

Московский Государственный технический
Университет имени Н.Э.Баумана
Специализированный учебно-научный центр
Лицей № 1580 при МГТУ имени Н.Э. Баумана

А.П. Власова
Н.И. Латанова
Н.В. Евсеева

**Показательная и
логарифмическая
функции в задачах
и примерах**

Москва

2010

УДК 517.562
ББК 22.161.5
В58

Рецензенты: к.т.н., доцент МГТУ имени Н.Э.Баумана Русакова З.Н.

Власова А.П., Латанова Н.И. Евсеева Н.В.
Показательная и логарифмическая функции в задачах и примерах.

Настоящее учебное пособие является продолжением учебного пособия «Показательная и логарифмическая функции. Решение уравнений, неравенств и систем», Изд-во «Олита» 2003, дополненное задачами для самостоятельного решения.

Рассматриваются свойства показательной и логарифмической функций, методы решения показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем. Приводятся решения задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в МГТУ им. Н.Э.Баумана, МГУ, МАИ, МФТИ, МЭИ.

Для преподавателей математики и учащихся профильных школ при технических университетах, преподавателей и слушателей подготовительных курсов, абитуриентов.

Пособие рассчитано на самостоятельную или под руководством учителя подготовку школьников и абитуриентов к ЕГЭ.

ISBN 5-98040-048-6

© МГТУ им. Н. Э. Баумана
©Лицей № 1580 при МГТУ им. Н. Э. Баумана
©Власова А.П., Латанова Н.И. Евсеева Н.В.

Глава I. Показательная функция

§1.1. Определение, свойства, графики показательной функции

Показательной функцией с основанием a ($a > 0, a \neq 1$) называется функция, заданная формулой $y = a^x$.

Общие свойства показательной функции.

1) Область определения функции – множество \mathbb{R} всех действительных чисел. $D_y : \mathbb{R}$.

2) Область значений – множество \mathbb{R}^+ всех действительных положительных чисел $E_y : (0; +\infty)$.

3) Показательная функция имеет асимптоту, которой является прямая ОХ ($Y=0$)

4) Показательная функция является непрерывной функцией, монотонно убывающей или монотонно возрастающей, непериодической, общего вида.

5) Все показательные функции, независимо от a , пересекают ось y в точке $(0; 1)$.

Следующие свойства показательной функции выражают основные свойства степеней ($a > 0, b > 0$):

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

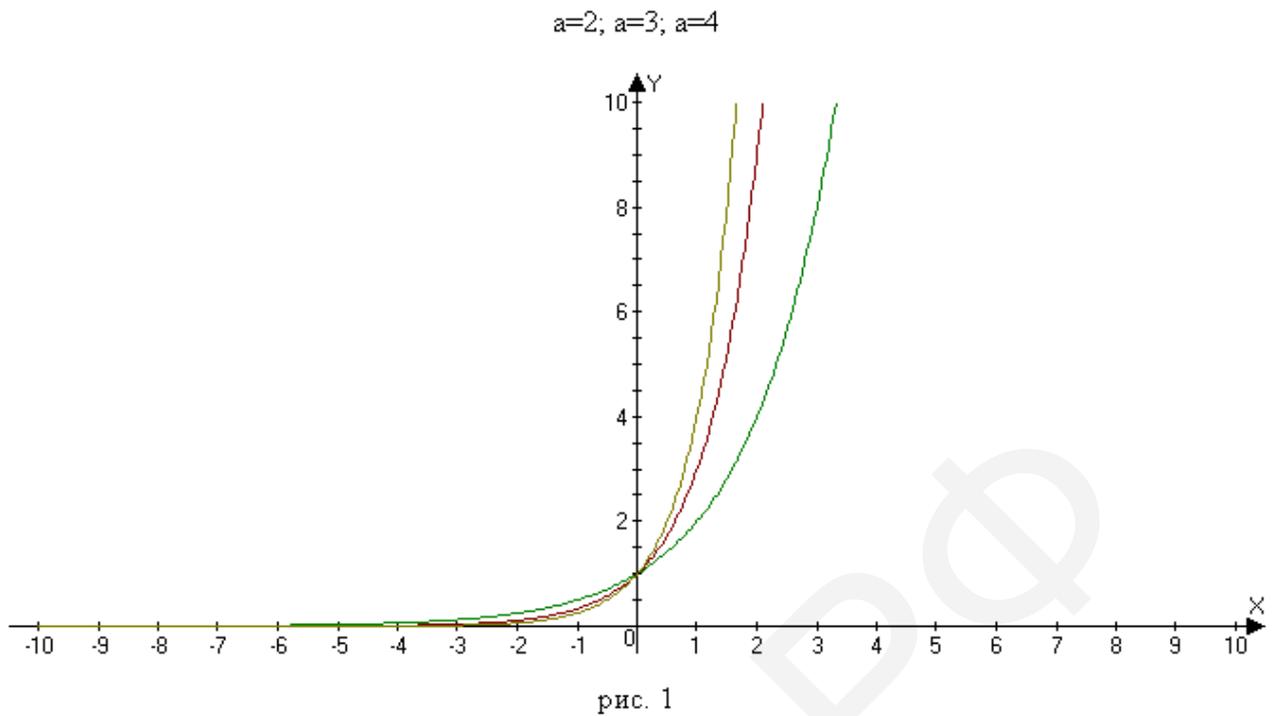
$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$a^0 = 1$$

Показательная функция с основанием $a=e$, где e – число, приближенно равное $e \approx 2,718\dots$ называется экспонентой.

