ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Глава 1. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Логарифм действительного числа

Пусть даны положительные действительные числа a и N. Требуется найти такое действительное число x, что $a^x = N$.

Теорема. *Для любой пары действительных чисел a и N таких, что $a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$, существует единственное число x такое, что $a^x = N$.*

О п р е д е л е н и е. Если $a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$, то действительное число x такое, что $a^x = N$, называется **логарифмом числа x по основанию a** и обозначается $x = \log_a N$.

При изучении свойств логарифмов следует обратить особое внимание на то, что все свойства логарифмов вытекают из соответствующих свойств степеней, и поэтому для хорошего знания логарифмов надо уметь свободно обращаться со степенями. Такая тесная связь логарифмов и степеней существует потому, что само определение логарифма дается через понятие степени.

Итак, по определению, при $a > 0$ и $a \neq 1$

$$x = \log_a N, \text{ если } a^x = N.$$

Следовательно, равенства $x = \log_a N$ и $a^x = N$ (при выполнении ограничений, наложенных на число a) выражают в точности одно и то же соотношение между числами x, a, N, записанное в первом случае «на языке логарифмов», а во втором – «на языке степеней».

Легко доказать, что *отрицательные числа и ноль ни при каком основании a* (разумеется, $a > 0$ и $a \neq 1$) *логарифмов не имеют*.

Действительно, если $N \leq 0$ и $x = \log_a N$, то $a^x = N \leq 0$, что противоречит свойству степеней с положительным основанием.

Естественно, каждый поступающий должен знать свойства логарифмов и, разумеется, уметь их доказывать. Прежде всего, отметим так называемое основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a N} = N,$$

справедливое для N и a – таких, что $N > 0$; $a > 0$, $a \neq 1$.

Ягубов Р.Ф.

Приведем формулы, наиболее часто применяемые при решении задач.

$$\log_a MN = \log_a M + \log_a N \quad (M > 0, N > 0). \tag{18}$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \quad (M > 0, N > 0). \tag{19}$$

$$\log_a N^{\alpha} = \alpha \log_a N \quad (N > 0,\ \alpha \text{ – любое число}). \tag{20}$$

$$\log_{\alpha^{\beta}} N^{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \log_a N \quad (N > 0,\ \beta \neq 0). \tag{21}$$

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b} \quad (N > 0). \tag{22}$$

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1. \tag{23}$$

Очень полезно помнить следующие два частных случая формулы (21):

$$\log_{\alpha^{\beta}} N = \frac{1}{\beta} \log_a N \quad (N > 0,\ \beta \neq 0). \tag{24}$$

$$\log_{\alpha^{\alpha}} N^{\alpha} = \log_a N \quad (N > 0,\ \beta \neq 0). \tag{25}$$

Формулы (18) – (23) успешно используются для преобразования различных выражений как с конкретными числами, так и с буквенными данными. Такие преобразования бывают необходимы прежде всего при решении уравнений и неравенств.

Однако для решения многих уравнений и неравенств приведенные формулы оказываются недостаточными. Например, у формул (18) – (21) недостатком является то, что левые и правые части в них имеют смысл при **разных** ограничениях на значения входящих букв.

Например, в формуле (18) $\log_a MN$ имеет смысл как в случае, когда числа M и N оба положительные, так и в случае, когда эти числа оба отрицательные. В противоположность этому правая часть формулы имеет смысл только при M и N больше нуля. Но это означает, что если преобразуя какое-нибудь уравнение, заменить логарифм произведения $M \cdot N$ на сумму логарифмов этих выражений, то, поскольку в правой части формулы (18) M и N могут быть только положительными, в результате такого преобразования можно потерять некоторые корни решаемого уравнения. Точно так же обстоит дело и с формулами (19) и (20).

По этим причинам при решении различных задач, содержащих неизвестные величины, пользуются более общими формулами:

$$\log_a MN = \log_a |M| + \log_a |N| \quad (MN > 0). \tag{26}$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a |M| - \log_a |N| \quad (MN > 0). \tag{27}$$

$$\log_a N^{2\kappa} = 2k \log_a |N| \quad (N \neq 0,\ k \text{ – целое число}). \tag{28}$$

$$\log_{\alpha^{2k}} N = \frac{1}{2k} \log_{|a|} N \quad (N > 0,\ k \neq 0 \text{ – целое число } a \neq 0,\ |a| \neq 1). \tag{29}$$

Следует заметить, что формулы (26) и (27) тоже страдают отмеченным выше недостатком: их левые и правые части имеют смысл при разных ограничениях на значения входящих в них букв. Именно, правые части имеют смысл при любых M и N, отличных от нуля, а левые части – лишь при M и N одинакового знака, т.е. подвержены более жестким ограничениям. Поэтому, например, при решении уравнений замена $\log_a MN$ на $\log_a |M| + \log_a |N|$ может привести к приобретению посторонних решений (но не к потере решений, как может случиться при использовании формул (18) – (21)).

Поскольку приобретение посторонних решений уравнения предпочтительнее, чем потеря (лишние решения можно отбросить путем проверки, а утерянные уже не найдешь!), то при преобразованиях буквенных выражений следует пользоваться именно формулами (26) – (29).

Приведем формулы, имеющие одинаковые области определения левых и правых частей:

$$\log_a |MN| = \log_a |M| + \log_a |N|. \tag{30}$$

$$\log_a \left|\frac{M}{N}\right| = \log_a |M| - \log_a |N|. \tag{31}$$

$$\log_a |N|^{\alpha} = \alpha \log_a |N|. \tag{32}$$

$$\log_{\alpha^{\beta}} |N|^{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} \log_a |N|. \tag{33}$$

Показательная функция

Показательная функция $y = a^x$ рассматривается только при $a > 0$ и $a \neq 1$.

Эта функция определена на всей оси Ox и всюду положительна: $a^x > 0$ при любом x. Это означает, что если x – дробное число, мы берем только арифметическое значение корня. Поэтому график показательной функции расположен над осью Ox; так как $a^0 = 1$, то линия проходит через точку $(0;1)$. Поведение показательной функции существенно зависит от того, будет $a > 1$ или $a < 1$.

Если $a>1$, то с увеличением показателя x увеличивается и y, причем неограниченное возрастание аргумента вызывает неограниченное же возрастание и функции.

Если $a<1$, то, наоборот, при неограниченном возрастании аргумента функция убывает и неограниченно приближается к нулю.

График показательной функции с основанием a симметричен относительно оси Oy показательной функции с основанием $1/a$. В самом деле, функцию $y=(1/a)^x$ можно записать так: $y=a^{-x}$, откуда видно, что для положительных x она принимает те же значения, что и функция $y=a^x$ для равных им по абсолютной величине отрицательных x, и наоборот. А это и означает, что графики функций $y=a^x$ и $y=(1/a)^x$ симметричны относительно оси ординат.

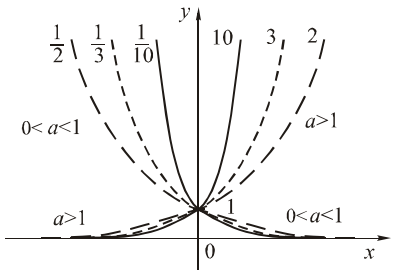


Рис. 1.1

На рис. 1.1 показаны графики показательных функций при $a=2$, 3, 10, $1/2$, $1/3$, $1/10$. Ось Ox служит асимптотой линий $y=a^x$.

Показательные функции встречаются в самых разнообразных задачах. При этом часто имеют дело с показательной функцией, в основании которой лежит специальное число e, играющее очень важную роль в математике; его приближенное значение равно 2,718.

Функцию $y=e^x$ называют *экспоненциальной*, а ее график – *экспонентой*, обозначается $y=\exp x$. Иногда функцию $y=a^x$ также называют экспоненциальной.

Логарифмическая функция

Логарифмическая функция $y=\log_a x$ обратна показательной функции $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$, поэтому легко построить ее график. Именно, перегнув рис. 11.1 по биссектрисе первого и третьего координатных углов, мы и получим графики логарифмических функций при тех же основаниях a (рис. 1.2).

Пользуясь этими графиками, опишем поведение логарифмической функции.

Прежде всего, мы видим, что логарифмическая функция определена на всей положительной полуоси Ox и не определена для отрицательных и нулевого значений независимой переменной. Все графики проходят через точку $(1;0)$, так как логарифм единицы всегда равен нулю.

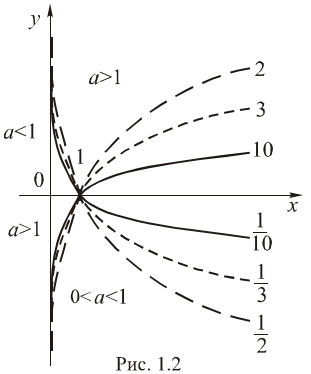


Рис. 1.2

Поведение логарифмической функции существенно зависит от того, будет ли $a>1$ или $0<a<1$.

В первом случае, когда $a>1$, логарифм во всем интервале $(0,\infty)$ – возрастающая функция, притом отрицательная в интервале $(0,1)$ и положительная в интервале $(1,\infty)$.

Во втором случае, когда $0<a<1$, логарифм во всем интервале $(0,\infty)$ – убывающая функция, притом положительная в интервале $(0,1)$ и отрицательная в интервале $(1,\infty)$.

График логарифмической функции с основанием a симметричен относительно оси Ox графику логарифмической функции с основанием $1/a$.

Принимая во внимание, что логарифмическая и показательная функции взаимно обратны, имеем

$$\log_a a^x = x \text{ и } a^{\log_a x} = x;$$

первое из этих равенств справедливо при любом x, второе – при $x>0$.

Пользуясь последним соотношением, всякую степенную функцию $y=x^n$ при $x>0$ с любым показателем n можно представить в виде сложной функции, составленной из показательной и логарифмической функций:

$$y=x^n=\left(a^{\log_a x}\right)^n=a^{n\log_a x}.$$

Логарифмы с основанием $a=10$ обозначают через $\lg x$ и называют *десятичными*, а с основанием $a=e$ – через $\ln x$ и называют *натуральными*.

Из свойств логарифмической функции следуют следующие свойства монотонности логарифмов.

Пусть $M>0$, $N>0$, тогда:

1) если $a>1$, то

а) из неравенства $M>N$ следует неравенство $\log_a M>\log_a N$, т.е. $M>N\Rightarrow\log_a M>\log_a N$;

б) из неравенства $\log_a M > \log_a N$ следует неравенство $M > N$.

Таким образом, если $a > 1$, то $M > N \Leftrightarrow \log_a M > \log_a N$;

2) если $0 < a < 1$, то

а) из неравенства $M > N$ следует неравенство $\log_a M < \log_a N$, т.е. $M > N \Rightarrow \log_a M < \log_a N$;

б) из неравенства $\log_a M < \log_a N$ следует неравенство $M > N$, т.е. $\log_a M < \log_a N \Rightarrow M > N$.

Таким образом, если $0 < a < 1$, то $M > N \Leftrightarrow \log_a M < \log_a N$.

Следовательно,

если $a > 1$ и $M > 1$, то $\log_a M > 0$;

если $a > 1$ и $0 < M < 1$, то $\log_a M < 0$;

если $0 < a < 1$ и $M > 1$, то $\log_a M < 0$;

если $0 < a < 1$ и $0 < M < 1$, то $\log_a M > 0$.

Из свойств 1 и 2 получаем еще одно свойство логарифмов:

3) равенство $\log_a M = \log_a N$ возможно только при $M = N$, т.е. $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$.

Глава 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Примеры

Вычислить:

1. $\log_{27} 81$.

□ $\dfrac{\log_3 81}{\log_3 27} = \dfrac{4}{3}$.

Ответ: $4/3$.

2. $\log_{12} 2 + \log_{12} 6$.

□ $\log_{12}(2 \cdot 6) = \log_{12} 12 = 1$.

Ответ: 1.

3. $\log_2\left(\dfrac{2}{3}\right) + \log_4\left(\dfrac{9}{4}\right)$.

□ $\log_2\left(\dfrac{2}{3}\right) + \log_4\left(\dfrac{9}{4}\right) = \log_2\left(\dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{\log_2\left(\dfrac{9}{4}\right)}{\log_2 4} = \log_2\left(\dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{9}{4}\right) =$

$= \log_2\left(\dfrac{2}{3}\right) + \dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \log_2\left(\dfrac{2}{3}\right) + \log_2\left(\dfrac{3}{2}\right) = \log_2\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{3}{2}\right)\right] = 0$.

Ответ: 0.

4. $A = \left(\sqrt[7]{1/27}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3} + \log_{9\sqrt{3}} 125}$.

□ На основании формулы (23) имеем $\dfrac{1}{5\log_5 3} = \dfrac{1}{5}\log_3 5$, а формула (21) дает $\log_{9\sqrt{3}} 125 = \dfrac{6}{5}\log_3 5$. Далее остается только использовать свойства степеней и основное логарифмическое тождество:

$$A = \left(3^{-3/7}\right)^{\frac{1}{5}\log_3 5 + \frac{6}{5}\log_3 5} = 3^{-\frac{3}{5}\log_3 5} = \left(3^{\log_3 5}\right)^{-\frac{3}{5}} = 5^{-\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{0{,}008}.$$

Ответ: $\sqrt[5]{0{,}008}$.

5. $B = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \ldots \log_{10} 9 \cdot \log_{11} 10$.

□ На основании формулы (22)

$$\log_3 2 = \frac{\log_{11} 2}{\log_{11} 3}; \quad \log_4 3 = \frac{\log_{11} 3}{\log_{11} 4}; \ldots; \quad \log_{10} 9 = \frac{\log_{11} 9}{\log_{11} 10}.$$

Отсюда $$B = \frac{\log_{11} 2}{\log_{11} 3}\frac{\log_{11} 3}{\log_{11} 4} \cdots \frac{\log_{11} 9}{\log_{11} 10}\log_{11} 10 = \log_{11} 2.$$

Ответ: $\log_{11} 2$.

Ягубов.рф

6. $\log_6 16$, ***если*** $\log_{12} 27 = a$.

☐ Применяя последовательно формулы (20), (23) и (18), получаем

$$\log_6 16 = 4\log_6 2 = \frac{4}{\log_2 6} = \frac{4}{1+\log_2 3}.$$

Теперь видно, что для вычисления $\log_6 16$ надо знать, чему равен $\log_2 3$. Найдем его из условия $\log_{12} 27 = a$. Применяя последовательно формулы (20), (23), (18) и (20), (23), имеем цепочку преобразований:

$$a = \log_{12} 27 = 3\log_{12} 3 = \frac{3}{\log_3 12} = \frac{3}{1+2\log_3 2} = \frac{3}{1+\dfrac{2}{\log_2 3}} = \frac{3\log_2 3}{2+\log_2 3}.$$

Отсюда $\log_2 3 = \dfrac{2a}{3-a}$ (отметим, что, очевидно, $a \neq 3$).

Окончательно имеем $\log_6 16 = \dfrac{4(3-a)}{3+a}$.

Ответ: $4\dfrac{3-a}{3+a}$.

7. ***Упростить выражение*** $\log_4 \dfrac{x^2}{4} - 2\log_4 x^4$ ***и вычислить затем его значение при*** $x = -2$.

☐ На этом примере хорошо видно, что вычисления по формулам (18) и (20)

$$\log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4 4x^4 = 2\log_4 x - \log_4 4 - 2\log_4 4 - 8\log_4 x = -3 - 6\log_4 x$$

ошибочны, ибо при $x = -2$ последнее выражение не имеет смысла, а исходное же имеет смысл и равно –6.

Это противоречие получилось потому, что формулы (18) и (20) применимы лишь при положительных значениях букв. Пользуясь же формулами (26) и (28), в которых значения букв могут быть и отрицательными, получаем

$$\log_4 \frac{x^2}{4} - 2\log_4 x^4 = 2\log_4 |x| - 1 - 2 - 8\log_4 |x| = -3 - 6\log_4 |x|.$$

При $x = -2$ последнее выражение равно –6.

Ответ: -6.

8. ***Известно, что*** $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$, $\log_7 2 = c$. ***Выразить через*** a, b ***и*** c ***логарифм по основанию*** 140 ***числа*** 63.

☐ По свойству логарифмов (формула (22))

$$\log_{140} 63 = \frac{\log_2 63}{\log_2 140} = \frac{\log_2 \left(7 \cdot 3^2\right)}{\log_2 \left(2^2 \cdot 5 \cdot 7\right)} = \frac{\log_2 7 + 2\log_2 3}{2 + \log_2 5 + \log_2 7}.$$

Заметим, что

$$\log_2 7 = \frac{1}{\log_7 2} = \frac{1}{c} \quad \text{и} \quad \log_2 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 2} = \log_3 5 \cdot \log_2 3 = ab.$$

Таким образом, $\log_{140} 63 = \dfrac{\dfrac{1}{c} + 2a}{2 + \dfrac{1}{c} + ab} = \dfrac{1 + 2ac}{2c + abc + 1}$.

Ответ: $\dfrac{1+2ac}{2c+abc+1}$.

Сравнить числа:

9. $\log_{13} 150$ ***и*** $\log_{17} 290$.

☐ Так как $\log_{13} 150 < \log_{13} 169 = \log_{13} 13^2 = 2$,

$\log_{17} 290 > \log_{17} 289 = \log_{17} 17^2 = 2$, то $\log_{13} 150 < \log_{17} 290$.

Ответ: $\log_{13} 150 < \log_{17} 290$.

10. $\log_{1/3} \dfrac{1}{80}$ ***и*** $\log_{1/2} \dfrac{1}{15+\sqrt{2}}$.

☐ Так как $\log_{1/3} \dfrac{1}{80} < \log_{1/3} \dfrac{1}{81} = 4$ и $15 + \sqrt{2} > 16$,

а $\log_{1/2} \dfrac{1}{15+\sqrt{2}} > \log_{1/2} \dfrac{1}{16} = 4$, то $\log_{1/3} \dfrac{1}{80} < \log_{1/2} \dfrac{1}{15+\sqrt{2}}$.

Ответ: $\log_{1/3} \dfrac{1}{80} < \log_{1/2} \dfrac{1}{15+\sqrt{2}}$.

11. $\log_3 4$ ***и*** $\log_5 6$.

☐ Рассмотрим числа $5\log_3 4$ и $5\log_5 6$. Так как

$5\log_3 4 = \log_3 4^5 = \log_3 1024 > \log_3 729 = \log_3 3^6 = 6$ и

$5\log_5 6 = \log_5 6^5 = \log_5 7776 < \log_5 15625 = \log_5 5^6 = 6$, то

$5\log_3 4 > 5\log_5 6$ и, следовательно, $\log_3 4 > \log_5 6$.

Ответ: $\log_3 4 > \log_5 6$.

12. ***Доказать, что*** $\log_9 10 > \lg 11$.

☐ Рассмотрим дробь $A = \dfrac{\lg 11}{\log_9 10}$. Ясно, что $A > 0$. Нужно доказать, что $A < 1$. Для этого достаточно доказать, что $\sqrt{A} < 1$.

ЯГУБОВ.РФ

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для чисел $\lg 11$ и $\lg 9$, получаем

$$\sqrt{A}=\sqrt{\frac{\lg 11}{\log_9 10}}=\sqrt{\lg 11\cdot\lg 9}\le\frac{\lg 11+\lg 9}{2}=\frac{\lg 99}{2}<\frac{\lg 100}{2}=1.$$

Таким образом, $\sqrt{A}<1$, и, следовательно, $\log_9 10>\lg 11$.

Аналогично можно доказать, что если $a>1$, то

$$\log_a(a+1)>\log_{a+1}(a+2).$$

13. ***Найти все числа a, для которых:***

а) $2\lg(a+3)=1$; б) $\lg(a+3)<\lg 2$.

□ а) Данное соотношение можно записать в виде

$$\lg(a+3)=\frac{1}{2},$$

откуда по определению логарифма получаем

$$a+3=\sqrt{10}\text{, т.е. } a=\sqrt{10}-3.$$

б) Все возможные значения a, удовлетворяющие данному условию, должны удовлетворять, с одной стороны (по определению логарифма), условию $a+3>0$, а с другой стороны (по свойству монотонности), условию $a+3<2$.

Таким образом, для определения числа a получаем систему

$$\begin{cases}a+3>0,\\ a+3<2,\end{cases}$$

откуда $-3<a<-1$.

Ответ: а) $a=\sqrt{10}-3$; б) $a\in(-3;-1)$.

Глава 3. РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение показательных уравнений основано на свойстве степеней: ***две степени с одним и тем же положительным и отличным от единицы основанием равны тогда и только тогда, когда равны их показатели***. Используя это свойство, уравнение

$$a^x=b\text{, где } a>0,\ a\ne 1,\ b>0,$$

следует решать так:

$$a^x=b\Leftrightarrow a^x=a^{\log_a b}\Leftrightarrow x=\log_a b.$$

Многие показательные уравнения решаются **методом приведения обеих частей уравнения к одному основанию**.

