 3$

в)  $p - 8$  и  $3p - 4$

г) 0 и  $8p$

5.2. Найдите значения параметра  $p$ , при которых уравнение

$3x^2 + (p + 6)x - 2p - 10 = 0$  имеет корни  $\frac{4}{3}$  и  $-p$ .



5.3. Дано уравнение  $x^2 + (6t^2 + t - 5)x + 8 - 3t = 0$ . Известно, что произведение его корней равно 2. Найдите число  $t$  и сумму его корней.

5.4. При каких значениях  $m$  выражение  $(m - 1)x^2 - (6 + 4m)x + 7m + 3 = 0$  является полным квадратом?

5.5. Дано уравнение  $x^2 + (6t^2 + t - 5)x + 3t + 2 = 0$ . Известно, что сумма его корней равна  $-2$ . Найдите число  $t$  и произведение его корней.

5.6. При некотором значении параметра  $p$  корни квадратного уравнения  $3px^2 + (p^2 - 25)x - 20 + p = 0$  являются противоположными числами. Найдите значение  $p$  и эти корни.

5.7. Корни  $x_1$  и  $x_2$  квадратного уравнения  $x^2 + 6mx + 8m^2 = 0$  удовлетворяют условию  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{3}{8}$ . Найдите  $m$ .

5.8. Один из корней уравнения  $6x^2 + 5px + 2p = 0$  в 4 раза меньше другого и не равен нулю. Найдите  $p$ .

5.9. Напишите приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются числа

а)  $2p$  и  $3p$ ;

б)  $p - 5$  и  $3p + 2$ ;

в)  $7p + 1$  и  $0$ .

## § 6. Расположение корней квадратного уравнения относительно заданных точек

Если в уравнении с параметром дискриминант оказывается полным квадратом, несложно найти корни уравнения и сопоставить их с заданной точкой (точками).

Разберём несколько подобных задач.

### 1. Поиск корней и ограничения

1. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых только один корень квадратного уравнения  $x^2 - (3p + 9)x + 30p - 10 = 0$  меньше 7.

*Решение:* Найдём корни данного уравнения.

$$D = (3p + 9)^2 - 4(30p - 10) = 9p^2 + 54p + 81 - 120p + 40 =$$

$$= 9p^2 - 66p + 121 = (3p - 11)^2. \quad x_1 = \frac{3p + 9 + (3p - 11)}{2} = \frac{6p - 2}{2} = 3p - 1,$$

$$x_2 = \frac{3p + 9 - (3p - 11)}{2} = \frac{20}{2} = 10.$$

Так как  $x_2 = 10 > 7$ , то  $x_1$  должен быть меньше 7, поскольку один из корней должен быть меньше семи.  $3p - 1 < 7$ ,  $3p < 8$ ,  $p < 2\frac{2}{3}$ .

Замечание: Поиск корней уравнения упрощается, если записать его в виде  $x^2 - ((3p - 1) + 10)x + 10(3p - 1) = 0$ . По теореме, обратной теореме Виета,  $x_1 = 3p - 1$ ,  $x_2 = 10$ .

Ответ:  $p < 2\frac{2}{3}$ .

2. Найдите все значения параметра  $m$ , при которых один из корней уравнения  $x^2 - (m + 3)x - 2m^2 + 3m + 2 = 0$  находится между числами 2 и 4, а второй — между числами  $-2$  и 1.

Решение: Данное квадратное уравнение имеет дискриминант  $D = (m + 3)^2 - 4 \cdot (-2m^2 + 3m + 2) = m^2 + 6m + 9 + 8m^2 - 12m - 8 = 9m^2 - 6m + 1 = (3m - 1)^2 \geq 0$ , поэтому его корни

$$x_1 = \frac{m + 3 + (3m - 1)}{2} = 2m + 1, \quad x_2 = \frac{m + 3 - (3m - 1)}{2} = -m + 2.$$

Мы не знаем, какой из корней больше, поэтому разберём два случая, чтобы найти искомые значения параметра.

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} 2 < 2m + 1 < 4, \\ -2 < -m + 2 < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < 2m < 3, \\ -4 < -m < -1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0,5 < m < 1,5, \\ 1 < m < 4; \end{cases} \\ & 1 < m < 1,5. \\ 2) & \begin{cases} 2 < -m + 2 < 4, \\ -2 < 2m + 1 < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < -m < 2, \\ -3 < 2m < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < m < 0, \\ -1,5 < m < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:  $-1,5 < m < 0$  или  $1 < m < 1,5$ .