Свойства показательной функции при $a > 1$, (рис. 1).



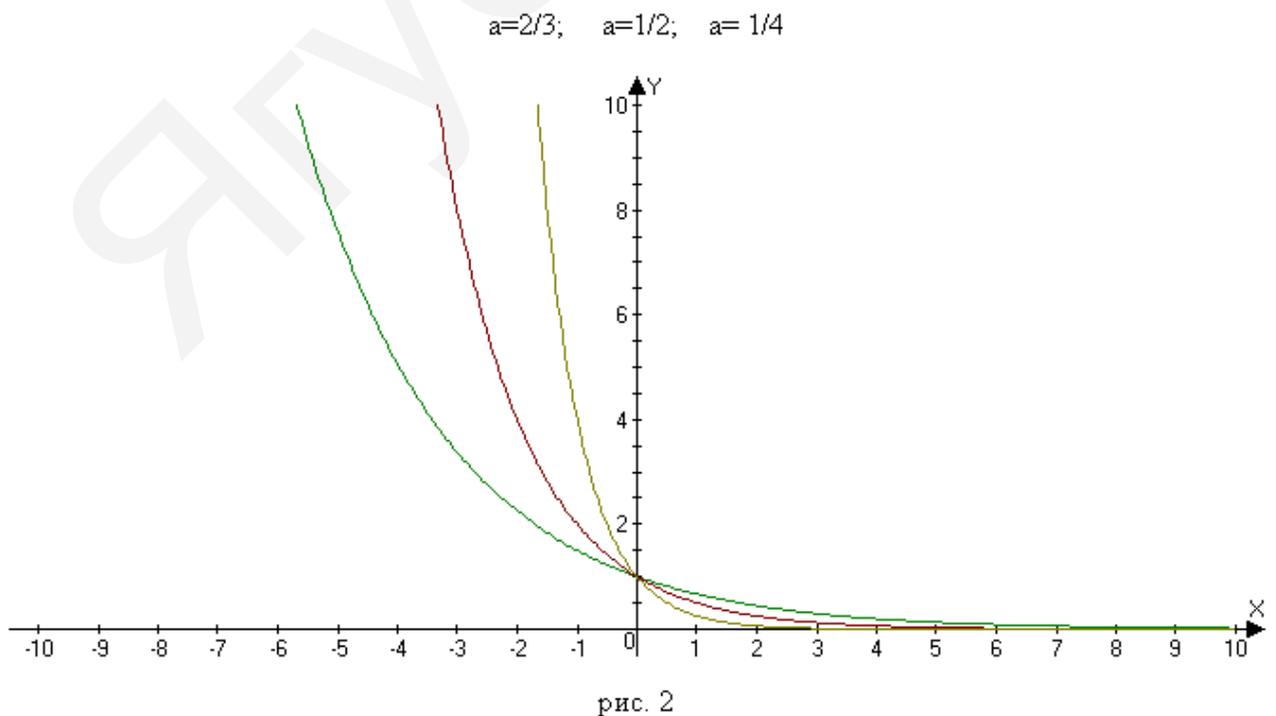
1) монотонно возрастающая

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

3) Если $x > 0$, то $a^x > 1$

Если $x < 0$, то $0 < a^x < 1$



Свойства показательной функции $y = a^x$ при $0 < a < 1$ (рис.2).

1) Монотонно убывающая

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

3) Если $x > 0$, то $a^x < 1$

Если $x < 0$, то $0 < a^x < 1$

4) Аналогично п.4 свойств $y = a^x$ ($a > 1$)

Задания для самостоятельной работы.

Определите множество значений функции:

	ОТВЕТЫ		ОТВЕТЫ
1) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$	$\left[\frac{1}{2}; 2\right]$	11) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-5\cos x}$	$\left[\frac{1}{32}; 32\right]$
2) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos x}$	$\left[\frac{1}{3}; 3\right]$	12) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3\cos x}$	$\left[\frac{1}{27}; 27\right]$
3) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\sin x}$	$\left[\frac{1}{4}; 4\right]$	13) $f(x) = (5)^{-2\sin x}$	$\left[\frac{1}{25}; 25\right]$
4) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-\cos x}$	$\left[\frac{1}{5}; 5\right]$	14) $f(x) = (6)^{-2\cos x}$	$\left[\frac{1}{36}; 36\right]$
5) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^{\sin x}$	$\left[\frac{1}{6}; 6\right]$	15) $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{2\sin x}$	$\left[\frac{1}{49}; 49\right]$
6) $f(x) = (7)^{-\sin x}$	$\left[\frac{1}{7}; 7\right]$	16) $f(x) = (9)^{-2\sin x}$	$\left[\frac{1}{81}; 81\right]$
7) $f(x) = (8)^{-\cos x}$	$\left[\frac{1}{8}; 8\right]$	17) $f(x) = (4)^{x^2+2}$	$[16; +\infty]$
8) $f(x) = \left(\frac{1}{8}\right)^{-2\sin x}$	$\left[\frac{1}{64}; 64\right]$	18) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-1}$	$(0; 3]$
9) $f(x) = (3)^{-2\cos x}$	$\left[\frac{1}{9}; 9\right]$	19) $f(x) = \left(\frac{1}{7}\right)^{2-x^2}$	$\left[\frac{1}{49}; +\infty\right)$
10) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{4\sin x}$	$\left[\frac{1}{16}; 16\right]$	20) $f(x) = 8^{-x^2+1}$	$(0; 8]$