П р и м е р ы

Решить уравнения:

1. $4^x=8^{2x-3}$.

□ Поскольку $4^x=\left(2^2\right)^x=2^{2x}$, $8^{2x-3}=\left(2^3\right)^{2x-3}=2^{6x-9}$, то

$$2^{2x}=2^{6x-9}\Leftrightarrow 2x=6x-9\Leftrightarrow x=9/4.$$

Ответ: $\{9/4\}$.

2. $(0,4)^{x-1}=(6,25)^{6x-5}$.

□ Поскольку $(0,4)^{x-1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}$,

$$(6,25)^{6x-5}=\left(\frac{25}{4}\right)^{6x-5}=\left(\frac{5}{2}\right)^{12x-10}=\left(\frac{2}{5}\right)^{10-12x}\text{, то}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{10-12x}\Leftrightarrow x-1=10-12x\Leftrightarrow x=\frac{11}{13}.$$

Ответ: $\{11/13\}$.

При решении простейших показательных уравнений используется преобразование, состоящее в **вынесении общего множителя за скобки**.

3. $5^{2x+1}-3\cdot 5^{2x-1}=550$.

□ Вынесем в левой части уравнения выражение 5^{2x-1} за скобки, получим

$5^{2x-1}\left(5^2-3\right)=550\Leftrightarrow 5^{2x-1}=5^2\Leftrightarrow 2x-1=2\Leftrightarrow x=3/2$.

Ответ: $\{3/2\}$.

Ягубов.рф

4. $\sqrt{3^x}\,5^{x/2}=225$.

☐ Поскольку $\sqrt{3^x}\,5^{x/2}=3^{x/2}5^{x/2}=15^{x/2}$, то исходное уравнение равносильно уравнению

$$15^{x/2}=15^2,\ \text{т.е. } x=4.$$

Ответ: $\{4\}$.

Уравнения вида

$$\boxed{a^{f(x)}=1,\ a>0,\ a\neq 1}$$

равносильны уравнению $f(x)=0$.

5. $10^{x^2+x-2}=1$.

☐ Данное уравнение равносильно уравнению $x^2+x-2=0$.
Следовательно, данное уравнение имеет два корня: $x_1=-2,\ x_2=1$.

Ответ: $\{-2;1\}$.

6. $\sqrt{5-x}\left(3^{x^2-7,2x+3,9}-9\sqrt{3}\right)=0$.

☐ Область допустимых значений уравнения определяется условием $5-x\geq 0$, т.е. $x\leq 5$. При таких значениях x исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{5-x}=0,\\ 3^{x^2-7,2x+3,9}=9\sqrt{3}.\end{array}\right.$$

Из первого уравнения находим $x_1=5$.

Для решения второго уравнения преобразуем его правую часть:

$$9\sqrt{3}=3^2\cdot 3^{1/2}=3^{2,5}.$$

Таким образом, второе уравнение совокупности равносильно уравнению

$$x^2-7,2x+3,9=2,5,\ \text{т.е. } x^2-7,2x+1,4=0.$$

Отсюда находим: $x_2=\frac{1}{5}$, $x_3=7$.

Области допустимых значений уравнения принадлежит только число $1/5$. Следовательно, решениями исходного уравнения являются числа 5 и $1/5$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{5};5\right\}$.

7. $3^{2x-1}5^{3x+2}=\left(\frac{9}{5}\right)5^{2x}3^{3x}$.

☐ В данном уравнении имеется два различных основания степеней. Разделив обе части уравнения на положительную величину $\left(\frac{9}{5}\right)5^{2x}3^{3x}$, получим уравнение

$$\frac{3^{2x-1}5^{3x+2}}{\left(\frac{9}{5}\right)5^{2x}3^{3x}}=1\Leftrightarrow 5^{x+3}\cdot 3^{-x-3}=1.$$

Последнее уравнение равносильно уравнению

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x+3}=\left(\frac{5}{3}\right)^0;$$

отсюда $x+3=0$, т.е. $x=-3$.

Ответ: $\{-3\}$.

8. $4^x-3^{x-1/2}=3^{x+1/2}-2^{2x-1}$.

☐ Сгруппируем члены, содержащие степени с основанием 4 и с основанием 3:

$$4^x+\left(\frac{1}{2}\right)4^x=3^{x+1/2}+3^{x-1/2}.$$

Вынесем общие множители за скобки:

$$4^x\left(1+\frac{1}{2}\right)=3^{x-1/2}(1+3).$$

Разделим это уравнение на выражение в его правой части, получим

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{x-3/2}=1.$$

Отсюда $x-\frac{3}{2}=0$; следовательно, $x=\frac{3}{2}$ – единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $\{3/2\}$.

Уравнения вида

$$\boxed{f\left(a^x\right)=0}$$

при помощи замены переменной $t=a^x$ сводятся к решению равносильных ему совокупности простейших показательных уравнений:

$$a^x=t_1,\ a^x=t_2,\ldots,\ a^x=t_k,$$

где $t_1,\ t_2,\ldots,\ t_k$ – все корни уравнения $f(t)=0$.

Так, например, уравнение

$$Aa^{2x} + Ba^{x} + C = 0,$$

где A, B, C – некоторые числа, $a > 0$, $a \neq 1$, сводится к решению равносильной ему совокупности уравнений

$$a^{x} = t_1,\ a^{x} = t_2,$$

где t_1, t_2 – корни уравнения $At^2 + Bt + C = 0$.

9. $5^{2x} - 2 \cdot 5^{x} - 15 = 0$.

□ Пусть $t = 5^{x}$. Тогда $t^2 - 2t - 15 = 0$. Отсюда находим $t_1 = 5$, $t_2 = -3$. Таким образом, данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$5^{x} = 5,\quad 5^{x} = -3.$$

Второе уравнение этой совокупности корней не имеет, так как $-3 < 0$, а $5^{x} > 0$ при любом x; из первого уравнения находим, что $x = 1$ – единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $\{1\}$.

Уравнения вида

$$\boxed{a^{f(x)} = b}$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, могут быть решены при помощи логарифмирования обеих частей (это возможно, так как обе части уравнения положительны). Логарифмируя, получаем уравнение

$$f(x) = \log_a b,$$

равносильное исходному уравнению.

10. $5^{2x-1} = 7^{3-x}$.

□ Обе части уравнения положительны; поэтому можно прологарифмировать его по основанию 5. Получим уравнение

$$2x - 1 = (3 - x)\log_5 7,$$

равносильное исходному.

Таким образом,

$$x(2 + \log_5 7) = 1 + 3\log_5 7,\quad x = \frac{1 + 3\log_5 7}{2 + \log_5 7}.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{1 + 3\log_5 7}{2 + \log_5 7}\right\}$.

11. $8^{2/x} - 2^{(3x+3)/x} + 12 = 0$.

□ Поскольку $2^{(3x+3)/x} = 2^{3+3/x} = 8 \cdot 2^{3/x} = 8 \cdot \left(2^3\right)^{1/x} = 8 \cdot 8^{1/x}$,

то исходное уравнение равносильно уравнению

$$8^{2/x} - 8 \cdot 8^{1/x} + 12 = 0.$$

Положим $8^{1/x} = t$; тогда полученное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$8^{1/x} = 6,\quad 8^{1/x} = 2,$$

где числа 6 и 2 – корни квадратного уравнения

$$t^2 - 8t + 12 = 0.$$

Из этой совокупности находим два корня исходного уравнения:

$$x_1 = 3\log_6 2,\ x_2 = 3.$$

Ответ: $\{3\log_6 2; 3\}$.

Решение показательных уравнений, в которых имеется три степени с различными основаниями, являющихся последовательными членами геометрической прогрессии, причем эти основания возводятся в одну и ту же зависящую от x степень, сводится к решению квадратных уравнений. Такие уравнения имеют вид

$$\alpha a^{f(x)} + \beta b^{f(x)} + \gamma c^{f(x)} = 0,$$

где $\alpha \neq 0$, β, γ – действительные числа, $f(x)$ – некоторая функция, а основания a, b и c удовлетворяют условию $b^2 = ac$.

Уравнения такого типа сводятся к решению квадратного уравнения $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$, полученного делением на любое выражение $a^{f(x)}$, $b^{f(x)}$ или $c^{f(x)}$ (лучше делите на выражение с меньшим основанием).

12. $3 \cdot 16^{x} + 37 \cdot 36^{x} = 26 \cdot 81^{x}$.

□ В этом уравнении числа 16, 36, 81 образуют три последовательных члена геометрической прогрессии со знаменателем $9/4$.

Для решения исходного уравнения разделим обе части на 81^{x}. Получим

$$3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} + 37 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{x} - 26 = 0.$$

Пусть $t = (4/9)^{x}$; тогда уравнение принимает вид

$$3t^2 + 37t - 26 = 0,$$

откуда $t_1 = 2/3$ и $t_2 = -13$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности двух показательных уравнений:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}, \quad \left(\frac{4}{9}\right)^x = -13.$$

Второе уравнение этой совокупности решения не имеет.

Из уравнения $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}$, т.е. уравнения $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}$,

находим единственный корень исходного уравнения: $x = 1/2$.

Ответ: $\{1/2\}$.

13. $3^{2x^2+6x-9} + 4 \cdot 15^{x^2+3x-5} = 3 \cdot 5^{2x^2+6x-9}$.

☐ Используя свойства степени, представим данное уравнение в виде

$$\frac{1}{3} \cdot 9^{x^2+3x-4} + \frac{4}{15} \cdot 15^{x^2+3x-4} = \frac{3}{5} 25^{x^2+3x-4}.$$

Разделим обе части этого уравнения на 15^{x^2+3x-4} и введем обозначение $y = \left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+3x-4}$. Получим уравнение $\frac{y}{3} + \frac{4}{15} = \frac{3}{5y}$,

которое имеет единственный положительный корень $y_1 = 1$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно

$$(3/5)^{x^2+3x-4} = 1, \text{ т.е. } x^2 + 3x - 4 = 0,$$

откуда следует, что множество всех решений уравнения состоит из двух чисел: -4 и 1.

Ответ: $\{-4; 1\}$.

Уравнения вида

$$\boxed{\alpha a^{f(x)} + \beta b^{f(x)} + c = 0}$$

где α, β, c – действительные числа, а основания a и b являются взаимно обратными положительными числами (т.е. $ab = 1$), можно решать следующим образом: ввести переменную $t = a^{f(x)}$ и, используя равенство $ab = 1$, преобразовать исходное уравнение:

$$\alpha t^2 + ct + \beta = 0.$$

Тогда исходное уравнение будет равносильно совокупности двух показательных уравнений:

$$a^{f(x)} = t_1, \quad a^{f(x)} = t_2,$$

где t_1, t_2 – корни преобразованного уравнения.

Если это уравнение решений не имеет, то и исходное уравнение также не имеет решений.

14. $3^{2x^2-6x+3} + 6^{x^2-3x+1} = 2^{2x^2-6x+3}$.

☐ Данное уравнение равносильно уравнению

$$27 \cdot 3^{2\left(x^2-3x\right)} + 6 \cdot 3^{x^2-3x} 2^{x^2-3x} - 8 \cdot 2^{2\left(x^2-3x\right)} = 0,$$

решение которого сводится к решению однородного уравнения

$$27 f^2(x) + 6 f(x) g(x) - 8 g^2(x) = 0,$$

где $f(x) = 3^{x^2-3x}$, $g(x) = 2^{x^2-3x}$.

Поскольку $2^{x^2-3x} > 0$, то уравнение можно разделить на $2^{2(x^2-3x)}$. Тогда получим уравнение

$$27\left(\frac{3}{2}\right)^{2\left(x^2-3x\right)} + 6\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x} - 8 = 0,$$

равносильное исходному.

Пусть $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x}$; тогда из уравнения $27t^2 + 6t - 8 = 0$ находим, $t_1 = -\frac{2}{3}$, $t_2 = \frac{4}{9}$. Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-3x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}, \text{ т.е. } x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Отсюда находим: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ – корни исходного уравнения.

Ответ: $\{1; 2\}$.

Некоторые показательные уравнения содержат выражения вида

$$f(x)^{g(x)}.$$

По определению считаем, что $f(x)^{g(x)} = 10^{g(x)\lg f(x)}$; поэтому функция $f(x)^{g(x)}$ имеет смысл лишь тогда, когда определены обе функции $f(x)$ и $g(x)$ и $f(x) > 0$.

15. $5 \cdot 2^{3x-3} - 3 \cdot 2^{5-3x} + 7 = 0$.

☐ Используя свойства степени, перепишем данное уравнение в виде

$$\frac{5}{8} \cdot 2^{3x} - \frac{96}{2^{3x}} + 7 = 0.$$

Пусть $t = 2^{3x}$; тогда $\frac{5}{8}t - \frac{96}{t} + 7 = 0$, т.е. $5t^2 + 56t - 768 = 0$.

Отсюда находим: $t_1 = \frac{-96}{5}$, $t_2 = 8$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно равенству

$$2^{3x}=8,$$

откуда $x=1$.

Ответ: $\{1\}$.

16. $3^x\cdot 8^{x/(x+1)}=36$.

□ Имеем: $3^x\cdot 2^{3x/(x+1)}=3^2\cdot 2^2 \Leftrightarrow 3^{x-2}\cdot 2^{3x/(x+1)-2}=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{x-2}\cdot 2^{(x-2)/(x+1)}=1\Leftrightarrow \left(3\cdot 2^{1/(x+1)}\right)^{x-2}=1$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению

$$10^{(x-2)\lg\left(3\cdot 2^{1/(1+x)}\right)}=1;\quad \text{откуда } (x-2)\lg\left(3\cdot 2^{1/(x+1)}\right)=0.$$

Итак, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x-2=0,\quad \lg\left(3\cdot 2^{1/(x+1)}\right)=0,$$

решая которую, находим два корня: $x_1=2,\ x_2=-1-\lg_3 2$.

Ответ: $\{-1-\lg_3 2;\ 2\}$.

17. $x^{\sqrt[3]{x^2}}=\left(\sqrt{x}\right)^x$.

□ Область допустимых значений данного уравнения определяется условием $x>0$. При положительных x уравнение равносильно

$10^{x^{2/3}\lg x}=10^{(x\lg x)/2}$, т.е. уравнению $\left(x^{2/3}-\dfrac{x}{2}\right)\lg x=0$.

Отсюда следует, что при $x>0$ исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\lg x=0,\quad x^{2/3}=\frac{x}{2},$$

решая которую, находим два корня: $x_1=8,\ x_2=1$.

Ответ: $\{8;1\}$.

18. ***Решить систему*** $\begin{cases}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-y}-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x-y}=\dfrac{65}{36},\\ xy-x+y=118.\end{cases}$

□ Обозначив $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-y}=t$, первое уравнение данной системы можно записать в виде $t-\dfrac{1}{t}=\dfrac{65}{36}$.

Это уравнение равносильно уравнению

$\dfrac{36t^2-65t-36}{36t}=0$, т.е. уравнению $\dfrac{36\left(t-\dfrac{9}{4}\right)\left(t+\dfrac{4}{9}\right)}{36t}=0$.

Поскольку $t>0$, то последнее уравнение имеет единственный корень – число $9/4$.

Итак, первое уравнение системы равносильно уравнению

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x-y}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$, т.е. уравнению $x-y=2$.

Поэтому исходная система равносильна системе

$$\begin{cases}x-y=2,\\ xy=120,\end{cases}$$

решением которой являются две упорядоченные пары чисел: $(12;10)$ и $(-10;-12)$.

Ответ: $\{(12;10);(-10;-12)\}$.

Показательные уравнения с параметром

19. ***Найти все значения*** a ***, при которых уравнение*** $4^x-a\cdot 2^x-a+3=0$ ***имеет хотя бы одно решение.***

□ Сделаем замену $2^x=t>0$; тогда исходное уравнение примет вид

$$t^2-at-a+3=0.$$

Для того чтобы исходное уравнение имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы квадратный трехчлен $t^2-at-a+3$ имел хотя бы один положительный корень, и, следовательно, дискриминант этого квадратного трехчлена должен быть неотрицательным. Поскольку

$$D=a^2-4(3-a)=a^2+4a-12=(a-2)(a+6),$$

то условие $D\ge 0$ выполняется при $a\ge 2$ и $a\le -6$.

Корни t_1 и t_2 квадратного уравнения $t^2-at-a+3=0$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}t_1t_2=3-a,\\ t_1+t_2=a.\end{cases}$$

При $a\le -6$ имеем $t_1t_2>0$, а $t_1+t_2<0$; поэтому оба корня t_1, t_2 отрицательны, и, следовательно, исходное уравнение корней не имеет.

ЯГУБОВ.РФ

При $a \geq 2$ имеем $t_1 + t_2 > 0$; следовательно, хотя бы один из корней t_1 или t_2 больше нуля.

Итак, при $a \geq 2$ данное уравнение имеет хотя бы одно решение.

Ответ: $a \geq 2$.

20. ***Найти все значения параметра*** p, ***при которых уравнение*** $(p-1)4^x - 4 \cdot 6^x + (p+2)9^x = 0$ ***имеет хотя бы одно решение.***

□ Разделив все члены уравнения на 4^x, получим $p - 1 - 4\left(\frac{3}{2}\right)^x + (p+2)\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 0$. Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0$, тогда $(p+2)t^2 - 4t + p - 1 = 0$. Если $p + 2 = 0$, т.е. $p = -2$, то уравнение вырождается в линейное и имеет корень $t = -\frac{3}{4} \not> 0$, т.е. при $p = -2$ нет решения.

При $p + 2 \neq 0$ найдем p, при которых уравнение $t^2 - \frac{4}{p+2}t + \frac{p-1}{p+2} = 0$ имеет хотя бы одно решение (решение по схеме «*A* минус *B*») (см. с. 92):

1) $D \geq 0$, $D = -p^2 - p + 6 \geq 0 \quad p \in [-3;2]$.

2) $\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{p}{2} < 0, \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \in [-3;2], \\ -\frac{p}{2} = \frac{4}{p+2} < 0, \\ f(0) = \frac{p-1}{p+2} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [-3;2] \\ p < -2, \\ \left[\begin{array}{l} p < -2, \\ p \geq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \quad p \in [-3;2)$.

Из первого отнимем второе, т.е. $[-3;2] \setminus [-3;-2) = [-2;2]$.

Ответ: $p \in [-2;2]$.

Глава 4. РЕШЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

Решение простейших показательных неравенств основано на свойствах монотонности степени:

$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)}, \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ a > 1, \end{cases}$ – неравенство показателей того же смысла,

$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)}, \\ 0 < a < 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ 0 < a < 1, \end{cases}$ – неравенство показателей противоположного смысла.

Учитывая эти свойства, многие простейшие показательные неравенства решаются методом приведения обеих частей неравенства к одному основанию.

П р и м е р ы

Решить неравенства:

1. $25^x > 125^{3x-2}$.

□ Поскольку $25^x = \left(5^2\right)^x = 5^{2x}$, $125^{3x-2} = \left(5^3\right)^{3x-2} = 5^{9x-6}$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$5^{2x} > 5^{9x-6} \Leftrightarrow 2x > 9x - 6 \Leftrightarrow x < 6/7.$$

Следовательно, промежуток $(-\infty; 6/7)$ есть множество всех решений исходного неравенства.

Ответ: $(-\infty; 6/7)$.

Решение любого нестрогого показательного неравенства отличается от решения соответствующего строгого неравенства только включением в множество всех его решений корней соответствующего уравнения.

2. $(0{,}1)^{4x^2-2x-2} \leq (0{,}1)^{2x-3}$.

□ Данное неравенство равносильно неравенству показателей противоположного смысла, т.е.

$$4x^2 - 2x - 2 \geq 2x - 3 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0.$$

Таким образом, исходному неравенству удовлетворяют все действительные числа.

Ответ: $x \in R$.

ЯгубовРФ

При решении некоторых показательных неравенств используется преобразование, состоящее в вынесении общего множителя за скобки.

3. $x^2 5^x - 5^{2+x} \le 0$.

□ Поскольку $5^{x+2} = 25 \cdot 5^x$, то данное неравенство равносильно неравенству $\left(x^2 - 25\right)5^x \le 0$.

Так как $5^x > 0$ при любом x, то полученное неравенство равносильно неравенству

$$x^2 - 25 \le 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+5) \le 0 \Leftrightarrow -5 \le x \le 5,$$

следовательно, отрезок $[-5;5]$ есть множество всех решений данного неравенства.

Ответ: $[-5;5]$.

4. $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$.

□ Поскольку

$$2^{x+2} = 4 \cdot 2^x,\ 2^{x+3} = 8 \cdot 2^x,\ 2^{x+4} = 16 \cdot 2^x,$$

$$5^{x+1} = 5 \cdot 5^x,\ 5^{x+2} = 25 \cdot 5^x,$$

то данное неравенство равносильно неравенству

$$2^x(4 - 8 - 16) > 5^x(5 - 25) \Leftrightarrow 2^x < 5^x \Leftrightarrow (2/5)^x < 2 \Leftrightarrow x > 0.$$

Таким образом, промежуток $(0;+\infty)$ есть множество всех решений данного неравенства.