Если поиск корней квадратного уравнения приводит к нахождению дискриминанта, который не является полным квадратом, то становится технически менее сложным не выписывать и решать неравенства относительно

но корней уравнения, а воспользоваться теоремой Виета или свойствами квадратичной функции.

## 2. Сравнение корней с нулём

1°. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ , ( $a \neq 0$ ). Если  $x_1 \cdot x_2 < 0$ , то  $x_1$  и  $x_2$  — числа разного знака. Другими словами, если  $\frac{c}{a} < 0$ , то данное уравнение имеет два корня, один из которых больше нуля, а другой меньше нуля.

Показать, что уравнение имеет корни при  $\frac{c}{a} < 0$  достаточно просто.

Так как  $\frac{c}{a} < 0$ , то и  $ac < 0$ , тогда дискриминант уравнения  $D = b^2 - 4ac > 0$ , и мы получили, что в уравнении два различных корня.

2°. Выясним, при каких условиях уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет два положительных корня.

В квадратном уравнении есть действительные корни, если  $D \geq 0$ . (Если корни должны быть разные, то  $D > 0$ ).

Рассмотрим числа  $x_1$  и  $x_2$ . Они положительны ( $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ ) только тогда, когда их сумма и произведение положительны, то есть  $x_1 \cdot x_2 > 0$  и  $x_1 + x_2 > 0$ . По теореме Виета  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ .

Получаем, что  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ , если 
$$\begin{cases} \frac{c}{a} > 0, \\ -\frac{b}{a} > 0, \\ D \geq 0. \end{cases}$$

Аналогично  $x_1 < 0$ ,  $x_2 < 0$ , если 
$$\begin{cases} \frac{c}{a} > 0, \\ -\frac{b}{a} < 0, \\ D \geq 0. \end{cases}$$

3. Найдите  $p$ , при которых корни уравнения  $3x^2 + (p+6)x + p = 0$ :

- а) разного знака (один положительный, другой — отрицательный);  
 б) положительные;  
 в) отрицательные.

*Решение:* Найдём дискриминант уравнения

$$D = (p+6)^2 - 12p = p^2 + 36.$$

Уравнение при любом значении  $p$  имеет два различных корня, т.к.  $D > 0$ .

а) Корни разного знака (один положительный, другой — отрицательный), если  $x_1 \cdot x_2 = \frac{p}{3} < 0$ , то есть при  $p < 0$ .

б) Оба корня положительные, если  $x_1 \cdot x_2 = \frac{p}{3} > 0$  и

$$x_1 + x_2 = -\frac{p+6}{3} > 0; \quad \begin{cases} p > 0, \\ p+6 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} p > 0, \\ p < -6; \end{cases} \quad \text{таких } p \text{ нет.}$$

в) Оба корня отрицательные, если

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{p}{3} > 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{p+6}{3} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} p > 0, \\ p+6 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} p > 0, \\ p > -6; \end{cases} \quad p > 0.$$

*Ответ:* а)  $p < 0$ ; б) нет таких  $p$ ; в)  $p > 0$ .

4. Найдите  $p$ , при которых корни уравнения  $x^2 - 6x - 5 - p = 0$  больше числа 2.

*Решение:* Найдём дискриминант.  $D = 36 - 4(-5 - p) = 56 + 4p$ . В условии не сказано, что должно быть два различных корня, поэтому  $D \geq 0$ .

Также необходимо, чтобы корни  $x_1$  и  $x_2$  удовлетворяли условиям  $x_1 > 2$ ,  $x_2 > 2$ .

Рассмотрим два числа  $x_1 - 2 > 0$  и  $x_2 - 2 > 0$ . Эти условия будут выполняться, если

$$\begin{cases} (x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0, \\ (x_1 - 2) + (x_2 - 2) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 > 0, \\ (x_1 + x_2) - 4 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Используя формулы Виета, получим  $x_1 + x_2 = 6$ ,  $x_1 \cdot x_2 = -5 - p$ . Подставим выражение для суммы и произведения в систему (1) и учтём условие  $D \geq 0$ .

$$\begin{cases} -5 - p - 2 \cdot 6 + 4 > 0, \\ 6 - 4 > 0, \\ 56 + 4p \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} p < -13, \\ p \geq -14; \end{cases} \quad -14 \leq p < -13.$$

Ответ:  $-14 \leq p < -13$ .

В этой задаче мы воспользовались сведением сравнения корней квадратного уравнения с некоторым числом к сравнению корней с нулём. К сожалению, этот метод работает только в том случае, если оба корня сравниваются с одним и тем же числом.