Ответ: $(0;+\infty)$.

5. $3^{72}\left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 1$.

□ ОДЗ неравенства $x \ge 0$. Приводя левую часть неравенства к степени с основанием 3, получим

$$3^{72}\left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}} > 3^0.$$

Таким образом, данное неравенство равносильно неравенству $72 - x - \sqrt{x} > 0$, обозначим $\sqrt{x} = t \ge 0$, тогда

$$t^2 + t - 72 < 0 \Leftrightarrow (t+9)(t-8) < 0 \Leftrightarrow 0 \le t < 8.$$

Таким образом, данное неравенство равносильно двойному неравенству

$$0 \le \sqrt{x} < 8, \text{ откуда } 0 \le x < 64.$$

Итак, промежуток $[0;64)$ есть множество всех решений данного неравенства.

Ответ: $[0;64)$.

6. $\sqrt{6-x}\left(5^{x^2-7,2x+3,9} - 25\sqrt{5}\right) \ge 0$.

□ ОДЗ неравенства определяется условием $6 - x \ge 0$, т.е. $x \le 6$. Неравенство равносильно совокупности, состоящей из уравнения и системы двух неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{6-x} = 0, \\ \begin{cases} 5^{x^2-7,2+3,9} - 25\sqrt{5} \ge 0, \\ x < 6. \end{cases} \end{array}\right.$$

Из уравнения $\sqrt{6-x} = 0$ находим $x = 6$.

Поскольку $25\sqrt{5} = 5^2 \cdot 5^{1/2} = 5^{2,5}$, то первое неравенство системы равносильно неравенству

$$5^{x^2-7,2x+3,9} \ge 5^{2,5},$$

которое равносильно неравенству

$$x^2 - 7,2x + 3,9 \ge 2,5 \Leftrightarrow x^2 - 7,2x + 1,4 \ge 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{5}\right)(x-7) \ge 0.$$

Следовательно, первое неравенство системы равносильно совокупности простейших неравенств

$$\left[\begin{array}{l} x \le 1/5, \\ x \ge 7. \end{array}\right.$$

Учитывая условие $x < 6$, получаем решение системы – промежуток $-\infty < x \le 1/5$.

Следовательно, решениями исходного неравенства являются: число $x = 6$ и все числа промежутка $-\infty < x \le 1/5$.

Ответ: $(-\infty;1/5] \cup \{6\}$.

7. $\frac{1}{5} \cdot 5^{2x} 7^{3x+2} \le \frac{25}{7} \cdot 7^{2x} 5^{3x}$.

□ Разделив обе части неравенства на выражение $\frac{25}{7} \cdot 7^{2x} 5^{3x}$, положительное при любом действительном значении x, получаем неравенство

$$\frac{5^{2x-1} 7^{3x+2}}{5^2 7^{2x-1} 5^{3x}} \le 1,$$

равносильное исходному, т.е. неравенство $7^{x+3} 5^{-x-3} \le 1$.

Последнее неравенство равносильно неравенству

$$(7/5)^{x+3} \le (7/5)^0 \Leftrightarrow x + 3 \le 0 \Leftrightarrow x \le -3.$$

Итак, множество всех решений неравенства есть промежуток $(-\infty;-3]$.

Ответ: $(-\infty;-3]$.

8. $\dfrac{1}{2^x-1} > \dfrac{1}{1-2^{x-1}}$.

□ Обозначив $2^x = t > 0$, получим неравенство, равносильное исходному:

$$\frac{1-2^{-1}t-t+1}{(t-1)\left(1-2^{-1}t\right)} > 0.$$

$$\frac{2-\frac{t}{2}-t}{(t-1)\left(1-\frac{t}{2}\right)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\frac{3t}{2}}{(t-1)(2-t)} > 0 \frac{t-\frac{4}{3}}{(t-1)(t-2)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<t<\frac{4}{3}, \\ t>2. \end{array}\right.$$

Делая обратную замену, получим

$$\left[\begin{array}{l} 1<2^x<\frac{4}{3}, \\ 2^x>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<\log_2\frac{4}{3}, \\ x>1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0;\ \log_2\dfrac{4}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

Замечание. Нельзя переходить к неравенству $1-2^{x-1} > 2^x - 1$.

Неравенства вида

$$\boxed{f\left(a^x\right) \geq 0}$$

при помощи замены переменной $t = a^x$ сводятся к решению системы неравенств

$$\begin{cases} t>0, \\ f(t) \geq 0, \end{cases}$$

а затем к решению соответствующих простейших показательных неравенств. Так, например, неравенство

$$Aa^{2x} + Ba^x + C \leq 0,$$

где $A \neq 0$ и $a>0$, $a \neq 1$, заменой $t = a^x$ сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} t>0, \\ At^2 + Bt + C \leq 0. \end{cases}$$

Дискриминант квадратного трехчлена $At^2 + Bt + C$ $D = B^2 - 4AC$;

если $D<0$ и $A<0$, то второе неравенство системы верно при любом t, в том числе и при $t>0$; поэтому исходное неравенство верно при любом значении x;

если $D<0$ и $A>0$, то второе неравенство системы решений не имеет; следовательно, и исходное неравенство не имеет решений;

если $D \geq 0$ и t_1, t_2 – корни квадратного трехчлена $At^2 + Bt + C$ (пусть при этом $t_1 \leq t_2$), то:

а) при $A<0$ и $t_2 \leq 0$ система верна при любом $t>0$; следовательно, исходное неравенство верно при любом значении x;

б) при $A<0$ и $t_1 \leq 0$, $t_2 > 0$ система верна при $t > t_2$; следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $a^x \geq t_2$;

в) при $A<0$ и $t_1 \geq 0$ система равносильна совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 0<t\leq t_1, \\ t \geq t_2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^x \leq t_1, \\ a^x \geq t_2, \end{array}\right.$$

г) при $A>0$ и $t_2 \leq 0$ система, а следовательно, и исходное неравенство решений не имеют;

д) при $A>0$ и $t_1 \leq 0$, $t_2 > 0$ система равносильна неравенству $0 < t \leq t_2$; следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $a^x \leq t_2$;

е) при $A>0$ и $t_1 > 0$ система равносильна двойному неравенству $t_1 \leq t \leq t_2$; следовательно, исходное неравенство равносильно двойному неравенству $t_1 \leq a^x \leq t_2$, которое равносильно системе

$$\begin{cases} a^x \geq t_1, \\ a^x \leq t_2. \end{cases}$$

9. $4^{-x+0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

□ Обозначив $t = 2^{-x}$, получим

$$\begin{cases} t>0, \\ 2t^2 - 7t - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t>0, \\ 2\left(t+\frac{1}{2}\right)(t-4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<t<4,$$

следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству

$$2^{-x} < 4 \Leftrightarrow -x < 2 \Leftrightarrow x > -2.$$

Итак, промежуток $(-2;+\infty)$ есть множество всех решений исходного неравенства.

Ответ: $(-2;+\infty)$.

Неравенства вида

$$\boxed{a^{f(x)} \geq b}$$

где $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$, могут быть решены при помощи логарифмирования обеих частей (это возможно, так как обе части неравенства положительны). При всех $b \leq 0$ неравенство справедливо для любого значения x из ОДЗ неравенства.

Неравенства вида

$$\boxed{a^{f(x)} \leq b}$$

при $b \leq 0,\ a > 0,\ a \neq 1$ решений не имеют.

10. $3^{2x-1} < 11^{3-x}$.

□ Обе части неравенства положительны при любом значении x. Прологарифмировав обе части по основанию 3, получим неравенство

$$2x - 1 < (\log_3 11)(3 - x),$$

равносильное исходному.

Таким образом,

$$(2 + \log_3 11)x < 1 + 3\log_3 11.$$

Отсюда с учетом того, что $2 + \log_3 11 > 0$, находим все решения исходного неравенства – промежуток $-\infty < x < \dfrac{1 + 3\log_3 11}{2 + \log_3 11}$.

Ответ: $\left(-\infty; \dfrac{1 + 3\log_3 11}{2 + \log_3 11}\right)$.

Показательные неравенства вида

$\boxed{\alpha a^{f(x)} + \beta b^{f(x)} + \gamma c^{f(x)} \geq 0}$ или $\boxed{\alpha a^{f(x)} + \beta b^{f(x)} + \gamma c^{f(x)} \leq 0}$

где $\alpha \neq 0,\ \beta,\ \gamma$ – действительные числа, $f(x)$ – некоторая функция, а основания $a,\ b,\ c$ удовлетворяют условию $b^2 = ac$, т.е. $a,\ b,\ c$ – последовательные члены геометрической прогрессии, решаются делением на любое показательное выражение этого неравенства, но лучше с **меньшим** основанием.

11. $3 \cdot 7^{2x} + 37 \cdot 140^x \leq 26 \cdot 20^{2x}$.

□ Запишем неравенство в виде

$$3 \cdot 49^x + 37 \cdot 140^x - 26 \cdot 400^x \leq 0.$$

В этом неравенстве числа 49, 140 и 400 образуют три последовательных члена геометрической прогрессии со знаменателем $20/7$. Разделив обе его части на 400^x, получим неравенство

$3\left(\dfrac{7}{20}\right)^{2x} + 37\left(\dfrac{7}{20}\right)^x - 26 \leq 0$; обозначив $\left(\dfrac{7}{20}\right)^x = t > 0$, имеем

$$3t^2 + 37t - 26 \leq 0 \Leftrightarrow 3(t + 13)\left(t - \frac{2}{3}\right) \leq 0 \Leftrightarrow 0 < t \leq \frac{2}{3}.$$

Таким образом, исходное неравенство равносильно неравенству $(7/20)^x \leq 2/3$, откуда получаем $x \geq \log_{7/20}(2/3)$. Следовательно, промежуток $[\log_{7/20}(2/3); +\infty)$ является множеством всех решений исходного неравенства.

Обращаем ваше внимание, что при логарифмировании по основанию $7/20 < 1$ пришлось сменить смысл неравенства на противоположный. **Решите это же неравенство, разделив его на** 49^x; получите $(20/7)^x \geq 3/2$.

Ответ: $\left[\log_{7/20}\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$.

Неравенства вида

$$\boxed{\alpha a^{f(x)} + \beta b^{f(x)} + \gamma \geq 0}$$

где $\alpha \neq 0,\ \beta,\ \gamma$ – действительные числа, а основания a и b являются положительными взаимно обратными числами $(ab = 1)$, можно решать при помощи замены $t = a^{f(x)}$.

12. $10^{7x-1} + 6 \cdot 10^{1-7x} - 5 \leq 0$.

□ Используя свойства степени, перепишем данное неравенство в виде

$10^{7x-1} + \dfrac{6}{10^{7x-1}} - 5 \leq 0$; обозначив $10^{7x-1} = t > 0$, получим

$$t + \frac{6}{t} - 5 \leq 0 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq t \leq 3.$$

Таким образом, данное неравенство равносильно двойному неравенству $2 \leq 10^{7x-1} \leq 3$, откуда находим:

$$\frac{1}{7}(1 + \lg 2) \leq x \leq \frac{1}{7}(1 + \lg 3).$$

Ответ: $\left[\dfrac{\lg 20}{7}; \dfrac{\lg 30}{7}\right]$.

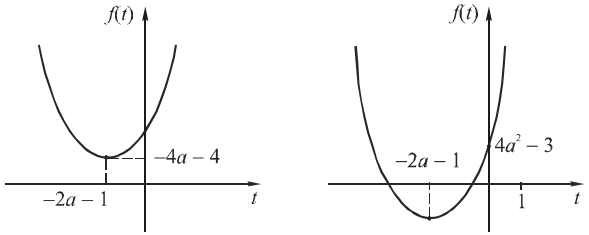
Показательные неравенства с параметром

13. ***Найти все значения*** a ***, при которых неравенство***

$4^{x^2}+2(2a+1)2^{x^2}+4a^2-3>0$ ***выполняется при любых*** $x\in\mathbb{R}$.

□ Пусть $2^{x^2}=t\ge 1$, тогда исходное неравенство перепишется в виде $t^2+2(2a+1)t+4a^2-3>0$.

При каждом *a* квадратному трехчлену $t^2+2(2a+1)t+4a^2-3$ на плоскости *XOY* соответствует парабола, ветви которой направлены вверх, осью симметрии служит прямая $t=-2a-1$, а вершиной является точка $(-2a-1;-4a-4)$. Если $-4a-4>0$, т.е. $a<-1$, то вершина параболы, а следовательно, и вся парабола, расположены в верхней полуплоскости (рис. слева). Это означает, что трехчлен положителен при любом *t*, а значит, и при $t\ge 1$. (Или справедливо условие $D\le 0$.)



Второе расположение параболы (рис. справа), отвечающее требованию задачи, определяется следующими условиями:

$$\begin{cases} D\ge 0, \\ -2a-1<1, \\ f(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=(2a+1)^2-4a^2+3\ge 0, \\ a>-1, \\ 4a^2+4a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -1, \\ a>-1 \\ a<-1 \text{ или } 0<a. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a\in(0;+\infty)$.

Ответ: $a\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$.

14. ***При каждом значении*** a ***указать, для каких*** x ***выполняется неравенство*** $a^2-9^{x+1}-8\cdot 3^x a>0$.

□ Если $a=0$, то исходное неравенство имеет вид $-9^{x+1}>0$ и не выполняется ни при каких *x*.

Пусть *a* – некоторое фиксированное число, отличное от нуля. Обозначив 3^x через *t*, исходное неравенство можно переписать так:

$$9t^2+8at-a^2<0 . \qquad (1)$$

Найдем корни трехчлена: $t_{1,2}=\dfrac{-4a\pm\sqrt{16a^2+9a^2}}{9}$;

$$t_1=\frac{-4a-5|a|}{9},\quad t_2=\frac{-4a+5|a|}{9}.$$

Видно, что при всех $a\ne 0$ $t_1<t_2$ и решениями неравенства (1) будут $t\in(t_1;t_2)$, т.е. $t_1<t<t_2$ или при $a>0$ $\dfrac{-4a-5a}{9}<3^x<\dfrac{-4a+5a}{9}\Rightarrow$

$\Rightarrow -a<3^x<\dfrac{1}{9}a\Rightarrow x<\log_3 a-2$.

При $a<0$ $\dfrac{-4a+5a}{9}<3^x<\dfrac{-4a-5a}{9}\Rightarrow \dfrac{a}{9}<3^x<-a\Rightarrow 3^x<-a\Rightarrow$

$\Rightarrow x<\log_3(-a)$.

Ответ: при $a<0$ $x<\log_3(-a)$; при $a=0$ решений нет;

при $a>0$ $x<\log_3 a-2$.

ЯГУБОВ.РФ

Глава 5. РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

Использование различных логарифмических формул в процессе преобразования уравнения может повлечь за собой как появление посторонних корней, так и потерю корней исходного уравнения.*)

Решение простейшего логарифмического уравнения

$$\log_a f(x) = b\,;\ a>0\,,\ a\neq 1$$

основано на следующем важном свойстве логарифмов: **логарифмы двух положительных чисел по одному и тому же положительному и отличному от единицы основанию равны тогда и только тогда, когда равны эти числа**.

Для уравнения вида

$$\boxed{\log_a f(x) = b\,;\ a>0\,,\ a\neq 1}$$

имеем $\log_a f(x) = \log_a a^b$, получаем равносильное уравнение $f(x) = a^b$.

Примеры

Решить уравнения:

1. $1-\lg 5 = \frac{1}{3}\left(\lg\frac{1}{2} + \lg x + \frac{1}{3}\lg 5\right)$.

□ Поскольку $1-\lg 5 = \lg 10 - \lg 5 = \lg 2$, $\lg\frac{1}{2} = -\lg 2$, то исходное уравнение равносильно уравнению $4\lg 2 - \frac{1}{3}\lg 5 = \lg x$, т.е. уравнению $\lg\frac{16}{\sqrt[3]{5}} = \lg x$. Отсюда получаем $x = 16/\sqrt[3]{5}$ – единственный корень данного уравнения.

Ответ: $\left\{16/\sqrt[3]{5}\right\}$.

2. $\log_{1/3}\left(-\frac{1}{x}\right) = 2$.

□ Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_{1/3}\left(-\frac{1}{x}\right) = \log_{1/3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2,$$

откуда $x = -9$. Число (-9) – единственный корень данного уравнения.

Ответ: $\{-9\}$.

*) Подробнее см. формулы 18-33 на с.546 - 547.

3. $\lg(2x-5)^2 = 0$.

□ Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\lg(2x-5)^2 = \lg 1\,,$$

т.е. уравнению $(2x-5)^2 = 1$, которое имеет два корня: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. Числа 2 и 3 являются множеством всех решений данного уравнения.

Ответ: $\{2;3\}$.

К простейшим логарифмическим уравнениям относятся также уравнения вида

$\boxed{\log_x A = B}$ $A>0$ или $\boxed{\log_x A = \log_x x^B,\ A = x^B}$, $\boxed{x = A^{1/B}}$

которые

при $A\neq 1$ и $B\neq 0$ **имеют единственный корень** $x = A^{1/B}$;

при $A=1$ и $B=0$ **имеют решением любое положительное, отличное от единицы, число**;

при $A=1$ и $B\neq 0$ **корней не имеют**;

при $A\neq 1$ и $B=0$ **корней не имеют**.

4. $0{,}2\log_x\frac{1}{32} = -0{,}5$.

□ Поскольку $\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$, то $\log_x\frac{1}{32} = 5\log_x\frac{1}{2}$, и следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_x\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\,,$$

откуда $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$. Число 4 – единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $\{4\}$.

5. $\log_{x-1} 3 = 2$.

□ Исходное уравнение равносильно уравнению

$$x-1 = 3^{1/2}\,,$$

откуда $x = 1+\sqrt{3}$. Число $1+\sqrt{3}$ – единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $\left\{1+\sqrt{3}\right\}$.

ДГУ ООВ РФ

6. $\log_{\log_3 x} 3 = 2$.

□ Область допустимых значений исходного уравнения определяется системой

$$\begin{cases} \log_3 x > 0, \\ \log_3 x \neq 1, \end{cases}$$

поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \log_3 x > 0, \\ \log_3 x \neq 1, \\ \log_3 x = 3^{1/2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3^{\sqrt{3}}.$$

Число $3^{\sqrt{3}}$ – единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $\left\{3^{\sqrt{3}}\right\}$.

Доказать, что не имеют решений уравнения:

7. $\log_3\left(3+\sqrt{x}\right) + \log_3\left(1+x^2\right) = 0$.

□ ОДЗ уравнения определяется неравенством $x \geq 0$. На ОДЗ имеем $3+\sqrt{x} \geq 3$ и $1+x^2 \geq 1$; следовательно, $\log_3\left(3+\sqrt{x}\right) \geq 1$ и $\log_3\left(1+x^2\right) \geq 0$. Сумма положительного числа и неотрицательного числа не равна нулю; поэтому исходное уравнение решений не имеет.

8. $\log_{1/3}\left(1+\sqrt{x}\right) + \log_{1/3}(1+x) = 2$.

□ ОДЗ уравнения состоит из всех неотрицательных значений x. На ОДЗ имеем $1+\sqrt{x} \geq 1$ и $1+x \geq 1$; поэтому $\log_{1/3}\left(1+\sqrt{x}\right) \leq 0$ и $\log_{1/3}(1+x) \leq 0$. Сумма двух неположительных чисел не может равняться положительному числу; поэтому исходное уравнение решений не имеет.

Сведение логарифмических уравнений к простейшим уравнениям, неравенствам, системам

Уравнения вида

$$\boxed{f\left(\log_a x\right) = 0,\ a > 0,\ a \neq 1}$$

равносильны совокупности уравнений

$$\log_a x = t_1,\ \log_a x = t_2,\ \ldots,\ \log_a x = t_n,$$

где $t_1,\ t_2, \ldots,\ t_n$ – все корни уравнения $f(t) = 0$.

Уравнения вида

$$\boxed{f\left(\log_x A\right) = 0,\quad A > 0}$$

равносильны совокупности уравнений

$$\log_x A = t_1,\ \log_x A = t_2, \ldots,\ \log_x A = t_n,$$

где $t_1,\ t_2, \ldots,\ t_n$ – все корни уравнения $f(t) = 0$.

Примеры

Решить уравнения:

9. $\dfrac{1}{5-4\lg x} + \dfrac{4}{1+\lg x} = 3$.

□ Обозначим $\lg x = t$ и произведем замену неизвестного. Тогда

$$\frac{1}{5-4t} + \frac{4}{1+t} = 3 \Leftrightarrow \frac{1+t+4(5-4t)-3(5-4t)(1+t)}{(5-4t)(1+t)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2t^2-3t+1}{(t+1)(5-4t)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2(t-1)(t-(1/2))}{(t+1)(5-4t)} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 1/2. \end{array}\right.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности двух простейших уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \lg x = 1, \\ \lg x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10, \\ x = \sqrt{10}. \end{array}\right.$$

Итак, множество всех решений уравнения состоит из чисел $\sqrt{10}$ и 10.

Ответ: $\left\{\sqrt{10}; 10\right\}$.

10. $\log_x^3 10 - \log_x^2 10 - 6\log_x 10 = 0$.

□ Обозначим $\log_x 10 = t$ и произведем замену неизвестного в уравнении. Тогда $t^3 - t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow t\left(t^2 - t - 6\right) = 0 \Leftrightarrow t(t-3)(t+2) = 0 \Leftrightarrow\ t = 0,\ t = 3,\ t = -2$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \log_x 10 = 0, \\ \log_x 10 = -2, \\ \log_x 10 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ x = 10^{1/3}, \\ x = 10^{-1/2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{\sqrt{10}}{10}; \sqrt[3]{10}\right\}$.

Уравнения вида

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad a > 0, \quad a \neq 1}$$

можно заменить равносильной системой двумя способами.

1-й способ.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

2-й способ.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Аналогично уравнения вида

$$\boxed{\log_{f(x)} A = \log_{g(x)} A, \quad A > 0}$$

можно заменить равносильной системой двумя способами.

1-й способ.

$$\log_{f(x)} A = \log_{g(x)} A \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

2-й способ.

$$\log_{f(x)} A = \log_{g(x)} A \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Заметим, что выбор способа замены определяется тем, какое из неравенств $g(x) > 0$ или $f(x) > 0$ решается проще.

11. $\log_{1/5} \dfrac{2+x}{10} = \log_{1/5} \dfrac{2}{x+1}$.

☐ Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ \dfrac{2+x}{10} = \dfrac{2}{x+1}. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет два корня: $x_1 = 3$, $x_2 = -6$. Однако первому условию удовлетворяет только число $x_1 = 3$. Таким образом, уравнение имеет единственный корень – число 3.

Ответ: $\{3\}$.

12. $\log_3 \left(x^2 - 4x + 3\right) = \log_3 (3x + 21)$.

☐ Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3x + 21 > 0, \\ x^2 - 4x + 3 = 3x + 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -7, \\ x^2 - 7x - 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -7, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 9 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 9, \end{array}\right.$$

следовательно, множество всех решений уравнения состоит из двух чисел: $x_1 = -2$, $x_2 = 9$.

Ответ: $\{-2; 9\}$.

13. $\log_{1/10} \dfrac{2x^2 - 54}{x+3} = \log_{1/10} (x - 4)$.

☐ Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x - 4 > 0, \\ \dfrac{2x^2 - 54}{x+3} = x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ \dfrac{2x^2 - 54 - (x-4)(x+3)}{x+3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ \dfrac{2x^2 - 54 - x^2 + x + 12}{x+3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ \dfrac{x^2 + x - 42}{x+3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ \dfrac{(x+7)(x-6)}{x+3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Итак, уравнение имеет единственный корень – число 6.

Ответ: $\{6\}$.

14. $\log_{(5+x)/3} 3 = \log_{-1/(x+1)} 3$.

☐ Уравнение равносильно уравнению $\dfrac{5+x}{3} = \dfrac{-1}{x+1}$ при

$$\begin{cases} \dfrac{5+x}{3} > 0, \\ \dfrac{5+x}{3} \neq 1. \end{cases}$$

Уравнение системы имеет два корня: $x_1 = -4$, $x_2 = -2$. Число $x_1 = -4$ удовлетворяет всем соотношениям системы, а для числа $x_2 = -2$ не выполняется условие $\dfrac{5+x}{3} \neq 1$. Таким образом, уравнение имеет один корень – число $x_1 = -4$.

Ответ: $\{-4\}$.

ДГУБОВ.РФ

Уравнения вида

$$\boxed{\log_{g(x)} f(x) = b}$$

равносильны смешанной системе

$$\begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g^b(x). \end{cases}$$

15. $\log_{x+1}\left(x^2 - 3x + 1\right) = 1$.

□ Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1, \\ x^2 - 3x + 1 = x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4,$$

следовательно, единственным корнем уравнения является число 4.

Ответ: $\{4\}$.

16. $\log_x\left(2x^2 - 3x - 4\right) = 2$.

Δ. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ 2x^2 - 3x - 4 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ (x+1)(x-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Итак, единственным корнем уравнения является число 4.

Ответ: $\{4\}$.

Уравнения вида

$$\boxed{\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x)}$$

можно заменить равносильной системой двумя способами.

1-й способ.

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x). \end{cases}$$

2-й способ.

$$\log_{f(x)} g(x) = \log_{f(x)} h(x) \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) > 0, \\ f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ g(x) = h(x). \end{cases}$$

Уравнения вида

$$\boxed{\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x)}$$

можно заменить равносильной системой двумя способами.

1-й способ.

$$\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ g(x) = p(x). \end{cases}$$

2-й способ.

$$\log_{g(x)} f(x) = \log_{p(x)} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ p(x) > 0, \\ p(x) \neq 1, \\ g(x) = p(x). \end{cases}$$

Выбор системы, равносильной данному уравнению, определяется тем, какое из неравенств $g(x) > 0$ или $h(x) > 0$ $[p(x) > 0]$ решается проще.

17. $\log_{x^2-1}\left(x^3 + 6\right) = \log_{x^2-1}\left(4x^2 - x\right)$.

□ Данное уравнение равносильно уравнению $x^3 + 6 = 4x^2 - x$ при ОДЗ

$$\begin{cases} x^3 + 6 > 0, \\ x^2 - 1 > 0, \\ x^2 - 1 \neq 1. \end{cases}$$

Уравнение $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ имеет три корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Число $x_1 = -1$ не удовлетворяет условию $x^2 - 1 > 0$.

Числа $x_2 = 2$ и $x_3 = 3$ является решениями этой системы, а следовательно, и исходного уравнения.

Ответ: $\{2; 3\}$.

СГУ6ОВ.РФ

18. $\log_{x^3+x}\left(x^2-4\right)=\log_{4x^2-6}\left(x^2-4\right)$.

☐ Уравнение равносильно уравнению $x^3+x=4x^2-6$ при ОДЗ

$$\begin{cases} x^2-4>0, \\ x^3+x>0, \\ x^3+x\neq 1. \end{cases}$$

Уравнение $x^3-4x^2+x+6=0$ имеет три корня: $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=3$. Из них только число 3 удовлетворяет всем требованиям системы. Следовательно, данное уравнение имеет один корень – число 3.

Ответ: $\{3\}$.

Уравнения вида

$$\boxed{2n\log_a f(x)=\log_a g(x),\quad a>0,\quad a\neq 1,\quad n\in N}$$

равносильны системе

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ f^{2n}(x)=g(x). \end{cases}$$

19. $\lg 2x=2\lg(4x-15)$.

☐ Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4x-15>0, \\ \lg 2x=\lg(4x-15)^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 4x-15>0, \\ 2x=(4x-15)^2. \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение последней системы:

$$2x=16x^2-120x+225\Leftrightarrow 16x^2-122x+225=0\Leftrightarrow \Leftrightarrow 16\left(x-\frac{9}{2}\right)\left(x-\frac{25}{8}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{9}{2}, \\ x=\dfrac{25}{8}. \end{array}\right.$$

С учетом неравенства системы получаем: единственным решением исходного уравнения является число $9/2$.

Ответ: $\left\{\frac{9}{2}\right\}$.

Уравнения вида

$$\boxed{\frac{1}{2}\log_a f(x)=\log_a g(x),\quad a>0,\quad a\neq 1}$$

равносильны уравнению

$$\log_a f(x)=2\log_a g(x),$$

которое, в свою очередь, равносильно системе

$$\begin{cases} g(x)>0, \\ f(x)=g^2(x). \end{cases}$$

20. $\lg x=\frac{1}{2}\lg(x+1)$.

☐ Уравнение равносильно уравнению

$$2\lg x=\lg(x+1),,$$

которое равносильно системе

$$\begin{cases} x>0, \\ \lg x^2=\lg(x+1) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0, \\ x^2=x+1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0, \\ x^2-x-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x>0, \\ \left(x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Итак, единственным корнем исходного уравнения является число $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ответ: $\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$.

Уравнения вида

$$\boxed{\log_a f(x)+\log_a g(x)=\log_a m(x),\quad a>0,\quad a\neq 1}$$

равносильны системе

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ \log_a\left(f(x)g(x)\right)=\log_a m(x), \end{cases}\quad \text{т.е. системе}\quad \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f(x)\cdot g(x)=m(x). \end{cases}$$

ЯГУБОВ.РФ

21. $\log_3(x-2)+\log_3 x=\log_3 8$.

☐ Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x>0, \\ \log_3\big(x(x-2)\big)=\log_3 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x>0, \\ x(x-2)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ (x-4)(x+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Таким образом, единственным корнем исходного уравнения является число 4.

Ответ: $\{4\}$.

22. $\lg(x-9)+2\lg\sqrt{2x-1}=2$.

☐ Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x-9>0, \\ 2x-1>0, \\ \lg(x-9)(2x-1)=\lg 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>9, \\ x>\dfrac{1}{2}, \\ (x-9)(2x-1)=100 \end{cases} \Leftrightarrow x=13.$$

Следовательно, единственным корнем исходного уравнения является число 13.

Ответ: $\{13\}$.

23. $\dfrac{1}{2}\log_5(x+5)+\log_5\sqrt{x-3}=\dfrac{1}{2}\log_5(2x+1)$.

☐ Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_5(x+5)+2\log_5\sqrt{x-3}=\log_5(2x+1),$$

которое равносильно системе

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x+5>0, \\ \log\big((x+5)(x-3)\big)=\log_5(2x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3, \\ x>-5, \\ (x+5)(x-3)=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Итак, единственным корнем исходного уравнения является число 4.

Ответ: $\{4\}$.

У р а в н е н и я в и д а

$$\boxed{\log_a\alpha(x)-\log_a\beta(x)=\log_a f(x)-\log_a g(x),\quad a>0,\quad a\neq 1}$$

равносильны уравнению

$$\log_a\alpha(x)+\log_a g(x)=\log_a f(x)+\log_a\beta(x),$$

которое равносильно системе

$$\begin{cases} \alpha(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f(x)>0, \\ \beta(x)>0, \\ \log_a\big[\alpha(x)g(x)\big]=\log_a\big[f(x)\beta(x)\big], \end{cases}$$ т.е. системе $$\begin{cases} \alpha(x)>0, \\ g(x)>0, \\ f(x)>0, \\ \beta(x)>0, \\ \alpha(x)g(x)=f(x)\beta(x). \end{cases}$$

24. $\log_7(x-2)-\log_7(x+2)=1-\log_7(2x-7)$.

☐ Уравнение равносильно уравнению

$$\log_7(x-2)+\log_7(2x-7)=\log_7 7+\log_7(x+2),$$

которое равносильно системе

$$\begin{cases} x-2>0, \\ 2x-7>0, \\ x+2>0, \\ \log_7\big((x-2)(2x-7)\big)=\log_7 7(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x>7/2, \\ x>-2, \\ (x-2)(2x-7)=7(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{7}{2}, \\ 2x^2-18x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{7}{2}, \\ x(x-9)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=9.$$

Единственным корнем исходного уравнения является число 9.

Ответ: $\{9\}$.

25. $\lg(x+3)-2\lg(x-2)=\lg 0{,}4$.

☐ Уравнение равносильно уравнению

$$\lg(x+3)=\lg\frac{2}{5}+2\lg(x-2),$$

которое равносильно системе

$$\begin{cases} x-2>0, \\ \lg(x+3)=\lg\dfrac{2(x-2)^2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ x+3=\dfrac{2(x-2)^2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ 2x^2-13x-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>2, \\ 2(x-7)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=7.$$

Число 7 – единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $\{7\}$.

26. $\log_4(x+2)-\log_4(x-2)=2-\log_4 8$.

☐ Уравнение равносильно уравнению

$$\log_4(x+2)=\log_4 2+\log_4(x-2)\Leftrightarrow\ \log_4(x+2)=\log_4 2(x-2),$$

которое равносильно системе

$$\begin{cases}x-2>0,\\ x+2=2(x-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2,\\ x=6\end{cases}\Leftrightarrow x=6.$$

Число 6 – единственный корень исходного уравнения.

Ответ: $\{6\}$.

Если в уравнении содержатся логарифмы с разными основаниями, то прежде всего следует свести все логарифмы к одному основанию. Для этого используется формула перехода к новому основанию:

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},\quad a>0,\quad a\neq 1,\quad c>0,\quad c\neq 1,\quad b>0,$$

или ее частный случай:

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a},\quad a>0,\quad a\neq 1,\quad b>0,\quad b\neq 1.$$

27. $2\log_2 x+\log_{\sqrt{2}} x+\log_{1/2} x=9$.

☐ ОДЗ уравнения – промежуток $x>0$. Поскольку

$$\log_{\sqrt{2}} x=\frac{\log_2 x}{\log_2\sqrt{2}}=2\log_2 x,\quad \log_{1/2} x=\frac{\log_2 x}{\log_2\frac{1}{2}}=-\log_2 x,$$

то исходное уравнение равносильно уравнению

$$2\log_2 x+2\log_2 x-\log_2 x=9,$$

т.е. уравнению

$$\log_2 x=3\Leftrightarrow\log_2 x=\log_2 8\Leftrightarrow x=8.$$

Число 8 входит в ОДЗ исходного уравнения; поэтому оно есть его единственный корень.

Ответ: $\{8\}$.

28. $\log^2_{\sqrt{2}} x+3\log_2 x+\log_{1/2} x=2$.

☐ ОДЗ уравнения – множество всех положительных чисел. Перейдем в логарифмах уравнения к основанию $\sqrt{2}$. Поскольку

$$\log_2 x=\frac{\log_{\sqrt{2}} x}{\log_{\sqrt{2}} 2}=\frac{\log_{\sqrt{2}} x}{2},\quad \log_{1/2} x=\frac{\log_{\sqrt{2}} x}{\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}}=\frac{-\log_{\sqrt{2}} x}{2},$$

то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log^2_{\sqrt{2}} x+\frac{3}{2}\log_{\sqrt{2}} x-\frac{\log_{\sqrt{2}} x}{2}=2.$$

Обозначим $t=\log_{\sqrt{2}} x$; тогда последнее уравнение можно записать в виде $t^2+\frac{3t}{2}-\frac{t}{2}=2$. Оно равносильно

$$t^2+t-2=0\Leftrightarrow(t+2)(t-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1,\\ t=-2.\end{array}\right.$$

Итак, данное уравнение на своей ОДЗ равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\log_{\sqrt{2}} x=1,\\ \log_{\sqrt{2}} x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2},\\ x=\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Следовательно, множество всех решений исходного уравнения состоит из чисел $\frac{1}{2}$ и $\sqrt{2}$.

Ответ: $\left\{\frac{1}{2};\sqrt{2}\right\}$.

29. $\frac{3}{2}\log_{1/4}(x+2)^2-3=\log_{1/4}(4-x)^3-\log_4(x+6)^3$.

☐ ОДЗ уравнения определяется системой

$$\begin{cases}x+2\neq 0,\\ 4-x>0,\\ x+6>0,\end{cases}$$

решение которой есть два интервала: $-6<x<-2$, $-2<x<4$.

Переходя к основанию $\frac{1}{4}$ и используя формулы (28 и 29), получаем

$$3\log_{1/4}|x+2|-3=3\log_{1/4}(4-x)+3\log_{1/4}(x+6).$$

Заметим, что при этом ОДЗ этого уравнения не изменилась: на ней оба уравнения равносильны. Последнее уравнение на ОДЗ исходного уравнения равносильно системе

$$\begin{cases}\log_{1/4}\frac{|x+2|}{(4-x)(x+6)}=1,\\ \left[\begin{array}{l}-6<x<-2,\\ -2<x<4,\end{array}\right.\end{cases}$$

т.е. системе

$$\begin{cases}4|x+2|=(4-x)(x+6),\\ \left[\begin{array}{l}-6<x<-2,\\ -2<x<4.\end{array}\right.\end{cases}$$

ЯГУБОВ.РФ

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{cases}-2<x<4,\\ 4(x+2)=(4-x)(6+x),\end{cases}\right. \text{ или } \left[\begin{cases}-2<x<4,\\ x^2+6x-16=0,\end{cases}\right.$$
$$\left.\begin{cases}-6<x<-2,\\ -4(x+2)=(4-x)(x+6),\end{cases}\right. \quad \left.\begin{cases}-6<x<-2,\\ x^2-2x-32=0.\end{cases}\right.$$

Первая система имеет решение $x_1=2$, а вторая – решение $x_2=1-\sqrt{33}$. Два этих числа составляют множество всех решений исходного уравнения.

Ответ: $\left\{1-\sqrt{33};2\right\}$.

При решении уравнений формальное использование формулы перехода к другому основанию

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a};\quad a>0,\quad a\neq 1,\quad b>0,\quad b\neq 1$$

может привести к потере корней или появлению посторонних корней, так как левая и правая ее части имеют различные области существования.

Применение основного логарифмического тождества

$$a^{\log_a b}=b,\quad b>0,\quad a>0,\quad a\neq 1$$

может привести к появлению посторонних корней, если не следить за условиями его применимости.

30. $x^{\log_x (x+3)^2}=16$.

□ ОДЗ данного уравнения определяется системой неравенств $x>0$, $x\neq 1$. Уравнение на своей ОДЗ равносильно уравнению

$$(x+3)^2=16,$$

имеющему два корня: $x_1=1$, $x_2=-7$, которые не входят в ОДЗ исходного уравнения. Следовательно, исходное уравнение не имеет корней.

Применение основного логарифмического тождества без учета ограничения, задаваемого системой неравенств $x>0$, $x\neq 1$, приводит к тому же уравнению, имеющему два корня, которые для исходного уравнения являются посторонними.

Ответ: $x\in\varnothing$.

При решении логарифмических уравнений иногда используется формула

$$\boxed{f^{\log_a g}=g^{\log_a f},\quad a>0,\quad a\neq 1,\quad f>0,\quad g>0}$$

31. $3x^{\log_5 2}+2^{\log_5 x}=64$.

□ ОДЗ уравнения: $x>0$. На этом множестве $x^{\log_5 2}=2^{\log_5 x}$, поэтому данное уравнение равносильно уравнению $3\cdot 2^{\log_5 x}+2^{\log_5 x}=64$, т.е. уравнению $2^{\log_5 x}=16$.

Отсюда получаем $\log_5 x=4$, т.е. $x=625$. Число 625 принадлежит ОДЗ исходного уравнения и, следовательно, является его единственным корнем.

Ответ: $\{625\}$.

Иногда целесообразно логарифмировать обе части уравнения, чтобы свести его решение к одному из простейших уравнений. Как правило, это приходится делать для уравнений смешанного типа, содержащих как показательную, так и логарифмическую функцию.

32. $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x}=2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$.

□ ОДЗ уравнения: $x>0$. Обе части уравнения положительны на его ОДЗ; поэтому прологарифмировав их по основанию 2, получим уравнение $\log_2\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log_2^2 x=\frac{1}{4}\log_2^2 x$, равносильное исходному.

Таким образом, все корни уравнения, и только они, удовлетворяют уравнению $\log_2^2 x=8$, т.е. $|\log_2 x|=2\sqrt{2}$. Отсюда находим: $x_1=2^{-2\sqrt{2}}$, $x_2=2^{2\sqrt{2}}$.

Итак, множество всех решений исходного уравнения состоит из чисел: $x_1=4^{-\sqrt{2}}$ и $x_2=4^{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\left\{4^{-\sqrt{2}};4^{\sqrt{2}}\right\}$.

Решить системы:

33. $\begin{cases}\log_y x-\log_x y=\frac{8}{3},\\ xy=16.\end{cases}$

□ Множество допустимых значений x и y в данной системе определяется системой неравенств: $x>0$, $x\neq 1$, $y>0$, $y\neq 1$. Полагая $z=\log_y x$ и учитывая, что при x и y из ОДЗ $\log_x y=\frac{1}{\log_y x}$, получим уравнение $z-(1/z)=8/3$.

Множество всех решений этого уравнения состоит из чисел: $z_1=3$ и $z_2=-1/3$.

Таким образом, данная система на своем множестве допустимых значений равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases}\log_y x=3,\\ xy=16,\end{cases}\qquad \begin{cases}\log_y x=-\dfrac{1}{3},\\ xy=16.\end{cases}$$

Из равенства $\log_y x=3$ находим $x=y^3$; поэтому первая система этой совокупности равносильна на ОДЗ системе

$$\begin{cases}x=y^3,\\ xy=16.\end{cases}$$

Отсюда $x=8$, $y=2$.

Вторая система совокупности равносильна на ОДЗ системе

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{y}},\\ xy=16.\end{cases}$$

Отсюда $x=\dfrac{1}{4}$, $y=64$.

Итак, множество всех решений исходной системы состоит из двух упорядоченных пар: $(8;2),\left(\dfrac{1}{4};64\right)$.

Ответ: $\left\{(8;2),\left(\dfrac{1}{4};64\right)\right\}$.