### 3. Расположение корней квадратичной функции

5. При каких значениях параметра  $a$  число 2 находится между корнями квадратного уравнения  $x^2 + (3a + 4)x + 2 - a = 0$ ?

*Решение:* Обозначим левую часть исходного уравнения через  $f(x)$ . Парабола  $y = f(x)$  должна пересекать ось абсцисс в двух точках  $x_1 < 2$  и  $x_2 > 2$ . Графически этот случай показан на рисунке 32.

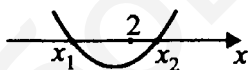


Рис. 32.

Видим, что если  $f(x) < 0$ , то при условии того, что ветви параболы направлены вверх, этого необходимо и достаточно для выполнения условия  $x_1 < 2 < x_2$ . Причём при этом обязательно будет два различных корня.

$$f(2) = 2^2 + (3a + 4) \cdot 2 + 2 - a = 14 + 5a. \quad 14 + 5a < 0, \quad a < -2,8.$$

Ответ:  $a < -2,8$ .

Запишем условия, при которых число  $\beta$  лежит между корнями квадратичной функции  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Достаточно рассмотреть два случая в зависимости от знака  $a$  (см. рис. 33).

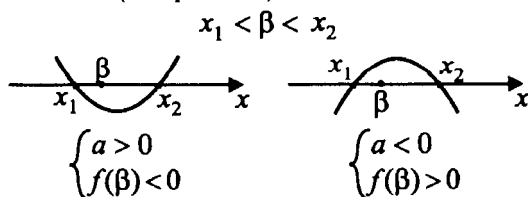


Рис. 33.

Совокупность этих двух систем равносильна неравенству  $a f(\beta) < 0$ .

Теперь найдём условия, при которых корни квадратичной функции принадлежат заданному промежутку, то есть  $\beta < x_1 < x_2 < \gamma$  для чисел  $\beta$  и  $\gamma$ .

Рассмотрим функцию  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , ( $a \neq 0$ ). Чтобы упростить рассуждения, умножим все коэффициенты на  $a$ . Тогда корни уравнения  $f(x) = 0$  будут совпадать с корнями уравнения  $a \cdot f(x) = 0$ , но ветви соответствующей параболы будут направлены вверх, так как  $a^2 > 0$ . Графическое представление условия  $\beta < x_1 < x_2 < \gamma$  на рисунке 34.

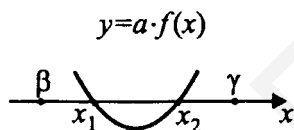


Рис. 34.

Чтобы корни были, нужно условие  $D > 0$  или  $D \geq 0$  (в зависимости от того, что сказано в условии о количестве корней). Чтобы корни принадлежали промежутку  $(\beta; \gamma)$ , должны выполняться условия.

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ a \cdot f(\beta) > 0, \\ a \cdot f(\gamma) > 0, \\ \beta < x_0 < \gamma; \end{cases}$$

здесь  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  — абсцисса вершины параболы.

Задач, связанных с расположением корней квадратичной функции, много, но если понять принцип, то практически любую из них можно решить подобным образом.

При этом важно помнить, что требование  $a \cdot f(\beta) < 0$  обеспечивает положение числа  $\beta$  между корнями, а  $a \cdot f(\beta) > 0$  обуславливает положение числа  $\beta$  вне промежутка между корнями (если корни есть). Положение вершины параболы  $x_0$  показывает, с какой стороны от числа  $\beta$  в этом случае находятся корни.

**6.** При каких значениях  $a$  любой корень уравнения  $x^2 + 6x + 5 = 0$  меньше любого корня уравнения  $(a - 3)x^2 + 2x - 1 = 0$ ?

**Решение:** Корнями уравнения  $x^2 + 6x + 5 = 0$  являются числа  $-1$  и  $-5$ . Значит, нам нужно, чтобы все корни второго уравнения были больше числа  $\beta = -1$ .

Рассмотрим  $f(x) = (a-3)x^2 + 2x - 1$ .

Если  $a-3 = 0$ , то  $x = 0,5$  и этот случай нам подходит. Обозначим через  $D$  дискриминант, а через  $x_0$  — абсциссу вершины параболы  $y = f(x)$ .