34. $\begin{cases}\left|\log_2(x+y)\right|+\left|\log_2(x-y)\right|=3,\\ xy=3.\end{cases}$

□ ОДЗ системы определяется условиями

$$\begin{cases}x+y>0,\\ x-y>0,\end{cases}$$

откуда получаем $x>|y|$.

Из второго уравнения исходной системы следует, что $xy>0$, поэтому вместо нее будем решать равносильную ей систему

$$\begin{cases}x>y>0,\\ \left|\log_2(x+y)\right|+\left|\log_2(x-y)\right|=3,\\ xy=3.\end{cases}$$

В условиях исходной системы $x+y=x+\dfrac{3}{x}>x+\dfrac{1}{x}\ge 2$; поэтому $\log_2(x+y)>1$. Следовательно, система равносильна совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x>y>0,\\ \log_2(x-y)\ge 0,\\ \log_2(x+y)+\log_2(x-y)=3,\\ xy=3,\end{cases} & \begin{cases}x>y>0,\\ x-y\ge 1,\\ x^2-y^2=8,\\ xy=3,\end{cases}\\ \begin{cases}x>y>0,\\ \log_2(x-y)<0,\\ \log_2(x+y)-\log_2(x-y)=3,\\ xy=3.\end{cases} & \begin{cases}x>y>0,\\ 0<x-y<1,\\ (x+y)=8(x-y),\\ xy=3.\end{cases}\end{array}\right.$$

Из системы двух уравнений

$$\begin{cases}x^2-y^2=8,\\ xy=3\end{cases}$$

найдем $x^2-\dfrac{9}{x^2}=8$, откуда $x^4-8x^2-9=0$, и, следовательно, $x^2=9$. Учитывая условие $x>0$, получаем $x=3$ и соответственно $y=1$. Единственная пара чисел $(3;1)$, соответствующая набору $(x;y)$, удовлетворяет всем условиям первой системы совокупности, а следовательно, является решением исходной системы.

Система $\begin{cases}x+y=8(x-y)\\ xy=3,\end{cases}$ имеет два решения: $\left(3\sqrt{\dfrac{3}{7}};\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right),\left(-3\sqrt{\dfrac{3}{7}};-\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)$, соответствующих набору $(x;y)$.

Из этих двух решений всем условиям второй системы совокупности удовлетворяет только пара чисел $\left(3\sqrt{\dfrac{3}{7}};\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)$.

Таким образом, множество всех решений исходной системы состоит из двух упорядоченных пар: $(3;1)$ и $\left(3\sqrt{\dfrac{3}{7}};\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)$, соответствующих набору $(x;y)$. Эти пары – решение исходной системы.

Ответ: $\left\{(3;1);\left(3\sqrt{\dfrac{3}{7}};\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)\right\}$.

Примеры с параметром

35. ***Найти все значения параметра a, для которых уравнение $\lg(ax)=2\lg(x+1)$ имеет единственный корень. Указать его.***

□ Решение таких примеров будет короче, если использовать свойства уравнения $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, которое равносильно одной из систем:

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Заметим, что выбирается та система, в которой проще решать неравенство $f(x)>0$ или $g(x)>0$. Тогда

$$\begin{cases} x+1>0, \\ ax=(x+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1, \\ x^2+(2-a)x+1=0 \end{cases}$$

и одно решение при выполнении совокупности:

$$\begin{cases} D=0,\ x_в>-1, \\ f(-1)<0, \\ f(-1)=0 \text{ при } x_1=-1,\ x_2>-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D=4-4a+a^2-4=a^2-4a=0, \begin{cases} a=0, \\ a=4, \end{cases} \\ f(-1)=1+a-2+1=a<0,\ x_2=\dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}, \\ f(-1)=0 \text{ при } a=0 \text{ и } x=-1\notin x>-1. \end{cases}$$

При $a=4$ $x_в=\dfrac{a-2}{2}=a\in x>-1$.

Ответ: при $a\in(-\infty;0)\cup\{4\}$ $x=\dfrac{a-2+\sqrt{a^2-4a}}{2}$.

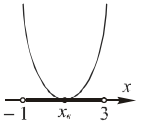
36. ***Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\lg(x+1)+\lg(3-x)=\lg(ax+1)$ имеет единственное решение.***

□ Уравнение равносильно системе

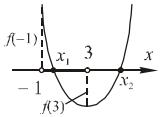
$$\begin{cases} x+1>0, \\ 3-x>0, \\ ax+1>0, \\ (x+1)(3-x)=ax+1 \ (*) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<x<3, \\ x^2+(a-2)x-2=0, \end{cases} \qquad (1)$$

причем третье неравенство можно опустить, так как левая часть уравнения (*) положительна, значит, и правая положительна на тех же x. У системы (1) есть одно решение в тех случаях, когда уравнение имеет:

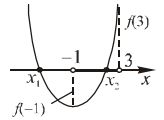
1) один корень и он принадлежит интервалу $(-1;3)$ при условии $\begin{cases} D=0, \\ -1<x_в<3; \end{cases}$



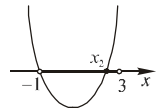
2) два корня x_1 и x_2, но только первый принадлежит интервалу $(-1;3)$ при условии $\begin{cases} f(-1)>0, \\ f(3)<0; \end{cases}$



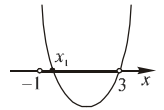
3) только правый корень $x_2\in(-1;3)$ при условии $\begin{cases} f(3)>0, \\ f(-1)<0; \end{cases}$



4) левый корень $x_1=-1$, а правый $x_2\in(-1;3)$ при условии $\begin{cases} f(-1)=0, \\ f(3)>0; \end{cases}$



5) правый корень $x_2=3$, а левый $x_1\in(-1;3)$ при условии $\begin{cases} f(3)=0, \\ f(-1)>0. \end{cases}$



Рассмотрим все эти условия.

1) $D=(a-2)^2+8=0\Rightarrow a\in\varnothing$.

2) $\begin{cases} f(-1)=1-a+2-2>0, \\ f(3)=9+3a-6-2<2 \end{cases} \Rightarrow a<-\dfrac{1}{3}$.

3) $\begin{cases} f(3)>0, \\ f(-1)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>-\dfrac{1}{3} \\ a>1, \end{cases} \Rightarrow a>1$.

4) $\begin{cases} f(-1)=0 \text{ при } a=1 \\ f(3)>0 \text{ при } a>-\dfrac{1}{3}, \end{cases} \Rightarrow a=1$.

5) $\begin{cases} f(3)=0 \text{ при } a=-\dfrac{1}{3} \\ f(-1)>0 \text{ при } a<1, \end{cases} \Rightarrow a=-\dfrac{1}{3}$.

Объединяя все решения, получим ответ.

Ответ: $a\in(-\infty;-1/3]\cup[1;+\infty)$.

ЯГУБОР.РФ

37. ***Найти все значения параметра*** a, ***при которых система***

$$\begin{cases}\dfrac{\lg(x+y+1)}{\lg x}=1,\\ (x-a)^2+(y+a-5)(y+a)=0\end{cases}$$

имеет одно решение. Указать его.

□ $\begin{cases}x>0,\ x\neq 1,\\ x+y+1=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\ x\neq 1,\\ y=-1.\end{cases}$

$$\begin{cases}x^2-2ax+2a^2-7a+6=0,\\ x>0,\ x\neq 1.\end{cases}$$

Запишем условия существования одного решения:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}D=-a^2+7a-6=0,\\ x_в=a>0,\end{cases}\\ f(0)=2a^2-7a+6<0,\\ \begin{cases}f(0)=0,\\ x_1=0,\ x_2>0;\end{cases}\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1,\ a=6,\\ x_в=a,\ x\neq 1,\end{cases}\Rightarrow a=6.\\ a\in\left(\dfrac{3}{2};2\right),\\ f(0)=0\ \text{ при }\ a=\dfrac{3}{2},\ a=2.\end{array}\right.$$

Проверим точки $a=3/2$ и $a=2$ подстановкой в уравнение $x^2-2ax=0$.

$a=\dfrac{3}{2}$ $x=0$, $x=3$, т.е. одно решение;

$a=2$ $x=0$, $x=4$, т.е. одно решение.

Итак, $a\in\left[\dfrac{3}{2};2\right]\cup\{6\}$.

Проверим уравнение на $x=1$ (подробно см. с. 154).

$1-2a+2a^2-7a+6=0$ или $2a^2-9a+7=0$ $a=1$ и $a=3{,}5$.

Корни $x_{1,2}=a\pm\sqrt{-a^2+7a-6}$, при $a=3{,}5$ $x_1=1$ и $x_2=6$, т.е. правый корень.

Ответ: $a\in\left[-\dfrac{3}{2};2\right]\cup\{3{,}5;6\}$ $x=a+\sqrt{-a^2+7a-6}$, $y=-1$.

Глава 6. РЕШЕНИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Решение простейших логарифмических неравенств основано на следующих свойствах монотонности логарифма:

$$\begin{cases}\log_a f(x)>\log_a g(x),\\ a>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0,\\ a>1,\\ f(x)>g(x);\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_a f(x)>\log_a g(x),\\ 0<a<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0,\\ 0<a<1,\\ f(x)<g(x).\end{cases}$$

В данных переходах от простейшего логарифмического неравенства к равносильным системам неравенств, не содержащих знака логарифма, учтена область допустимых значений исходного неравенства.

Решение любого нестрогого логарифмического неравенства отличается от решения соответствующего строгого логарифмического неравенства только включением в множество всех его решений множества корней соответствующего логарифмического уравнения.

Простейшие логарифмические неравенства:

$$\begin{cases}\log_a f(x)>0,\\ a>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>1,\\ a>1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_a f(x)>0,\\ 0<a<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<f(x)<1,\\ 0<a<1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_a f(x)<0,\\ a>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<f(x)<1,\\ a>1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\log_a f(x)<0,\\ 0<a<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>1,\\ 0<a<1.\end{cases}$$

П р и м е р ы

Решить неравенства:

1. $\log_7\dfrac{x-2}{x-3}<0$.

□ Поскольку основание логарифма больше единицы, то данное неравенство равносильно двойному неравенству

$$0<\frac{x-2}{x-3}<1.$$

Ягубов Дф

Неравенство $\dfrac{x-2}{x-3}>0$ выполняется для всех значений x из промежутков $-\infty<x<2$ и $3<x<+\infty$.

Неравенство $\dfrac{x-2}{x-3}<1$ равносильно неравенству $\dfrac{x-2}{x-3}-1<0$, т.е. неравенству $1/(x-3)<0$, решение которого: $x<3$.

Пересечение множеств решений каждого из неравенств системы есть промежуток $-\infty<x<2$, который и является множеством всех решений исходного неравенства.

Ответ: $(-\infty;2)$.

2. $\lg\left(x^2-2x-3\right)\ge 0$.

☐ Основание логарифма больше единицы; поэтому данное неравенство равносильно неравенству

$$x^2-2x-3\ge 1\Leftrightarrow x^2-2x-4\ge 0\Leftrightarrow \left(x-\left(1-\sqrt{5}\right)\right)\left(x-\left(1+\sqrt{5}\right)\right)\ge 0,$$

откуда следует, что интервалы $-\infty<x\le 1-\sqrt{5}$ и $1+\sqrt{5}\le x<+\infty$ составляют множество всех решений исходного неравенства.

Ответ: $\left(-\infty;1-\sqrt{5}\right)\cup\left(1+\sqrt{5};\infty\right)$.

3. $x\log_{1/10}\left(x^2+x+1\right)>0$.

☐ Поскольку $\log_{1/10}A=-\lg A$, то данное неравенство равносильно неравенству $x\lg\left(x^2+x+1\right)<0$, которое равносильно совокупности систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ \lg\left(x^2+x+1\right)<0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ \lg\left(x^2+x+1\right)>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ x^2+x+1<1,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ x^2+x+1>1,\end{cases}\end{array}\right.\begin{array}{l}\Leftrightarrow x\in\varnothing,\\ \Leftrightarrow x<-1.\end{array}$$

Ответ: $(-\infty;-1)$.

4. $\log_2\dfrac{5-12x}{12x-8}+\log_{1/2}x\le 0$.

☐ Так как $\log_{1/2}x=-\log_2 x$, то данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_2\frac{5-12x}{12x-8}\le\log_2 x,$$

которое, учитывая, что основание логарифма больше единицы, равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{5-12x}{12x-8}>0,\Leftrightarrow\dfrac{x-\frac{5}{12}}{x-\frac{5}{3}}<0\Leftrightarrow\dfrac{5}{12}<x<\dfrac{2}{3},\\ \dfrac{5-12x}{12x-8}\le x\Leftrightarrow 5-12x\ge x(12x-8)\Leftrightarrow-\dfrac{5}{6}\le x\le\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

$$\frac{5-12x}{12x-8}>0\Leftrightarrow\frac{x-\frac{5}{12}}{x-\frac{2}{3}}<0\Leftrightarrow\frac{5}{12}<x<\frac{2}{3}.$$

Второе неравенство решается при условии $12x-8<0$ при найденных значениях x на интервале $5/12<x<2/3$.

Таким образом, множеством всех решений исходного неравенства есть промежуток $5/12<x\le 1/2$.

Ответ: $(5/12;1/2]$.

5. $\log_3\left(x^2-2\right)<\log_3\left(\dfrac{3}{2}|x|-1\right)$.

☐ Поскольку основание логарифмов больше единицы, то данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}x^2-2<\dfrac{3}{2}|x|-1,\\ x^2-2>0,\end{cases}\quad\text{или, учитывая, что } x^2=|x|^2,\quad\begin{cases}|x|^2-2<\dfrac{3}{2}|x|-1,\\ |x|^2-2>0.\end{cases}$$

Обозначив $t=|x|$, получаем систему (относительно t)

$$\begin{cases}t\ge 0,\\ t^2-2>0,\\ 2t^2-3t-2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 0,\\ \left(t+\sqrt{2}\right)\left(t-\sqrt{2}\right)>0,\\ 2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)(t-2)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 0,\\ t-\sqrt{2}>0,\\ t-2<0\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{2}<t<2.$$

Итак, исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2}<|x|<2$, откуда следует, что множество всех решений исходного неравенства состоит из промежутков $-2<x<-\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}<x<2$.

Ответ: $\left(-2;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};2\right)$.

6. $\log_{\sin\frac{\pi}{3}}\left(x^2-3x+2\right)\ge 2$.

☐ Так как $\sin(\pi/3)=\sqrt{3}/2$, то данное неравенство равносильно неравенству

Ягубов.рф

$$\log_{\sqrt{3}/2}\left(x^2-3x+2\right)\ge 2\log_{\sqrt{3}/2}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как основание логарифма меньше единицы, то полученное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2-3x+2\le\dfrac{3}{4}, \\ x^2-3x+2>0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство этой системы, найдем, что $1/2\le x\le 5/2$.

Решением неравенства $x^2-3x+2>0$ являются промежутки $-\infty<x<1$ и $2<x<+\infty$. Пересечение полученных множеств решений неравенств системы является множеством всех решений исходного неравенства, т.е. промежутки $1/2\le x<1$ и $2<x\le 5/2$.

Ответ: $[1/2;1)\cup(2;5/2]$.

7. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{1/9}\left(x^2-\frac{10}{3}x+1\right)}\le 1$.

☐ Из свойства монотонности показательной функции (основание меньше единицы) следует, что данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{1/9}\left(x^2-\frac{10}{3}x+1\right)\ge 0.$$

Поскольку основание логарифма меньше единицы, то отсюда заключаем, что исходное неравенство равносильно неравенству $0<x^2-\dfrac{10}{3}x+1\le 1$, т.е. системе двух квадратных неравенств

$$\begin{cases} x^2-\dfrac{10}{3}x+1>0, \\ x^2-\dfrac{10}{3}x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<\dfrac{1}{3}, \\ x>3, \end{array}\right. \\ 0\le x\le\dfrac{10}{3}. \end{cases}$$

Пересечение множеств решений неравенств системы, т.е. все значения x из промежутков $0\le x<1/3$ и $3<x\le 10/3$, является решением исходного неравенства.

Ответ: $[0;1/3)\cup(3;10/3]$.

8. $\log_{0,5}\left(\log_6\dfrac{x^2+x}{x+4}\right)<0$.

☐ Поскольку основание логарифма меньше единицы, то данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_6\frac{x^2+x}{x+4}>1,$$

которое, учитывая, что основание логарифма больше единицы, равносильно неравенству

$\dfrac{x^2+x}{x+4}>6$, т.е. неравенству $\dfrac{x^2+x}{x+4}-6>0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-5x-24}{x+4}>0$.

Поскольку $x^2-5x-24=(x+3)(x-8)$, то решая неравенство $\dfrac{(x+3)(x-8)}{x+4}>0$ методом интервалов найдем, что множество всех его решений, а значит, и исходного неравенства, есть промежутки $-4<x<-3$ и $8<x<+\infty$.

Ответ: $(-4;-3)\cup(8;\infty)$.

Решение неравенств вида

$$\boxed{f\left(\log_a x\right)\ge 0}$$

где f – некоторая функция, при помощи замены $t=\log_a x$ сводится к решению неравенства $f(t)\ge 0$ с последующим решением соответствующих простейших логарифмических неравенств.

9. $\dfrac{\lg^2 x-3\lg x+3}{\lg x-1}>1$.

☐ Обозначим $y=\lg x$, тогда данное неравенство примет вид

$$\frac{y^2-3y+3}{y-1}>1.$$

Это неравенство равносильно неравенству

$\dfrac{y^2-3y+3}{y-1}-1>0\Leftrightarrow\dfrac{y^2-4y+4}{y-1}>0$, т.е. неравенству $\dfrac{(y-2)^2}{y-1}<0$.

Решение последнего неравенства $y>1$, $y\ne 2$.

Отсюда заключаем, что данное неравенство равносильно неравенству $\lg x>1$, решение которого есть интервал $x>10$, но $x\ne 100$.

Ответ: $(10;+\infty)\setminus\{100\}$.

10. $\log_4\left(3^x-1\right)\log_{1/4}\dfrac{3^x-1}{16}\le\dfrac{3}{4}$.

☐ Обозначим $y=3^x-1$, тогда данное неравенство примет вид

$$\log_4 y\log_{1/4}\frac{y}{16}\le\frac{3}{4}.$$

ЯГУБОВ.РФ

Поскольку $\log_{1/4}\frac{y}{16}=-\log_4\frac{y}{16}=-(\log_4 y-\log_4 16)=2-\log_4 y$, то неравенство перепишем в виде $2\log_4 y-\log_4^2 y\le\frac{3}{4}$.

Обозначим $t=\log_4 y$, тогда имеем неравенство $t^2-2t+\frac{3}{4}\ge 0$, решением которого являются промежутки $-\infty<t\le\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}\le t<+\infty$.

Делая обратную замену, получим $\log_4 y\le\frac{1}{2}$ и $\log_4 y\ge\frac{3}{2}$.

Решением этой совокупности есть промежутки $0<y\le 2$ и $8\le y<+\infty$.

Следовательно, исходное неравенство равносильно совокупности двух показательных неравенств

$$\begin{cases}0<3^x-1\le 2,\\ 3^x-1\ge 8,\end{cases}\ \text{т.е. совокупности}\ \begin{cases}1<3^x\le 3,\\ 3^x\ge 9.\end{cases}$$

Решением первого неравенства этой совокупности является промежуток $0<x\le 1$, решение второго – промежуток $2\le x<+\infty$.

Таким образом, исходное неравенство выполняется для всех значений x из промежутков $0<x\le 1$ и $2\le x<+\infty$.

Ответ: $(0;1]\cup[2;\infty)$.

Существуют различные способы оформления решения логарифмического неравенства. Наиболее распространенные из них – метод перехода к решению равносильных совокупностей неравенств и метод разбиения ОДЗ данного неравенства на промежутки, на которых решаются соответствующие равносильные (на рассматриваемом промежутке) неравенства.

По существу, эти методы решения одинаковы и различаются только способом оформления.

11. $\log_{x^2}(2+x)<1$.

□ 1-й с п о с о б.

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\log_{x^2}(2+x)<\log_{x^2}x^2,$$

которое равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases}x^2>1,\\ 2+x<x^2,\\ 2+x>0,\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}0<x^2<1,\\ x^2<2+x.\end{cases}$$

Решением первой системы совокупности являются промежутки $-2<x<-1$ и $2<x<+\infty$.

Решением второй системы совокупности являются промежутки $-1<x<0$ и $0<x<1$.

Объединяя полученные множества решений систем совокупности, находим множество всех решений исходного неравенства: все значения x из четырех промежутков: $-2<x<-1$, $-1<x<0$, $0<x<1$, $2<x<+\infty$.

2-й с п о с о б.

Область допустимых значений данного неравенства определяется системой

$$\begin{cases}x^2>0,\\ x^2\ne 1,\\ 2+x>0,\end{cases}$$

откуда находим ОДЗ неравенства: $-2<x<-1$, $-1<x<0$, $0<x<1$, $1<x<+\infty$.

Рассмотрим данное неравенство на множестве $(-2;-1)\cup(1;+\infty)$, где $x^2>1$.

На этом множестве оно равносильно неравенству $2+x<x^2$ (так как $x^2>1$), решением которого на этом множестве являются промежутки $-2<x<-1$, $2<x<+\infty$.

На множестве $(-1;0)\cup(0;1)$ данное неравенство равносильно неравенству $2+x>x^2$ (так как $x^2<1$), решением которого на этом множестве являются промежутки $-1<x<0$ и $0<x<1$.

Объединяя полученные решения, получим множество решений исходного неравенства: все значения x из промежутков $-2<x<-1$, $-1<x<0$, $0<x<1$, $x>2$.

Ответ: $(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;1)\cup(2;\infty)$.

При решении логарифмических неравенств следует избегать преобразований, которые могут привести к потере или появлению посторонних решений, так как в противном случае обоснование правильности ответа, как правило, есть более сложная задача, чем решение исходного неравенства. Тем самым, по существу, *единственным методом решения логарифмических неравенств является метод перехода к равносильным неравенствам* (*системам* или *совокупностям*).

12. $\log_3(x+2)(x+4)+\log_{1/3}(x+2)<\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7$.

□ Область допустимых значений неравенства состоит из всех значений x, удовлетворяющих условию $x>-2$. При этих значениях неизвестного $\log_{1/3}(x+2)=-\log_3(x+2)$, $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7=\log_3 7$ и

ДГУ ООР РФ

$\log_3(x+2)(x+4)=\log_3(x+2)+\log_3(x+4)$, поэтому исходное неравенство можно записать в виде $\log_3(x+2)+\log_3(x+4)-\log_3(x+2)<\log_3 7$ или $\log_3(x+4)<\log_3 7$.

Таким образом, исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}\log_3(x+4)<\log_3 7,\\ x>-2.\end{cases}$$

Решение первого неравенства этой системы есть промежуток $-4<x<3$. Из этих значений x второму неравенству удовлетворяют только те значения x, которые принадлежат интервалу $-2<x<3$. Следовательно, множеством всех решений исходного неравенства является интервал $-2<x<3$.

Ответ: $(-2;3)$

13. $\log_{1/3}\left(x^2-6x+18\right)-2\log_{1/3}(x-4)<0$.

□ Область допустимых значений неравенства определяется системой

$$\begin{cases}x^2-6x+18>0,\\ x-4>0.\end{cases}$$

Из нее находим ОДЗ: промежуток $4<x<+\infty$. Данное неравенство на ОДЗ равносильно неравенству $\log_{1/3}\left(x^2-6x+18\right)<\log_{1/3}(x-4)^2$.

Основание логарифма меньше единицы; поэтому исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}x>4,\\ x^2-6x+18>(x-4)^2.\end{cases}$$

Поскольку $\begin{cases}x>4,\\ x^2-6x+18>(x-4)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>4,\\ x^2-6x+18>x^2-8x+16\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>4,\\ 2x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>4\\ x>-1\end{cases}\Leftrightarrow x>4,$$

то множеством всех решений исходного неравенства является промежуток $4<x<+\infty$.

Ответ: $(4;\infty)$.

Неравенства вида

$$\boxed{\log_{f(x)} g(x)>0}$$

равносильны совокупности систем

$$\begin{cases}0<f(x)<1,\\ 0<g(x)<1,\end{cases}\qquad\begin{cases}f(x)>1,\\ g(x)>1.\end{cases}$$

Неравенства вида

$$\boxed{\log_{f(x)} g(x)\ge 0}$$

равносильны совокупности систем

$$\begin{cases}0<f(x)<1,\\ 0<g(x)\le 1,\end{cases}\qquad\begin{cases}f(x)>1,\\ g(x)\ge 1.\end{cases}$$

Неравенства вида

$$\boxed{\log_{f(x)} g(x)<0}$$

равносильны совокупности систем

$$\begin{cases}0<f(x)<1,\\ g(x)>1,\end{cases}\qquad\begin{cases}f(x)>1,\\ 0<g(x)<1.\end{cases}$$

Неравенства вида

$$\boxed{\log_{f(x)} g(x)\le 0}$$

равносильны совокупности систем

$$\begin{cases}0<f(x)<1,\\ g(x)\ge 1,\end{cases}\qquad\begin{cases}f(x)>1,\\ 0<g(x)\le 1.\end{cases}$$

14. $\log_x\dfrac{2x+2/5}{5(1-x)}>0$.

□ Данное неравенство равносильно совокупности двух систем

$$\begin{cases}x>1,\\ \dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}>1,\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}0<x<1,\\ 0<\dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}<1.\end{cases}$$

Решая первую систему, имеем:

$$\begin{cases}x>1,\\ \dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1,\\ 2x+\frac{2}{5}<5(1-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1,\\ 7x<\frac{23}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1,\\ x<\frac{23}{35},\end{cases}$$

поэтому первая система совокупности решений не имеет.

Решая вторую систему, имеем:

$$\begin{cases}0<x<1,\\ 0<\dfrac{2x+\frac{2}{5}}{5(1-x)}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<1,\\ 0<2x+\frac{2}{5}<5(1-x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<1,\\ -\frac{1}{5}<x<\frac{23}{35},\end{cases}\Leftrightarrow\ 0<x<\frac{23}{35}.$$

Таким образом, решением совокупности, а следовательно, и исходного неравенства является интервал $0<x<23/35$.

Ответ: $(0;23/35)$.

15. $\log_{-4x^2+12x-8}|4x-5|>0$.

□ Данное неравенство равносильно совокупности систем

$$\begin{cases}-4x^2+12x-8>1,\\ |4x-5|>1,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}0<-4x^2+12x-8<1,\\ 0<|4x-5|<1.\end{cases}$$

Первая система этой совокупности решений не имеет, так как неравенство $-4x^2+12x-8>1$ равносильно $(2x-3)^2<0$, которое не имеет решений.

Первое неравенство второй системы совокупности справедливо при $1<x<\frac{3}{2}$ и $\frac{3}{2}<x<2$, а второе неравенство этой системы – при $1<x<\frac{5}{4}$ и $\frac{5}{4}<x<\frac{3}{2}$. Поэтому решение второй системы, а следовательно, и исходного неравенства есть множество всех значений x из промежутков $1<x<\frac{5}{4}$ и $\frac{5}{4}<x<\frac{3}{2}$.

Ответ: $(1;5/4)\cup(5/4;3/2)$.

Неравенства вида

$$\boxed{\log_{\varphi(x)} f(x)>\log_{\varphi(x)} g(x)}$$

где f, φ, g – некоторые функции, равносильны совокупности систем

$$\begin{cases}f(x)>g(x),\\ g(x)>0,\\ \varphi(x)>1,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}f(x)<g(x),\\ f(x)>0,\\ 0<\varphi(x)<1.\end{cases}$$

Неравенства вида

$$\boxed{\log_{\varphi(x)} f(x)\ge\log_{\varphi(x)} g(x)}$$

равносильны совокупности систем

$$\begin{cases}f(x)\ge g(x),\\ g(x)>0,\\ \varphi(x)>1,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}f(x)\le g(x),\\ f(x)>0,\\ 0<\varphi(x)<1.\end{cases}$$

Неравенства вида

$$\boxed{\log_{\varphi(x)} f(x)<\log_{\varphi(x)} g(x)}$$

равносильны совокупности систем

$$\begin{cases}f(x)<g(x),\\ f(x)>0,\\ \varphi(x)>1,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}f(x)>g(x),\\ g(x)>0,\\ 0<\varphi(x)<1.\end{cases}$$

Неравенства вида

$$\boxed{\log_{\varphi(x)} f(x)\le\log_{\varphi(x)} g(x)}$$

равносильны совокупности систем

$$\begin{cases}f(x)\le g(x),\\ f(x)>0,\\ \varphi(x)>1,\end{cases} \text{ или } \begin{cases}f(x)\ge g(x),\\ g(x)>0,\\ 0<\varphi(x)<1.\end{cases}$$

16. $\log_x 2x\le\sqrt{\log_x(2x^3)}$.

□ Данное неравенство равносильно неравенству $\log_x 2+1\le\sqrt{\log_x 2+3}$, так как $\log_x 2x=\log_x 2+\log_x x=\log_x 2+1$ и $\log_x(2x^3)=\log_x 2+\log_x x^3=\log_x 2+3$.

Обозначим $y=\log_x 2$; тогда неравенство примет вид

$$\sqrt{y+3}\ge y+1.$$

Решим это неравенство. Его ОДЗ есть промежуток $-3\le y<+\infty$. При $y<-1$ промежуток $-3\le y<-1$ из ОДЗ входит в множество решений преобразованного неравенства, так как $y+1<0$. При $y\ge-1$ получаем равносильное неравенство $y+3\ge y^2+2y+1$ или $y^2+y-2\le0$, решение которого есть $-2\le y\le1$.

Поэтому промежуток $-1\le y\le1$ есть решение неравенства на множестве $y\ge-1$. Таким образом, решением неравенства является промежуток $-3\le y\le1$.

Следовательно, исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases}\log_x 2\le1,\\ \log_x 2\ge-3.\end{cases}$$

Область допустимых значений этой системы состоит из всех значений $x>0$, $x\ne1$.

Если $0<x<1$, то $\log_2 x<0$. Поэтому

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\log_2 x}\le1,\\ \dfrac{1}{\log_2 x}\ge-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2 x\le1,\\ \log_2 x\le-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\log_2 x\le-\frac{1}{3}\Leftrightarrow0<x\le\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Таким образом, на множестве $0<x<1$ решение равносильной системы есть промежуток $0<x\le1/\sqrt[3]{2}$.

Если $x>1$, то $\begin{cases}\dfrac{1}{\log_2 x}\le1,\\ \dfrac{1}{\log_2 x}\ge-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2 x\ge1,\\ \log_2 x\ge-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\log_2 x\ge1\Leftrightarrow x\ge2$.

ЭТУБОР.РФ

Таким образом, на множестве $x>1$ решением равносильной системы неравенств есть промежуток $2\le x<+\infty$.

Итак, множество всех решений этой системы, а следовательно, и исходного неравенства, состоит из промежутков $0<x\le 1/\sqrt[3]{2}$ и $2\le x<+\infty$.

Ответ: $\left(0;1/\sqrt[3]{2}\right]\cup[2;\infty)$.

17. $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x}\ge 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$.

☐ Область допустимых значений неравенства состоит из всех значений $x>0$. На ОДЗ имеем: $x=2^{\log_2 x}$, $\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x}=2^{-2+\frac{1}{2}\log_2^2 x}$;

следовательно, данное неравенство равносильно неравенству

$$2^{-2+\frac{1}{2}\log_2^2 x}\ge 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x} \text{ или } -2+\frac{1}{2}\log_2^2 x\ge\frac{1}{4}\log_2^2 x.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x\ge 2\sqrt{2},\\ \log_2 x\le -2\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Множество всех решений этой совокупности, а следовательно, и исходного неравенства состоит из промежутков $0<x\le 2^{-2\sqrt{2}}$ и $2^{2\sqrt{2}}\le x<+\infty$.

Ответ: $\left(0;1/2^{2\sqrt{2}}\right]\cup\left[2^{2\sqrt{2}};\infty\right)$.

Примеры с параметром

18. ***При каких значениях*** p ***функция*** $\ln\left(6-p-10x+5(10-p)x^2\right)$ ***определена при всех*** $x\in R$ ***?***

☐ Данная функция определена при всех $x\in R$, когда квадратный трехчлен, стоящий под знаком логарифма, принимает только положительные значения при всех x, т.е. $5(10-p)x^2-10x-p+6>0$; и это возможно, если $5(10-p)>0$ и $D<0$, т.е. справедлива система

$$\begin{cases}5(10-p)>0,\\ D=5^2-5(10-p)(6-p)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p<10,\\ -5(p-5)(p-11)<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p<10,\\ (p-5)(p-11)>0\end{cases}\Rightarrow p<5.$$

Ответ: $p\in(-\infty;5)$.

19. ***При каких значениях параметра*** a ***функция*** $f(x)=\lg\left((2a+1)4^x+(5a+1)2^x+a+2\right)$ ***определена на*** $\forall x\in R$ ***?***

☐ Введем новую переменную $2^x=t>0$, тогда

$f(x)=(2a+1)t^2+(5a+1)t+a+2>0$ по условию существования логарифмической функции. Теперь можно переформулировать исходное условие: найти все *a*, при которых $f(t)>0\ \ \forall t>0$. Это возможно в следующих случаях:

если $2a+1=0$, т.е. $a=-\frac{1}{2}$, то $f(t)=-\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}>0$ при $t<1$, а надо при $t>0$. Значит, $a=-1/2$ не подходит;

если $f(t)>0\ \ \forall t\in R$, то $f(t)>0$ и $\forall t>0$. Это соответствует условию, когда парабола $f(t)$ располагается выше оси *OX*, что возможно при выполнении системы:

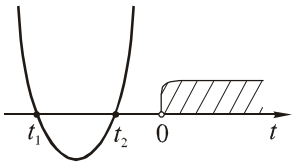
$$\begin{cases}2a+1>0,\\ D<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>-\frac{1}{2},\\ D=17a^2-10a-7<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>-\frac{1}{2},\\ a\in-\left(\frac{7}{17};1\right)\end{cases}\Rightarrow a\in\left(-\frac{7}{17};1\right).$$

При $D=0$ $t_0<0$. $D=0$ при $a=-7/17$ и $a=1$.

$t_0=-\frac{5a+1}{2(2a+1)}$ и при $a=-7/17$ $t_0=3\notin t<0$, значит, $a=-7/17$ не подходит; при $a=1$ $t_0=-1$, значит, $a=1$ подходит.

Если оба корня $f(t)$ меньше нуля, то $f(t)>0\ \ \forall t>0$. Это возможно, если выполняется условие:

$$\begin{cases}2a+1>0,\\ D>0,\\ f(0)>0,\\ -\frac{b}{2a}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>-\frac{1}{2},\\ \left[\begin{array}{l}a<-\frac{7}{17},\\ a>1,\end{array}\right.\\ a>-2,\\ -\frac{5a+1}{2(2a+1)}<0\end{cases}\Rightarrow a>1.$$



Объединяя все полученные решения, получим ответ.

Ответ: $a>-7/17$.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ВАРИАНТОВ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ

Вариант 1

1. Расстояние между двумя станциями железной дороги 96 км. Первый поезд проходит это расстояние на 40 мин скорее, чем второй. Скорость первого поезда больше скорости второго на 12 км/ч. Определите скорости обоих поездов.

2. Решите уравнение $\sin 6x - \sin 4x + \sqrt{2}\cos 5x = 0$.

3. Решите уравнение $4^{\sqrt{x}} - 9 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} + 2 = 0$.

4. Решите неравенство $4 + \log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_x 8$.

5. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 4x + 8} = 4x - x^2 - 2$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} y = \sqrt{2(|x| - x)}, \\ x = a(y-2) \end{cases}$ имеет единственное решение.

Укажите эти решения при каждом из найденных значений a.

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит равнобедренный треугольник ABC со стороной основания AC, равной 8. Высота пирамиды равна 88/45, а все боковые ребра пирамиды равны между собой. Какую наименьшую площадь может иметь треугольник AMB, если точка M лежит на прямой TC, радиус описанной около основания пирамиды окружности равен 25/6, а ее центр расположен вне треугольника ABC?

Решение варианта 1

1. t_1 ч – время, за которое первый поезд проходит 96 км, t_2 ч – время, за которое второй поезд проходит 96 км, причем $t_2 = t_1 + 40$ мин, или $t_2 = t_1 + \frac{2}{3}$ ч; v_1 км/ч – скорость первого поезда, v_2 км/ч – скорость второго поезда, причем $v_2 = v_1 - 12$ км/ч.

$$\begin{cases} v_1 t_1 = 96, \\ v_2 t_2 = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 t_1 = 96, \\ (v_1 - 12)\left(t_1 + \frac{2}{3}\right) = 96 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{96}{v_1}, \\ (v_1 - 12)\left(\frac{96}{v_1} + \frac{2}{3}\right) = 96 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (v_1 - 12)\left(\frac{96 \cdot 3 + 2v_1}{3v_1}\right) = 96 \Leftrightarrow (v_1 - 12)(96 \cdot 3 + 2v_1) = 96 \cdot 3v_1 \Leftrightarrow$$

Ягубов.РФ

$\Leftrightarrow 96\cdot 3\upsilon_1 - 96\cdot 3\cdot 12 + 2\upsilon_1^2 - 24\upsilon_1 = 96\cdot 3\upsilon_1 \Leftrightarrow \upsilon_1^2 - 12\upsilon_1 - 1728 = \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \upsilon_1 = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 + 4\cdot 1728}}{2} = \dfrac{12 \pm \sqrt{7056}}{2} = 6 \pm 42 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \upsilon_1 = 48, \\ \upsilon_1 = -36. \end{array}\right.$

Корень $\upsilon_1 = -36$ не подходит по смыслу задачи; выбираем $\upsilon_1 = 48$, отсюда $\upsilon_2 = \upsilon_1 - 12 = 48 - 12 = 36$.

Ответ: $\upsilon_1 = 48$ км/ч; $\upsilon_2 = 36$ км/ч.

2. $\sin 6x - \sin 4x + \sqrt{2}\cos 5x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 5x \quad \sin x + \sqrt{2}\cos 5x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 5x\left(2\sin x + \sqrt{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 5x = 0, \\ \sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = (-1)^k\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + \pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5}, \\ x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi k, \end{array}\right. \quad n,\ k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $\left\{\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5};\ (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{4} + \pi k\right\};\ n,\ k \in \mathbb{Z}$.

3. $4^{\sqrt{x}} - 9\cdot 2^{\sqrt{x}-1} + 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2\sqrt{x}} - 9\cdot 2^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2} + 2 = 0$. ОДЗ: $x \ge 0$.

Введем вспомогательную переменную $t = 2^{\sqrt{x}}$, причем $t \ge 1$, так как $\sqrt{x} \ge 0$. Тогда получим

$\left\{\begin{array}{l} t \ge 1, \\ t^2 - \dfrac{9}{2}t + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t \ge 1, \\ 2\ \ t^2 - 9\ \ t + 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t \ge 1, \\ t_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81 - 4\cdot 4\cdot 2}}{4} = \dfrac{9 \pm 7}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t \ge 1, \\ \left[\begin{array}{l} t = 4, \\ t = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow t = 4 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x}} = 4 \Leftrightarrow 2^{\sqrt{x}} = 2^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4.$

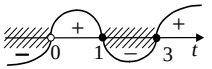
Ответ: $\{4\}$.

4. $4 + \log_{\frac{1}{2}} x \ge \log_x 8$ ОДЗ: $x > 0$, $x \ne 1$.

Приведем к одинаковому основанию: $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{(2)^{-1}} x = (-1)\log_2 x$;

$\log_x 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 x} = \dfrac{3}{\log_2 x}$, получим $4 - \log_2 x \ge \dfrac{3}{\log_2 x}$. Введем вспомогательную переменную $\log_2 x = t$, тогда получим $4 - t \ge \dfrac{3}{t} \Leftrightarrow \dfrac{4t - t^2 - 3}{t} \ge 0 \Leftrightarrow$

$\dfrac{t^2 - 4t + 3}{t} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(t-1)(t-3)}{t} \le 0$



получаем: $t \in (-\infty; 0) \cup [1; 3] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < 0, \\ \left\{\begin{array}{l} t \ge 1, \\ t \le 3 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x < 0, \\ \left\{\begin{array}{l} \log_2 x \ge 1, \\ \log_2 x \le 3 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1, \\ \left\{\begin{array}{l} x \ge 2, \\ x \le 8 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (0;1) \cup [2;8].$

Ответ: $x \in (0;1) \cup [2;8]$.

5. $\sqrt{x^2 - 4x + 8} = 4x - x^2 - 2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 8} = -(x^2 - 4x + 2)$.

Введем вспомогательную переменную $t = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$, причем $t \ge 0$. Тогда получим

$\left\{\begin{array}{l} t \ge 0, \\ \sqrt{t+4} = -(t-2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t \ge 0, \\ -(t-2) \ge 0, \\ t + 4 = (t-2)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t \ge 0, \\ t \le 2, \\ t^2 - 5t = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t \ge 0, \\ t \le 2, \\ \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = 5 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

Ответ: $\{2\}$

6. Решение заданной системы разделяется на две части: а) при $x \ge 0$, и б) при $x < 0$.