Если  $a-3 \neq 0$ , то уравнение квадратное и имеет корень, только если  $D \geq 0$ .  $-1 < x_1 < x_2$  (см. рис. 35), если  $\begin{cases} D \geq 0, \\ (a-3)f(-1) > 0, \\ x_0 > -1. \end{cases}$

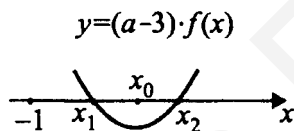


Рис. 35.

$$D = 4 - 4 \cdot (a-3) \cdot (-1) = 4a - 8, \quad f(-1) = (a-3) \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 1 = a - 6,$$

$$x_0 = -\frac{2}{2 \cdot (a-3)} = -\frac{1}{a-3}.$$

$$\begin{cases} 4a - 8 \geq 0, \\ (a-3)(a-6) > 0, \\ -\frac{1}{a-3} > -1; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq 2, \\ a < 3 \text{ или } a > 6, \\ 1 - \frac{1}{a-3} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \leq a < 3 \text{ или } a > 6 \\ \frac{a-4}{a-3} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \leq a < 3 \text{ или } a > 6 \\ a < 3 \text{ или } a > 4; \end{cases} \quad 2 \leq a < 3 \text{ или } a > 6.$$

Учитывая, что  $a = 3$  подходит, получаем  $2 \leq a \leq 3$  или  $a > 6$ .

**Ответ:**  $2 \leq a \leq 3$  или  $a > 6$ .

### Упражнения

**6.1.** Найдите все значения параметра  $p$ , при которых только один корень квадратного уравнения  $x^2 + (2p - 11)x + 24 - 6p = 0$  больше 2.

**6.2.** Найдите все значения параметра  $p$ , при которых один из корней уравнения  $x^2 - 2px - 3p^2 + 4p - 1 = 0$  находится между числами  $-2$  и  $0$ , а другой — между числами  $1$  и  $4$ .

**6.3.** Найдите все значения параметра  $p$ , при которых оба корня уравнения  $x^2 - (8p + 1)x + 7p^2 + 7p = 0$  меньше  $-12$ .

**6.4.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $5x^2 + (a + 2)x - a = 0$ :

- а) разного знака (один — положительный, другой — отрицательный),
- б) положительные,
- в) отрицательные.

**6.5.** Найдите все значения параметра  $p$ , при которых оба корня уравнения  $x^2 - 12x + p + 32 = 0$  меньше числа 7 и различны.

**6.6.** При каких значениях параметра  $a$  число 3 находится между корня-ми квадратного уравнения  $x^2 + (2a + 1)x - 12a - 3 = 0$ ?

**6.7.** При каких значениях параметра  $k$  число 2 находится между корня-ми уравнения  $kx^2 + 2x - 3 = 0$ ?

**6.8.** При каких значениях параметра  $a$  любой корень уравнения  $x^2 + 5x + 7 - 2p = 0$  больше числа  $-5$ ?

**6.9.** При каких значениях параметра  $p$  любой корень уравнения  $x^2 - 5x + 4 = 0$  больше любого корня уравнения  $(2 - p)x^2 - x - 5 = 0$ ?

## § 7. Использование свойств функций и алгебраических выражений

### 1. Использование симметрии алгебраических выражений

Иногда в задаче требуется единственность или нечётность числа корней уравнения. Допустим, мы при этом заметили, что в этой задаче выражения симметричны, то есть не меняются, например, при замене  $x$  на  $-x$  или, в случае присутствия двух переменных, при перемене местами  $x$  и  $y$  (график уравнения имеет ось симметрии  $y = x$ ). Возникает желание воспользоваться этой симметрией.

В таком случае полезно помнить, что если координаты некоторой точки  $A$  являются решением этой системы, то и координаты симметричной точки являются решением, и тогда для выполнения требования единственности решения необходимо (но не достаточно), чтобы точка  $A$  (решение) лежала на оси симметрии. При этом на оси симметрии может лежать не одна точка



из решения, или возможен случай, когда одна точка лежит на оси, а другие не лежат. То есть при использовании симметрии, как правило, необходима проверка.

7. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(2a - 3)x^4 + (a + 7)x^2 - 2a^2 - 14a = 0$  имеет единственное решение?

*Решение:* Заметим, что при замене  $x$  на  $-x$  уравнение не изменится, поэтому если  $x_0$  является корнем уравнения, то и  $-x_0$  тоже будет корнем. Значит, необходимое условие единственности корня следующее:  $x_0 = -x_0$ , то есть  $x_0 = 0$  — корень уравнения.