а) $\left\{\begin{array}{l} y = \sqrt{2(|x| - x)}, \\ x = a(y-2), \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \ge 0, \\ y = \sqrt{2\ \ (x - x)}, \\ x = a(y-2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \ge 0, \\ y = 0, \\ x = -2a \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2a \ge 0 \Leftrightarrow a \le 0$, т.е. при $a \le 0$ одно решение $x = -2a$, $y = 0$.

$$\begin{cases} x < 0, \\ y = \sqrt{2(-x-x)}, \\ x = a(y-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ y = 2\sqrt{(-x)}, \\ x = a(y-2). \end{cases}$$

Введем вспомогательную переменную $\sqrt{(-x)} = t$, причем $t > 0$, тогда $x = -t^2$. Отсюда получим

$$\begin{cases} x < 0, \\ t > 0, \\ \sqrt{(-x)} = t, \\ y = 2t, \\ -t^2 = a(2t-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ t > 0, \\ \sqrt{(-x)} = t, \\ y = 2t, \\ t^2 + 2at - 2a = 0. \end{cases}$$

Требуется структурное решение.

Найдем одно решение: $D = 4a^2 + 8a = 4a(a+2) = 0$.

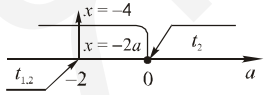
$$\left[\begin{array}{lll} \begin{cases} D = a^2 + 2a = 0 \\ t_в = -a > 0 \end{cases} & \begin{cases} a = 0, \ a = -2, \text{ подходит } a = -2. \\ t_в = -a > 0 \end{cases} & \\ f(0) = -2a < 0 & a > 0 & t_2 = -a + \sqrt{a^2 + 2a} \\ \begin{cases} f(0) = 0 \\ t_1 = 0, \ t_2 > 0 \end{cases} & a = 0 & t = 0, \text{ т.е. не подходит.} \end{array}\right.$$

Итак, одно решение $\forall a \in \{-2\} \cup (0; +\infty) \quad t_2 = -a + \sqrt{a^2 + 2a}$.

Найдем два решения:

$$\begin{cases} D = a(a+2) > 0 \\ t_в = -a > 0 \\ f(0) = -2a > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a \in \left[\begin{array}{l} a < -2 \\ a > 0 \end{array}\right. \\ a < 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -2) \\ a < 0 \end{cases} \quad t_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 + 2a}.$$

Нанесем все полученные решения на числовую ось параметра:

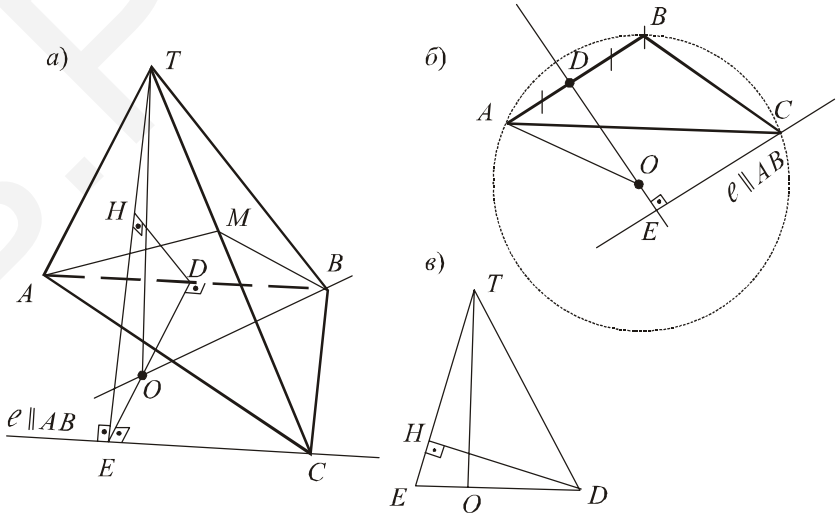


Ответ: $a \in (-2; 0]$ $x = -2a$, $y = 0$; $a > 0$ $x = -2a(a+1) + \sqrt{a^2 + 2a}$, $y = -2a + 2\sqrt{a^2 + 2a}$.

7. $AC = 8$, высота $TO = \frac{88}{45}$, $TA = TB = TC$, $AO = BO = CO = \frac{25}{6}$.

$S_{\Delta AMB} = \frac{1}{2} AB \cdot h_M$. $AB - \text{const}$, $\min h_M = \rho(AB; TC)$.

Через точку C проведем $\ell \parallel AB$. Через точку O проведем плоскость, перпендикулярную плоскости $TC\ell$. Для этого проведем перпендикуляр OE и продлим его до пересечения с AB в точке D. Тогда, так как O – центр описанного около ABC круга, то D – середина AB. $TE \perp \ell$ по теореме о трех перпендикулярах, плоскость $TEO \perp TC\ell$ и DH – расстояние между скрещивающимися AB и TC, тогда $h_M = DH$.



Из $\Delta AKO \Rightarrow \quad KO = \sqrt{AO^2 - AK^2} = \sqrt{\frac{625}{36} - 16} = \frac{7}{6}$.

$BK = BO - KO = \frac{25}{6} - \frac{7}{6} = 3$, тогда $AB = 5$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK = \frac{1}{2} AB \cdot DE$, $8 \cdot 3 = 5DE$, $DE = \frac{24}{5}$.

Из $\Delta ADO \Rightarrow \quad DO = \sqrt{\frac{625}{36} - \frac{25}{4}} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$.

Из $\Delta TED \Rightarrow S_\Delta = \frac{1}{2} ED \cdot TO = \frac{1}{2} TE \cdot DH$. $\frac{24}{5} \cdot \frac{88}{45} = TE \cdot DH$.

дубов.by

Из $\Delta TOE \Rightarrow \;\; TE = \sqrt{\left(\frac{24}{5} - \frac{10}{3}\right)^2 + \frac{88^2}{45^2}} = \frac{22}{9}$.

$$DH = \frac{24 \cdot 88 \cdot 9}{5 \cdot 45 \cdot 22} = \frac{24 \cdot 4}{25} = \frac{96}{25}. \quad S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{96}{25} = \frac{48}{5}.$$

Ответ: $\frac{48}{5}$ кв.ед.

Вариант 2

1. Два насоса, работая одновременно, могут выкачать воду из котлована за 3 ч 36 мин. Один первый насос затратит на эту работу на 3 ч больше, чем один второй. За какое время может выкачать воду каждый насос?

2. Решите уравнение $(\cos 2x - \sin 2x)^2 = 2\cos^2 x$.

3. Решите уравнение $\lg(x-2) + \lg(x-3) = 1 - \lg 5$.

4. Решите неравенство $\frac{\sqrt{1+2x}}{3x^2 - 2x - 1} > 0$.

5. При каких значениях параметра p графики функций $y = x^2 + 4p + 2$ и $y = -x^2 + px + p^2$ имеют только одну общую точку? Найдите ее.

6. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases} x + 4y - 2a + 2 = 0, \\ (|x| + x)(y - a) = 2 \end{cases}$ имеет решение.

7. Найдите площадь сечения правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через центр симметрии боковой грани ABB_1A_1 и вершину C и параллельной диагонали боковой грани AC_1, если расстояние между AC_1 и секущей плоскостью равно 2, а сторона основания призмы равна $2\sqrt{14}$.

Решение варианта 2

1. t_1 мин – время, за которое первый насос может выкачать всю воду, t_2 мин – время, за которое второй насос может выкачать всю воду, причем $t_2 = t_1 - 3$ ч или $t_2 = t_1 - 180$ мин, очевидно, что $t_1 > 180$.

$T = 3$ ч 36 мин $= 216$ мин – время, за которое насосы выкачают всю воду, работая вместе. Примем объем всей работы равной 1; $p_1 = \frac{1}{t_1}$ –

производительность первого насоса, $p_2 = \frac{1}{t_2} = \frac{1}{t_1 - 180}$ – производительность второго насоса. Тогда $\frac{1}{p_1 + p_2} = T \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_1 - 180}} = 216 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(t_1 - 180)t_1}{t_1 - 180 + t_1} = 216 \Leftrightarrow t_1^2 - 612\,t_1 + 38\,880 = - \Leftrightarrow$$

$$= t_1 = \frac{612 \pm \sqrt{374\,544 - 4 \cdot 38\,880}}{2} = \frac{612 \pm 468}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 540, \\ t_1 = 72. \end{array}\right.$$

Очевидно, что решение $t_1 = 72$ не подходит по смыслу задачи. Тогда $t_1 = 540$ мин $= 9$ ч, $t_2 = 540 - 180 = 360$ мин $= 6$ ч.

Ответ: первый – за 9 ч, второй – за 6 ч.

2. $(\cos 2x - \sin 2x)^2 = 2\cos^2 x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x + \sin^2 2x - 2\cos 2x \sin 2x = \cos 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\cos 2x \sin 2x - \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(2\sin 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0, \\ \sin 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ 2x = (-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \end{array}\right. \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2};\; (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}\right\}$; $n, k \in \mathbb{Z}$.

3. $\lg(x-2) + \lg(x-3) = 1 - \lg 5 \Leftrightarrow \lg(x-2) + \lg(x-3) = \lg 2 \Leftrightarrow$

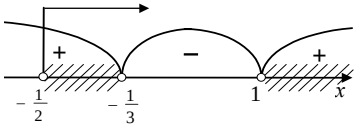
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 > 0, \\ x - 3 > 0, \\ \lg(x-2)(x-3) = \lg 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ (x-2)(x-3) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Ответ: $\{4\}$.

ЯГУБОВ.РФ

4. $\dfrac{\sqrt{1+2x}}{3x^2-2x-1}>0 \Leftrightarrow \begin{cases}1+2x>0,\\ 3x^2-2x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>-\dfrac{1}{2},\\ \left(x+\dfrac{1}{3}\right)(x-1)>0,\end{cases}$

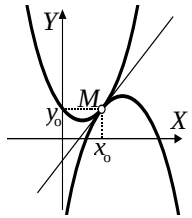


получим: $x\in(-1/2;-1/3)\cup(1;\infty)$.

Ответ: $x\in(-1/2;-1/3)\cup(1;\infty)$

5. I способ решения

В точке касания графиков функций их производные равны, так как у них общая касательная;



$y_1=x^2+4p+2$, $y_2=-x^2+px+p^2$,

$y_1'=2x$, $y_2=-2x+p \Rightarrow$

$y_1'=y_2' \Leftrightarrow 2x_0=-2x_0+p \Leftrightarrow x_0=\dfrac{p}{4}$.

В точке касания значения функций равны, тогда

$y_1=y_2 \Leftrightarrow x^2+4p+2=-x^2+px+p^2 \Leftrightarrow 2x^2-px-p^2+4p+2=0$.

Подставляя x_0 в полученное уравнение, вычислим p:

$$2\left(\frac{p}{4}\right)^2-p\frac{p}{4}-p^2+4p+2=0 \Leftrightarrow 2\frac{p^2}{16}-\frac{p^2}{4}-p^2+4p+2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9p^2-32p-16=0 \Leftrightarrow p=\frac{32\pm\sqrt{1024+4\cdot9\cdot16}}{18} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}p=4,\\ p=-\dfrac{4}{9}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x_0=1,\ y_0=19,\\ x_0=-\dfrac{1}{9},\ y_0=\dfrac{19}{81}.\end{array}\right.$$

Ответ: при $p=4$ $M(1;19)$; при $p=-\dfrac{4}{9}$ $M\left(-\dfrac{1}{9};\dfrac{19}{81}\right)$.

II способ решения

Если графики функций пересекаются и как крайний случай – касаются, то значения функций в точках пересечения (касания) равны.

Тогда $x^2+4p+2=-x^2+px+p^2 \Leftrightarrow 2x^2-px-p^2+4p+2=0$.

$$D=p^2+4\left(p^2-4p-2\right)2=9p^2-32p-16=9\left(p+\frac{4}{9}\right)(p-4).$$

Если $D=0$, то уравнение имеет одно решение, а графики функций касаются и имеют одну общую точку. Тогда

$$D=0 \Leftrightarrow 9\left(p+\frac{4}{9}\right)(p-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}p=4 \Rightarrow x_0=1,\ y_0=19,\\ p=-\dfrac{4}{9} \Rightarrow x_0=-\dfrac{1}{9},\ y_0=\dfrac{19}{81}.\end{array}\right.$$

Ответ: при $p=4$ $M(1;19)$; при $p=-\dfrac{4}{9}$ $M\left(-\dfrac{1}{9};\dfrac{19}{81}\right)$.

6. Очевидно, что при $x\le 0$ второе уравнение системы обращается в неверное равенство, а при $x>0$ могут быть решения.

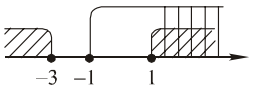
$$\begin{cases}x+4y-2a+2=0,\\ \left(|x|+x\right)(y-a)=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0,\\ x+4y-2a+2=0,\\ 2x(y-a)=2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>0,\\ x+4\dfrac{1+ax}{x}-2a+2=0,\\ y=\dfrac{1+ax}{x}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0,\\ x^2+4+4ax-2ax+2x=0,\\ y=\dfrac{1+ax}{x}\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x>0,\\ x^2+2(a+1)x+4=0,\\ y=\dfrac{1+ax}{x}.\end{cases}$$

Решим по схеме «*A* минус *B*» (см. с.77).

$$\begin{cases}D=(a+1)^2-4=a^2+2a-3\ge 0,\\ x_в=-(a+1)\le 0\\ f(0)=4>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=-3,\\ a\ge 1\end{array}\right.\\ a\ge -1\end{cases}$$



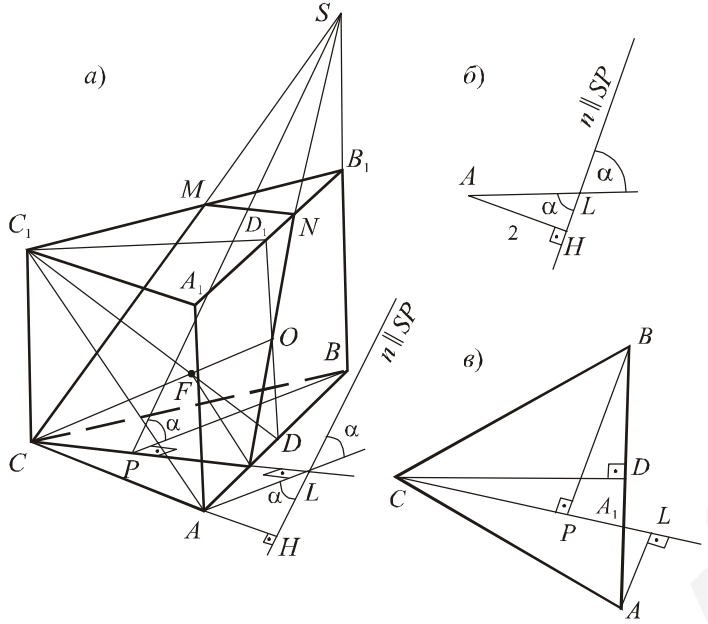
Ответ: $a\le -3$.

7. Построение сечения.

Переносим AC_1 в плоскости ΔAC_1D параллельно себе в точку *F*, получим отрезок FA_1. Тогда плоскость задается двумя пересекающимися прямыми *CO* и FA_1. Проведем прямую через A_1 и *O* до пересечения в точке *S* с продолжением ребра BB_1. Проведем *SC* и сечение – фигура $CMNA_1$.

Построение расстояния ρ.

По построению AC_1 параллельна SCA_1. Значит, надо построить расстояние от любой точки AC_1 до плоскости, например от точки A. Опустим перпендикуляр AL на CA_1, из точки L по плоскости SCA_1 проведем перпендикуляр n, тогда расстояние – это перпендикуляр AH на n, т.е. $AH = 2$.



Вычисления.

Точка F – это точка пересечения медиан CO и MD в ΔCDD_1, значит, $FD = \frac{1}{3}C_1D$. Тогда и $A_1D = \frac{1}{3}AD$, а $AA_1 = \frac{1}{3}AB = \frac{2\sqrt{14}}{3}$. Очевидно, что $NB_1 = AA_1$, и NB_1 – средняя линия ΔSBA_1. Тогда $\Delta SMN \sim \Delta SCA_1$ с коэффициентом подобия 1/2. Значит, $\frac{S_{\Delta SMN}}{S_{\Delta SCA_1}} = \frac{1}{4}$.

$$S_{\text{сеч}} = S_{\Delta SCA_1} - S_{\Delta SMN} = S_{\Delta SCA_1} - \frac{1}{4}S_{\Delta SCA_1} = \frac{3}{4}S_{\Delta SCA_1}.$$

По теореме cos из $\Delta CAA_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow CA_1 = \sqrt{4\cdot 14 + \frac{4\cdot 14}{3} - 2\cdot 2\sqrt{14}\cdot\frac{\sqrt{14}}{3}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{392}}{3}$$ (или из ΔCDA_1 по теореме Пифагора, так как $DA_1 = \frac{AB}{6}$).

$S_{ACA_1} = \frac{1}{2}CA_1\cdot AL = \frac{1}{2}AC\cdot AA_1\sin 60°$.

$\frac{\sqrt{392}}{3}AL = 2\sqrt{14}\cdot\frac{2\sqrt{14}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. $AL = \sqrt{6}$, $BP = 2\sqrt{6}$, $SP = \frac{PB}{\cos\alpha}$.

$\sin\alpha = \frac{AH}{AL} = \frac{2}{\sqrt{6}}$; $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{4}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $SP = 6\sqrt{2}$.

$S_{\Delta CSA_1} = \frac{1}{2}CA_1\cdot SP = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{392}}{3}\cdot 6\sqrt{2} = 28$.

$S_{\text{сеч}} = \frac{3}{4}\cdot 28 = 21$.

Ответ: 21 кв.ед.

Вариант 3

1. Если сначала половину работы выполнит один рабочий, а потом другую половину – второй, то вся работа будет выполнена за 2 ч. Если же первый рабочий выполнит одну треть работы, а потом оставшуюся часть выполнит второй, то вся работа будет сделана за 2 ч 10 мин. За сколько времени каждый рабочий отдельно может выполнить всю работу?

2. Решите уравнение $\sqrt{6}\sin x + \sqrt{3\sin 2x} = 0$.

3. Решите уравнение $3^{1+\sqrt{x}} + 3^{2-\sqrt{x}} = 28$.

4. Решите неравенство $(x-2)\ln\frac{x}{x-1} > 0$.

5. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 11$ на отрезке $[-1;3]$.

6. Укажите все значения параметра a, при которых система уравнение $\begin{cases} x^2 - 2x + y = 0, \\ \log_2(4x - y - 3a) = 2 + \log_2(x - y) \end{cases}$ имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого a.

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит правильный треугольник со стороной, равной 4, а ее высота проходит через середину стороны AB основания. Вычислить площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей

ЯКУБОВ.РФ

через боковое ребро TA и параллельной прямой, соединяющей середину высоты пирамиды и середину стороны основания BC, если расстояние от этой прямой до плоскости равно 1/3.

Решение варианта 3

1. t_1 ч – время, за которое первый рабочий выполнит всю работу. t_2 ч – время, за которое второй рабочий выполнит всю работу.

Если принять объем всей работы за 1, то $\dfrac{1}{t_1}$ – производительность первого рабочего, $\dfrac{1}{t_2}$ – производительность второго рабочего. Так как 2 ч 10 мин равно $2\dfrac{1}{6}$ ч, получаем систему:

$$\begin{cases} 0{,}5\cdot t_1+0{,}5\cdot t_2=2, \\ \dfrac{1}{3}\cdot t_1+\dfrac{2}{3}\cdot t_2=2\dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1+t_2=4, \\ 2t_1+4t_2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=\dfrac{3}{2}, \\ t_2=\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$$

$t_1=\dfrac{3}{2}$ ч $=1$ ч 30 мин, $t_2=\dfrac{5}{2}$ ч $=2$ ч 30 мин.

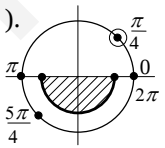
***Ответ*:** первый – за 1 ч 30 мин, второй – за 2 ч 30 мин.

2. $\sqrt{6}\sin x+\sqrt{3\sin 2x}=0 \Leftrightarrow \sqrt{3\sin 2x}=-\sqrt{6}\sin x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sin x\ge 0, \\ 3\sin 2x=6\sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\le 0, \\ 6\sin x\ \cos x=6\sin^2 x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\le 0 \\ 6\sin x(\cos x-\sin x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\le 0, \\ 6\sin x\ \ (1-\operatorname{tg} x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x\le 0, \\ \sin x=0, \\ \operatorname{tg} x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \pi+2\pi n\le x\le 2\pi+2\pi n, \\ \left[\begin{array}{l} x=\pi k, \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi m \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi k, \\ x=\dfrac{5\pi}{4}+2\pi m, \end{array}\right. \quad (n,\ k,\ m\in\mathbb{Z}).$$



***Ответ*:** $x=\pi k$; $x=\dfrac{5\pi}{4}+2\pi m$, $k;\ m\in\mathbb{Z}$.

3. $3^{1+\sqrt{x}}+3^{2-\sqrt{x}}=28 \Leftrightarrow 3\cdot 3^{\sqrt{x}}+\dfrac{9}{3^{\sqrt{x}}}=28$. ОДЗ: $x\ge 0$.

Введем вспомогательную переменную $3^{\sqrt{x}}=t$, причем $t\ge 1$.