Подставим в уравнение  $x = 0$ .

$$-2a^2 - 14a = 0, \quad -2a(a + 7) = 0, \quad a = 0 \text{ или } a = -7.$$

Теперь нужно проверить, сколько корней при этих значениях  $a$ . Тот факт, что  $x = 0$  является корнем, ещё не означает, что других корней нет.

$$1) \ a = 0, \quad (2 \cdot 0 - 3)x^4 + (0 + 7)x^2 - 0 = 0, \quad -3x^4 + 7x^2 = 0, \\ x^2(7 - 3x^2) = 0, \quad \begin{cases} x^2 = 0, \\ 7 - 3x^2 = 0, \end{cases} \quad x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Получаем 3 корня.

$$2) \ a = -7, \quad (2 \cdot (-7) - 3)x^4 + 0 - 0 = 0, \quad -17x^4 = 0, \quad x = 0.$$

Получаем 1 корень.

Значит, корень единственный при  $a = -7$

*Ответ:*  $-7$ .

8. При каких значениях параметра  $a$  система  $\begin{cases} y = x^2 + 20a, \\ x = y^2 + 20a \end{cases}$  имеет единственное решение?

*Решение:* Заметим, что при одновременной замене  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$  система не меняется. Значит, вместе с каждым решением  $(x_0; y_0)$  система имеет решение  $(y_0; x_0)$ . Отсюда, необходимое условие единственности решения — существование решения вида  $x = y$  (и единственность решения такого вида).

При  $x = y$  получим уравнение  $x = x^2 + 20a, x^2 - x + 20a = 0$ . Оно имеет единственное решение, если дискриминант  $1 - 80a$  равен нулю. Имеем

$$a = \frac{1}{80}.$$

$$\text{При } a = \frac{1}{80} \text{ получаем } \begin{cases} y = x^2 + \frac{1}{4}, \\ x = y^2 + \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (1)$$

Сложим уравнения системы

$$x + y = x^2 + y^2 + \frac{1}{2},$$

$$x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{2} = 0,$$

$$4x^2 + 4y^2 - 4x - 4y + 2 = 0,$$

$$4x^2 - 4x + 1 + 4y^2 - 4y + 1 = 0,$$

$$(2x - 1)^2 + (2y - 1)^2 = 0.$$

Сумма двух неотрицательных выражений равна нулю только при условии, что каждое из них равно нулю:  $\begin{cases} 2x - 1 = 0, & \begin{cases} x = 0,5, \\ y = 0,5. \end{cases} \\ 2y - 1 = 0; \end{cases}$

Чтобы проверить, является ли пара  $(0,5; 0,5)$  решением системы (1), подставим это значение в любое из уравнений системы.  $0,5 = 0,5^2 + \frac{1}{4}$ ,

верно. Значит, при  $a = \frac{1}{80}$  исходная система имеет единственное решение.

Ответ:  $\frac{1}{80}$ .

## 2. Использование монотонности функций

Решение ряда задач можно упростить, если использовать некоторые свойства монотонных функций.

1) Если функция  $y = f(x)$  монотонная (то есть возрастает (убывает) при всех допустимых  $x$ ), то уравнение  $f(x) = a$  имеет не более одного корня (см. рис. 36).

2) Если функция  $y = f(x)$  возрастает, а функция  $y = g(x)$  убывает при всех допустимых  $x$ , то уравнение  $f(x) = g(x)$  имеет не более одного корня (см. рис. 37). Подчеркнем, что такие уравнения могут иметь единственный корень или вообще не иметь корней.

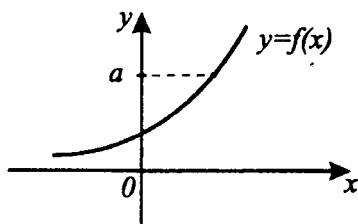


Рис. 36.

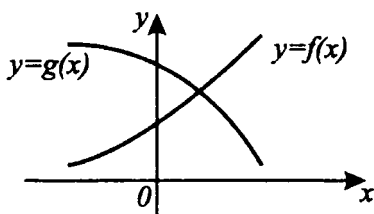


Рис. 37.

3) Сумма возрастающих функций — возрастающая функция.

9. Решите уравнение  $x^2 - a^4 = |a| - \sqrt{x}$  при всех значениях параметра  $a$ .

**Решение:** Запишем уравнение в виде  $x^2 + \sqrt{x} = a^4 + |a|$ . Заметим, что  $x = a^2$  — корень уравнения при любом значении  $a$ . Найдем ОДЗ:  $x \geq 0$ . При этих  $x$  функции  $y = x^2$  и  $y = \sqrt{x}$  возрастают, значит возрастает и их сумма  $y = x^2 + \sqrt{x}$ . Правая часть уравнения — число. Значит, это уравнение имеет единственное решение  $x = a^2$ .

**Ответ:**  $x = a^2$ .

10. При всех  $a > 0$  найдите корни уравнения  $\frac{a}{x} = x^2 - 2x + a + 1$ , удовлетворяющие условию  $x \geq 1$ .

**Решение:** Попробуем решить эту задачу графически.

$$\text{Перепишем условие } \begin{cases} a > 0, \\ y = \frac{a}{x}, \quad (1) \\ y = (x-1)^2 + a, \\ x \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

График уравнения (1) — гипербола, при  $a > 0$  её ветви расположены в I и III четвертях (см. рис. 38).

$y = (x-1)^2 + a$  — парабола, ветви которой направлены вверх, вершина расположена в точке  $(1; a)$ .

При  $x \geq 1$   $y = (x-1)^2 + a$  возрастает, а  $y = \frac{a}{x}$  убывает.

Значит, у них не более одной общей точки.

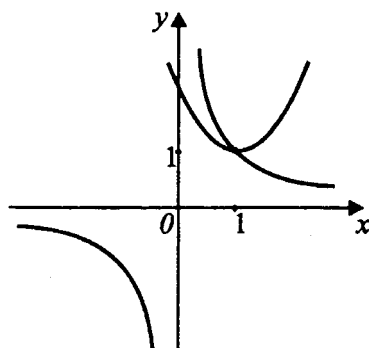


Рис. 38.

Заметим, что при  $x = 1$  значения этих двух функций совпадают. Значит,  $x = 1$  — единственный корень уравнения, удовлетворяющий заданному условию.

Ответ:  $x = 1$ .

### 3. Использование ОДЗ и оценка множества значений

Иногда после нахождения ОДЗ нам остаётся проверить, являются ли некоторые числа корнями уравнения.

11. Решите уравнение  $\sqrt{x-5} + (a-2)x = 7\sqrt{15-3x} + a^2 - 24$  при всех значениях параметра  $a$ .

Решение: Найдем ОДЗ.

$$\begin{cases} x - 5 \geq 0; \\ 15 - 3x \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 5; \\ x \leq 5; \end{cases} \quad x = 5.$$

Множество допустимых значений переменной  $x$  состоит из одного числа. Проверим, при каких  $a$  число 5 будет корнем уравнения.

$$\sqrt{5-5} + (a-2) \cdot 5 = 7\sqrt{15-3 \cdot 5} + a^2 - 24,$$

$$5a - 10 = a^2 - 24, \quad a^2 - 5a - 14 = 0, \quad a_1 = -2, \quad a_2 = 7.$$

При других  $a$  корней нет.

Ответ: Если  $a = -2$ ,  $a = 7$ , то  $x = 5$ ; если  $a \neq -2$ ,  $a \neq 7$ , то корней нет.

**Метод оценки** (использующий ограниченность некоторых выражений и функций) также позволяет легко решить некоторые задачи.

12. Найдите, при каких значениях  $m$  и  $n$  выражение  $n^2 + m^2 - 6m + 18n + 3$  принимает наименьшее значение. Какое это значение?

*Решение:* Обозначим через  $A$  и преобразуем заданное выражение.

$$\begin{aligned} A &= n^2 + 18n + m^2 - 6m + 3 = (n^2 + 18n + 81) - \\ &- 81 + (m^2 - 6m + 9) - 9 + 3 = (n + 9)^2 + (m - 3)^2 - 87. \end{aligned}$$

Полный квадрат некоторого выражения принимает наименьшее значение (нуль), если это выражение равно нулю. Так как  $(n + 9)^2 \geq 0$ ,  $(m - 3)^2 \geq 0$ , то  $A \geq -87$ , причём  $A = -87$ , только если

$$\begin{cases} n + 9 = 0, \\ m - 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} n = -9, \\ m = 3. \end{cases}$$

*Ответ:*  $n = -9$ ,  $m = 3$ ; наименьшее значение  $-87$ .

13. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $|x + 3a + 7| + (x - a + 15)^2 = 0$  имеет хотя бы один корень?

*Решение:*  $|x + 3a + 7| \geq 0$ ,  $(x - a + 15)^2 \geq 0$ .

Их сумма может быть равна нулю, только если оба эти выражения равны нулю.