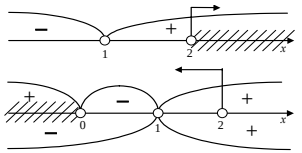
Тогда $\begin{cases} t\ge 1, \\ 3t+\dfrac{9}{t}=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 1, \\ 3t^2-28t+9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\ge 1, \\ t=9, \\ t=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow t=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{\sqrt{x}}=3^2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$.

***Ответ*:** $\{4\}$.

4. $(x-2)\ln\dfrac{x}{x-1}>0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2>0, \\ \ln\dfrac{x}{x-1}>0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-2<0, \\ \ln\dfrac{x}{x-1}<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2, \\ \dfrac{x}{x-1}>1, \end{cases} \\ \begin{cases} x<2, \\ 0<\dfrac{x}{x-1}<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>2, \\ \dfrac{1}{x-1}>0, \end{cases} \\ \begin{cases} x<2, \\ \dfrac{x}{x-1}>0, \\ \dfrac{1}{x-1}<0, \end{cases} \end{array}\right.$$



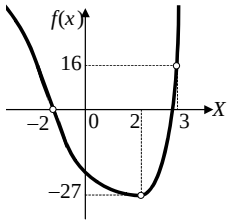
получим:

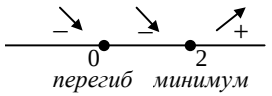
$\left[\begin{array}{l} x>2, \\ x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;\ 0)\cup(2;\ \infty)$.

***Ответ*:** $\in(-\infty;\ 0)\cup(2;\ \infty)$.

5. Определим экстремумы функции:

$f'(x)=12x^3-24x^2=23x^3(x-2) \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2, \end{array}\right.$





тогда точка с абсциссой $x=0$ – точка перегиба, а точка с абсциссой $x=2$ – точка min. Вычислим значения функции в точке минимума и на концах промежутка:

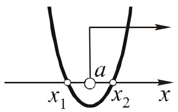
$f(-1)=0$, $f(2)=-27$, $f(3)=16$.

Тогда $f(2)=-27$ – наименьшее, $f(3)=16$ – наибольшее значения функции на заданном промежутке.

Ответ: $\min\limits_{[-1;\ 3]} f(x)=f(2)=-27$, $\max\limits_{[-1;\ 3]} f(x)=f(3)=16$.

6. $\begin{cases} x^2-2x+y=0, \\ \log_2(4x-y-3a)=2+\log_2(x-y) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+y=0, \\ \begin{cases} x-y>0, \\ 4x-y-3a=4(x-y) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+a=0, \\ y=a, \\ x>y, \\ x>a \end{cases}$$



Из схемы видно, что единственное решение будет при $x_1 \le a$ и $x_2 > a$.

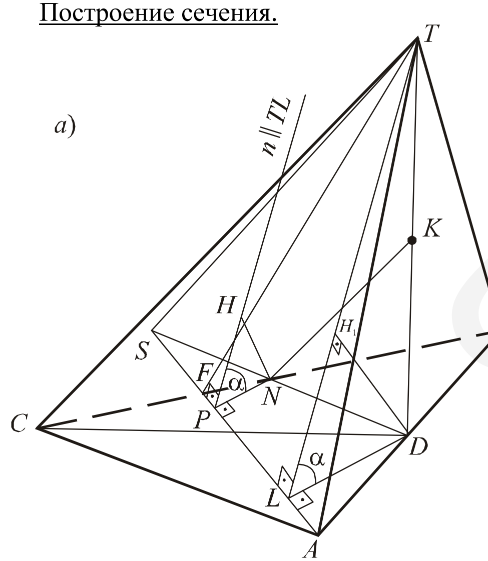
Необходимое и достаточное условие этого: $f(a)\le 0$ $\quad x_2 \ne a$.

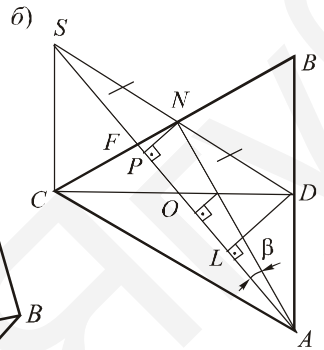
$f(a)=a^2-2a+a\le 0$ $\quad a\in[0;1)$; корни $x_2=1+\sqrt{1-a}$ $\quad y=a$.

Ответ: $a\in[0;1)$, $x=1+\sqrt{1-a}$, $y=a$.

7. *KN* – прямая, соединяющая середины *TD* и *BC*.

Построение сечения.





В плоскости треугольника *TDN* переносим *KN* параллельно себе в точку *T*. Получим *TS*, причем $SN=ND$. SA – линия пересечения построенной плоскости с плоскостью основания. Тогда ΔTAF – искомое сечение.

$$S_{\text{сеч}}=\frac{1}{2}AF\cdot TL.$$

Построение расстояния от *KN* до плоскости *TAF*. Опустим перпендикуляр *NP*, восстановим перпендикуляр *n* параллельно *TL*, тогда $NH=1/3$. Из ΔSDL видно, что $DL=2NP$, значит, $DH_1=2NH=2/3$. Эта догадка упрощает решение.

Вычисления.

$CD=2\sqrt{3}$, $OD=\dfrac{CD}{2}$, $AD=2$.

Из $\Delta AOD \Rightarrow$ $LD=\dfrac{\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{3+4}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $NP=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$.

Из $\Delta H_1DL \Rightarrow$ $\sin\alpha=\dfrac{DH_1}{LD}=\dfrac{2\cdot\sqrt{7}}{3\cdot 2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$,

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{7}{27}}=\sqrt{\dfrac{20}{27}}$.

$TL=\dfrac{LD}{\cos\alpha}=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{20}}=\dfrac{9}{\sqrt{35}}$.

Вычислим длину $AF=\dfrac{AN}{\cos\beta}$ (см. рис. *б*).

Из $\Delta ANP \Rightarrow$ $\sin\beta=\dfrac{NP}{AN}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$,

$\cos\beta=\sqrt{1-\dfrac{1}{28}}=\sqrt{\dfrac{27}{28}}$, $AF=\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{28}}{\sqrt{27}}=\dfrac{4\sqrt{7}}{3}$.

$S_{\text{сеч}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\sqrt{7}\cdot 9}{3\cdot\sqrt{35}}=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $\dfrac{6}{\sqrt{5}}$ кв.ед.

P.S. В ΔSCD точка *F* – это точка пересечения медиан *CN* и *SO*. Тогда $CF=\dfrac{2}{3}CN$, а $FN=\dfrac{CN}{3}$. Из $\Delta ANF \Rightarrow AF=\sqrt{AN^2+FN^2}$.

ЯГубов.РФ

Вариант 4

1. Скорость первой машины на 10 км/ч больше скорости второй машины, и поэтому на путь в 560 км она затрачивает на 1 ч меньше, чем вторая. Найдите скорость первой машины.

2. Решите уравнение $2\sin^2 x+\cos^2 x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin x$.

3. Решите уравнение $2^{x^2+2}+2^{1-x^2}=9$.

4. Решите неравенство $\dfrac{2}{1+\lg x}<1$.

5. Решите уравнение $2|x-3|+x-1+2\sin\dfrac{\pi x}{2}=0$.

6. Укажите все значения параметра a, при которых система уравнений $\begin{cases}x=\sqrt{y+a-4},\\ x+y=a\end{cases}$ имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом a.

7. Шар касается каждой из плоскостей, в которых лежат грани прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в вершине A (при этом шар и параллелепипед расположены по одну сторону каждой из этих плоскостей). Второй шар касается каждой из плоскостей, в которых лежат грани параллелепипеда, сходящиеся в вершине C_1, где AC_1 – диагональ параллелепипеда (второй шар и параллелепипед расположены по одну сторону каждой из плоскостей, проходящих через точку C_1). Известно, что шары могут касаться друг друга, но не могут иметь более одной общей точки. Чему равна высота параллелепипеда, если стороны основания $a=3$ и $b=12$? При каких радиусах шары касаются друг друга?

Решение варианта 4

1. v_1 км/ч – скорость первой машины, v_2 км/ч – скорость второй машины, причем $v_2=v_1-10$ км/ч. Очевидно, что $v_1>10$. $S=560$ км – весь путь. t_1 ч – время, за которое первая машина проходит весь путь, t_2 ч – время, за которое вторая машина проходит весь путь, причем $t_2=t_1+1$ ч.

$$\begin{cases}S=v_1t_1,\\ S=v_2t_2,\end{cases}\Leftrightarrow v_1t_1=v_2t_2\Leftrightarrow v_1t_1=(v_1-10)(t_1+1).$$

Если $t_1=\dfrac{S}{v_1}=\dfrac{560}{v_1}$, то, подставляя в полученное уравнение, получим

$$v_1\frac{560}{v_1}=(v_1-10)\left(\frac{560}{v_1}+1\right)\Leftrightarrow 560=(v_1-10)\left(\frac{560+v_1}{v_1}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 560v_1=560v_1-5600+v_1^2-10v_1\ \Leftrightarrow\ v_1^2-10v_1-5600=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v_1=\frac{10\pm\sqrt{100+4\cdot5600}}{2}=\frac{10\pm150}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v_1=80\\ v_1=-70\end{array}\right.\Leftrightarrow\ v_1=80,\ v_2=70.$$

Ответ: $v_1=80$ км/ч, $v_2=70$ км/ч.

2. $2\sin^2 x+\cos^2 x=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin x\Leftrightarrow\sin^2 x+1-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin x=0$.

Введем вспомогательную переменную $t=\sin x$, причем $|t|\le1$. Тогда

$$\begin{cases}|t|\le1,\\ t^2-\dfrac{3}{\sqrt{2}}t+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|t|\le1,\\ \sqrt{2}t^2-3t+\sqrt{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|t|\le1,\\ t=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\cdot2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3\pm1}{2\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|t|\le1,\\ \left[\begin{array}{l}t=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},\\ t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow t=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\ x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n;\ n\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\ n\in\mathbb{Z}$.

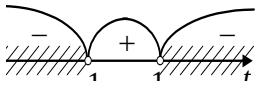
3. $2^{x^2+2}+2^{1-x^2}=9\ \Leftrightarrow\ 4\cdot2^{x^2}+\dfrac{2}{2^{x^2}}=9$. Введем вспомогательную переменную $t=2^{x^2}$, причем $t\ge1$ (так как $x^2\ge0$). Тогда получим

$$\begin{cases}t\ge1,\\ 4t+\dfrac{2}{t}=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge1,\\ 4t^2-9t+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge1,\\ t=\dfrac{9\pm\sqrt{91-4\cdot4\cdot2}}{8}=\dfrac{3\pm7}{8}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge1,\\ \left[\begin{array}{l}t=2,\\ t=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow\ 2^{x^2}=2\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow\ |x|=1\Leftrightarrow x=\pm1.$$

Ответ: $\{\pm1\}$.

4. $\dfrac{2}{1+\lg x}<1$. Пусть $\lg x=t$, тогда $\dfrac{2}{1+t}<1$ или $\dfrac{1-t}{1+t}<0\Rightarrow$



получим:

$$\left[\begin{array}{l} t>1,\\ t<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x>1,\\ \lg x<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>10,\\ 0<x<0{,}1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(0;\,0{,}1)\cup(10;\,\infty)$.

5. $2|x-3|+x-1+2\sin\dfrac{\pi x}{2}=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{2\ |x-3|+x-1}{2}=\sin\frac{\pi x}{2}\ \Leftrightarrow\ \frac{1-x-2|x-3|}{2}=\sin\frac{\pi x}{2}.$$

Обозначим $\dfrac{1-x-2|x-3|}{2}=f(x)$ и $\sin\dfrac{\pi x}{2}=g(x)$, тогда исходное уравнение равносильно $f(x)=g(x)$, но $-1\le g(x)\le 1$, отсюда и $-1\le f(x)\le 1$.

Решим последнее неравенство:

$$-1\le\frac{1-x-2|x-3|}{2}\le 1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3\ge 0,\\ -1\le\dfrac{1-x-2(x-3)}{2}\le 1,\end{cases}\\ \begin{cases}x-3<0,\\ -1\le\dfrac{1-x+2(x-3)}{2}\le 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3,\\ -1\le\dfrac{7\ -3x}{2}\le 1,\end{cases}\\ \begin{cases}x<3,\\ -1\le\dfrac{x-5}{2}\le 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 3,\\ \dfrac{5}{3}\le x\le 3,\end{cases}\\ \begin{cases}x<3,\\ 3\le x\le 7\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \varnothing\end{array}\right.\Leftrightarrow\ x=3.$$

Теперь проверим, будет ли $x=3$ решением исходного уравнения:

$2|3-3|+3-1+2\sin\dfrac{\pi\cdot 3}{2}=2\cdot 0+3-1+2\cdot(-1)=0$ – верно.

Ответ: $\{3\}$.

6. $\begin{cases}x=\sqrt{y+a-4},\\ x+y=a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{a-x+a-4},\\ y=a-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ x^2=2a-x-4,\\ y=a-x\end{cases}\Leftrightarrow$

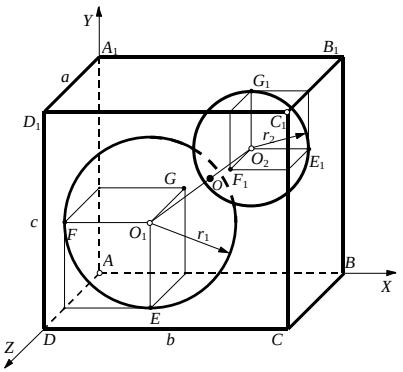
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ x^2+x-2a+4=0,\\ y=a-x.\end{cases}\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}D=8a-15=0\\ x=-\dfrac{1}{2}>0\end{cases} & a\in\varnothing\\ f(0)=-2a+4<0 & a>2\\ \begin{cases}f(0)=0\\ x_1<0,\ x_2=0\end{cases} & a=2.\end{array}\right.$$

Тогда $x=\dfrac{-1+\sqrt{8a-15}}{2}=\dfrac{\sqrt{8a-15}-1}{2}$;

$$y=a-x=a-\frac{\sqrt{8a-15}-1}{2}=\frac{2a+1-\sqrt{8a-15}}{2}.$$

Ответ: $a\in[2;\,\infty)$, $x=\dfrac{\sqrt{8a-15}-1}{2}$, $y=\dfrac{2a+1-\sqrt{8a-15}}{2}$.

7. При решении задач такого типа нужно обратить внимание на то, что шары касаются не граней параллелепипеда, а плоскостей, в которых лежат грани. Это означает, что шары могут иметь диаметры большие, чем меньшая сторона параллелепипеда, т.е. шары могут пересекать грани, не оговоренные в условии задачи. Другими словами, каждый шар касается трех взаимноперпендикулярных плоскостей, проходящих через точку A или через точку C_1, соответственно.



Для решения используем координатный метод, расположив начало координат в точке A, а оси направив вдоль ребер параллелепипеда.

Обозначим высоту параллелепипеда $DD_1=c$.

В выбранной системе координат центры шаров имеют координаты: $O_1(x_1;\,y_1;\,z_1)$, $O_2(x_2;\,y_2;\,z_2)$, или, учитывая радиусы шаров, соответственно:

ЯГУБОВ.РФ

$O_1(r_1; r_1; r_1)$, $O_2(b-r_2; c-r_2; a-r_2)$. Точки E, F, G и E_1, F_1, G_1 – точки касания шаров с соответствующими плоскостями, точка O – точка касания шаров.

Расстояние между центрами шаров $O_1O_2 = r_1 + r_2$.

С другой стороны, $O_1O_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow O_1O_2^2 = (r_1 - (b - r_2))^2 + (r_1 - (c - r_2))^2 + (r_1 - (a - r_2))^2$.

Обозначим расстояние $O_1O_2 = r_1 + r_2 = t$, очевидно, что $t > 0$. Тогда получим систему: $\begin{cases} O_1O_2 = r_1 + r_2 = t, \\ O_1O_2^2 = (t-b)^2 + (t-c)^2 + (t-a)^2 \end{cases}$ $(*) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^2 = t^2 + t^2 + b^2 + c^2 + a^2 - 2bt - 2ct - at \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2t^2 - 2(a+b+c)t + (a^2 + b^2 + c^2)$. $(**)$

Система уравнений $(*)$ имеет решения, если полученное уравнение $(**)$ имеет хотя бы одно положительное решение.

Так как все рассматриваемые в задаче величины больше нуля, а величина c выступает в роли параметра, то для $t > 0$ требуется определить, при каких значениях параметра c уравнение $(**)$ имеет положительный корень. Это условие выполняется, если больший корень больше нуля.

$D = 4(a+b+c)^2 - 4 \cdot 2(a^2 + b^2 + c^2) = -4\left(c^2 - 2(a+b)c + (a-b)^2\right)$.

Подставляя заданные значения $a = 3$ и $b = 12$, получим:

$2t^2 - 2(15+c)t + (153 + c^2) = 0$ $(***) \Leftrightarrow t^2 - \frac{15+c}{2}t + \frac{153+c^2}{2} = 0$.

$D = -4\left(c^2 - 30c + 81\right) = -4(c-3)(c-27)$.

Для уравнения $(***)$ больший корень равен

$t_1 = \frac{2(15+c) + \sqrt{-4(c^2 - 30c + 81)}}{4} = \frac{(15+c) + \sqrt{-c^2 + 30c - 81}}{2} > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{-c^2 + 30c - 81} > -c - 15 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -c - 15 > 0, \\ -c^2 + 30c - 81 > (c+15)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} -c - 15 < 0, \\ -c^2 + 30c - 81 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} c < -15, \\ c^2 + 153 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} c > -15, \\ (c-3)(c-27) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing, \\ \begin{cases} c > -15, \\ c \in [3; 27] \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow c \in [3; 27]$.

Заметим также, что произведение корней уравнения $(***)$ $(153 + c^2) > 0$ для любого $c \in \mathbb{R}$, поэтому корни имеют одинаковый знак. Кроме того, при $c \in [3; 27]$ сумма корней больше нуля, так как в уравнении $(***)$ $-2(15+c) < 0$. Следовательно, оба корня уравнения $(***)$ будут положительными.

Подставив крайние значения c в уравнение $(***)$, получим: при $c = 3$ $t = 9$, при $c = 27$ $t = 21$, т.е. сумма радиусов $t = r_1 + r_2$ будет изменяться в пределах от 9 до 21.

Ответ: при $c \in [3; 27]$ $r_1 + r_2 = \frac{(15+c) \pm \sqrt{-c^2 + 30c - 81}}{2}$, $r_1 + r_2 \in [9; 21]$ соответственно.

Список использованной литературы

1. **Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И.** Сборник задач по алгебре для 8-9 классов. М.: Просвещение, 1997.

2. **Иванов А.С., Майоров Ю.К., Рурукин А.Н.** Сборник задач по тригонометрии и началам анализа. М.: МИФИ, 1991.

3. **Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И.** Алгебра и математический анализ 10, 11. М.: Просвещение. Московские учебники, 1999.

4. **Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я., Чинкина М.В.** 3600 задач по алгебре и началам анализа для школьников и поступающих в вузы. М.: Дрофа, 1999.

5. **Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я.** Алгебра и начала анализа. Решение экзаменационных задач. М.: Дрофа, 2002.

6. **Рыжик В.И.** Дидактические материалы по алгебре и математическому анализу. М.: Просвещение, 1997.

7. **Семенко Е.А., Некрасов С.Д.** и др. Задания для подготовки к выпускному экзамену по алгебре и началам анализа: книга для учащихся 11 класса общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 2001

8. Математика. Сборник задач с решениями для поступающих в вузы. /Под ред. Говорова В.М., Мирошина Н.В. М.: АСТ Астрель, 2002.

9. Материалы вступительных экзаменов (конкурсные задачи предыдущих лет) МГТУ им. Баумана, МИФИ, МГУ им. Ломоносова.

10. **Вавилов В.В., Мельников Н.И.** и др. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. М.: Наука, 1987.

11. **Яремчук Ф.П., Рудченко П.А.** Алгебра и элементарные функции. Киев: Наукова Думка, 1987.

12. **Крамор В.С.** Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начала анализа. М.: Просвещение, 1990.

ЯГУБОВ.РФ

Учебное издание

Родионов Евгений Михайлович

Синякова Стелла Леонидовна

МАТЕМАТИКА
ЧАСТЬ 1

Уравнения, неравенства. Параметры.
Тригонометрия. Логарифмы.
Функции. Прогрессии

Пособие для поступающих в вузы

Редактор Бойцова Н.Г.
Корректор Максимова О.К.
Художник Черных П.И.
Компьютерная верстка Семенов И.А.

Подписано в печать 06.02.2012 г. Формат 60x84/16 Бумага офсетная.
Гарнитура Таймс. Усл.п.л. 39,5. Зак.

Учебный центр «Ориентир» при МГТУ им. Н.Э. Баумана
105005 Москва, 2-я Бауманская ул., д.5.
www.bmstu-orientir.ru