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x + 3a + 7 = 0, \\ x - a + 15 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3a - 7, \\ 4a - 8 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2, \\ x = -13. \end{cases}$$

Исходное уравнение имеет корень при  $a = 2$ .

*Ответ:* 2.

## Упражнения

7.1. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(3a - 7)x^4 + (2 - a)x^2 - 4a + 2a^2 = 0$  имеет единственное решение?

7.2. При каких значениях параметра  $b$  система  $\begin{cases} 2y = 2x^2 + 5b, \\ 2x = 2y^2 + 5b \end{cases}$  имеет единственное решение?

7.3. Решите уравнение  $x^6 + 2x^4 - 2a^2 = |a|(a^2 + 3) - 3(\sqrt{x})^4$  при всех значениях параметра  $a$ .

7.4. Для всех положительных значений  $a$  найдите корни уравнения  $\frac{3a}{x} = x^2 - 4x + a + 3$ , удовлетворяющие условию  $x \geq 2$ .

7.5. Решите уравнение  $\sqrt{24 - 3x} + (p + 3)x = 2\sqrt{2x - 16} - p^2 - 2p$  при всех значениях параметра  $p$ .

7.6. Найдите, при каких значениях  $p$  и  $t$  выражение  $p^2 + 4t^2 - 8p + 4t + 1$  принимает наименьшее значение. Какое это значение?

7.7. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(x + 2a - 3)^2 + \sqrt{x + a - 1} = 0$  имеет хотя бы один корень?

7.8. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $(x + a^2)^2 + |3x - a + 4| + |9x + 16| = 0$  имеет корни.

## Ответы

### Решение линейных уравнений с параметром

- 1.1.  $x = 5a$ . 1.2.  $x = \frac{-7a + a^3 + 18}{8}$ . 1.3. Если  $a = -2$ , то корней нет; если  $a \neq -2$ , то  $x = \frac{7a}{a+2}$ . 1.4. Если  $a \neq \pm 1$ , то  $x = \frac{2}{1-a}$ ; если  $a = -1$ , то  $x$  — любое число; если  $a = 1$ , то корней нет. 1.5. Если  $a = 3$ , то  $x$  — любое число; если  $a = -1$ , то корней нет; если  $a \neq 3, a \neq -1$ , то  $x = \frac{a}{a+1}$ . 1.6.  $a = 5, -1\frac{1}{4} < a \leq -1$ . 1.7.  $a = 1, a = \frac{1}{2}$ . 1.8. Если  $a = 0$ , то решений нет; если  $a \neq 0$ , то  $x = 2, y = -\frac{1}{a}$ .

### Решение линейных неравенств с параметром

- 2.1.  $a \leq -2\frac{2}{3}$ . 2.2.  $x \geq \frac{3}{7}a + 7$ . 2.3.  $x > \frac{5a+8}{-4}$ . 2.4. Если  $a = -2$ ,  $x$  — любое число; если  $a > -2$ ,  $x > \frac{6a}{a+2}$ ; если  $a < -2$ ,  $x < \frac{6a}{a+2}$ . 2.5. Если  $a = \frac{2}{5}$ , нет решений; если  $a > \frac{2}{5}$ ,  $x \geq \frac{3a+1}{5a-2}$ ; если  $a < \frac{2}{5}$ ,  $x \leq \frac{3a+1}{5a-2}$ . 2.6.  $p = 6,5$ . 2.7.  $p \leq 5,2$ . 2.8.  $-2,2 < a \leq -0,2$ . 2.9. Если  $a < -6$ , то  $x < 11$ ; если  $a \geq -6$ , то  $x < 5 - a$ . 2.10.  $a \leq -2$ .

### Графики на плоскости $Oxy$

- 3.6.  $k = -3$ . 3.7.  $a = 11$ . 3.8. а)  $a = 0$ , б)  $a = 3$ . 3.9. а)  $a \neq 0, a \neq 10$ , б)  $a = 0$ . 3.10.  $a \leq -0,2, a \geq 3$ . 3.12.  $a = 0, a = \frac{8}{9}$ . 3.17.  $\pm 2; \pm 5; \pm \sqrt{29}$ . 3.18.  $-0,5; 0$ . 3.19.  $a > 1$ . 3.25.  $a = 0$ . 3.26.  $0 \leq p \leq 2, p = 3$ . 3.27.  $0 < p < 1, 3 < p \leq 5$ . 3.28.  $p = -1, p = 8$ .

### Квадратные уравнения с параметром

- 4.1. а)  $-1\frac{1}{12}$ ; б)  $m > -1\frac{1}{12}$ . 4.2. а)  $p \neq 0$ ; б) при любом  $p$ ; в)  $p > 30$  или  $p < -30$ ; г)  $p < 0$ . 4.3.  $p = 0, p = -3$ . 4.4.  $a \leq 12$ . 4.5.  $p, -9p$ . 4.6.  $-a$ ,

$-a - 3$ . 4.7.  $a + 2$ ,  $3 - 2a$ . 4.8. 1,  $\frac{-3p-2}{p+2}$ . 4.9. Если  $p = -5$ ,  $x = -1$ ;

если  $p < -5\frac{1}{4}$ , нет корней; если  $-5\frac{1}{4} < p < -5$ ,  $p > -5$ ,  $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4p+21}}{2(p+5)}$ .

4.10. Если  $a = -2$ , то  $x$  — любое число; если  $a = 2$ , то  $x = 1\frac{2}{3}$ ; если  $1,55 \leq a < 2$ ,

$a > 2$ ,  $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{20a-31}}{2(a-2)}$ ; если  $a < 1,55$ , то корней нет. 4.11.  $k = 3$ ,  $k = 7$ .

4.12.  $p = -15$ .

### Разложение квадратного трёхчлена на множители

5.1. а)  $x^2 - (4+p)x + 4p = 0$ ; б)  $x^2 + (5-p)x - 8p - 24 = 0$ ; в)  $x^2 + (12-4p)x + 3p^2 - 28p + 32 = 0$ ; г)  $x^2 - 8px = 0$ . 5.2.  $p = 5$ . 5.3.  $t = 2$ ,  $x_1 + x_2 = -21$ .

5.4.  $m = 6$ . 5.5.  $t = -\frac{7}{6}$ ,  $x_1x_2 = -1,5$ . 5.6. При  $p = 5$ ,  $x_{1,2} = \pm 1$ . 5.7.  $-2$ .

5.8. 3. 5.9. а)  $x^2 - 5px + 6p^2 = 0$ ; б)  $x^2 + (3-4p)x + 3p^2 - 13p - 10 = 0$ ;  
в)  $x^2 - (7p+1)x = 0$ .

### Расположение корней квадратного уравнения относительно заданных точек

6.1.  $p \geq 3$  и  $p = 2,5$ ; (указание: не забудьте рассмотреть случай  $D = 0$ ).  
6.2.  $-\frac{1}{3} < p < 0$ ;  $1 < p < \frac{5}{3}$ . 6.3.  $p < -13$ . 6.4. а)  $a > 0$ , б)  $a < -12 - \sqrt{140}$ ,  
в)  $-12 + \sqrt{140} < a < 0$ . 6.5.  $3 < p < 4$ . 6.6.  $a > 1,5$ . 6.7.  $-0,25 < k < 0$ .  
6.8.  $\frac{3}{8} \leq p < \frac{7}{2}$ . 6.9.  $a < -4$ ,  $2 < a \leq 2,05$ .

### Использование свойств функций и алгебраических выражений

7.1. 2. 7.2.  $\frac{1}{10}$ . 7.3. Если  $a \geq 0$ ,  $x = \sqrt{a}$ ; если  $a < 0$ ,  $x = \sqrt{-a}$ . 7.4.  $x = 3$ .  
7.5. Если  $p \neq -2$ ,  $p \neq 12$ , то корней нет; если  $p = -2$ ,  $p = 12$ , то  $x = 8$ . 7.6.  $p = 4$ ,  
 $t = -0,5$ , значение  $-16$ . 7.7.  $a = 2$ . 7.8.  $a = -1\frac{1}{3}$ .



Учебное издание

**Коннова Елена Генриевна**

**МАТЕМАТИКА. 9 КЛАСС  
ПОДГОТОВКА К ГИА. ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРОМ**

Под редакцией **Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова**

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка **В. Кириченко**

Компьютерная верстка **Г. Безуглова**

Корректор **Н. Коновалова**

Подписано в печать с оригинал-макета 06.02.2014.

Формат 60х84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага типографская.

Гарнитура Таймс. Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,72.

Тираж 5000 экз. Заказ № **20**.

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

**ООО «ЛЕГИОН»**

Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.

Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, ул. Согласия, 7.

[www.legionr.ru](http://www.legionr.ru) e-mail: [legionrus@legionrus.com](mailto:legionrus@legionrus.com)

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных  
диапозитивов в ЗАО «Полиграфобъединение»

347900, г. Таганрог, ул. Лесная биржа, 6В.