1.2. Методы решения показательных уравнений

1.2.1 Решение уравнений, в которых обе части уравнения можно привести к одному основанию

К данному типу относятся уравнения вида

$$a^{\varphi_1(x)} = a^{\varphi_2(x)}, a > 0, a \neq 1 \quad (1)$$

уравнение (1) равносильно уравнению (2) $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$

Пример 1. Решить уравнение:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{7x-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^{4x+1} \quad (3)$$

т.к. $\frac{2}{5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1}$, то уравнение (3) можно записать в виде:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{3-7x} = \left(\frac{5}{2}\right)^{4x+1}, 3-7x=4x+1, 11x=2 \Rightarrow x=2/11. \quad \text{Ответ } \{2/11\}.$$

Пример 2. Решить уравнение:

$$0,125 \times 4^{2x-8} = \left(\frac{0,25}{\sqrt{2}}\right)^{-x}, \text{ преобразуем левую и правую части уравнения:}$$

$$\frac{1}{8} \times 2^{2(2x-8)} = \left(\frac{1}{4} \times 2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-x}$$

$$2^{-3} \times 2^{2(2x-8)} = \left(2^{-2-0,5}\right)^{-x}$$

$$2^{-3+4x-16} = 2^{2,5x-3+4x-16} = 2^{2,5x-19}$$

$$\Rightarrow x = \frac{38}{3} \quad \text{О т в е т : } \left\{ \frac{38}{3} \right\}$$

Пример 3.

$$\sqrt{x} \sqrt{5^{5\sqrt{x}}} = 5^{\sqrt{x}-4}$$

$$5^{\frac{5\sqrt{x}}{x}} = 5^{\sqrt{x}-4}$$

$$\frac{5}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - 4$$

$$(\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} - 5 = 0, \text{ обозначим } \sqrt{x} = y$$

$$y^2 - 4y - 5 = 0 \Rightarrow y_1 = 5; y_2 = -1 (\text{посторонний корень - п.к.})$$

$$\sqrt{x} = 5, x = 25; \text{ Ответ : } \{25\}$$

1.2.2. Уравнения, в которых левая и правая части содержат показательные функции с разными основаниями

К данному типу относятся уравнения вида

$$a^{\varphi_1(x)} = b^{\varphi_2(x)}, a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1 \quad (4)$$

Для решения уравнения (4) необходимо прологарифмировать обе части уравнения, например, по основанию а или b: $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) \times \log_a b$

(5)

откуда определяется корень x.

Пример 4. $2^{3x-1} = 13^{1-x}$

Логарифмируя по основанию 2, получим $3x - 1 = (1 - x) \log_2 13$

или $3x + x \log_2 13 = 1 + \log_2 13$

$$x(3 + \log_2 13) = 1 + \log_2 13$$

$$x = \frac{1 + \log_2 13}{3 + \log_2 13} = \frac{\log_2 26}{\log_2 104}$$

Ответ: $\frac{\log_2 26}{\log_2 104} \{2; -\log_3 18\}$

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения:

	ответы		ответы
1. $4^{x+4} = 0,25 \cdot 7^{x+5}$	{ -5 }	5. $2^x \cdot 9^{\frac{x}{x+2}} = 12$	{ 2; $-\log_2 12$ }
2. $5^{x+3} = 0,2 \cdot 3^{x+4}$	{ -4 }	6. $3^x \cdot 4^{\frac{x}{x+2}} = 18$	{ 2; $-\log_3 18$ }
3. $5^{x-4} = 1,6 \cdot 2^{x-6}$	{ 3 }	7. $2^{2+\log_2 x} = 6 - 2^{2-\log_2 x}$	{ 2 }
4. $5^{x+5} = 0,8 \cdot 2^{x+4}$	{ -6 }	8. $2^{1+\log_2 x} = 6 + 2^{3-\log_2 x}$	{ 4 }

1.2.3. Метод решения показательных уравнений путем введения новой переменной

К данному типу относятся уравнения вида $Aa^{\varphi(x)} + Bb^{\varphi(x)} = C$, (6)

где А,В и С –const. Если $a=1/b$, то введением новой переменной $a^{\varphi(x)} = y > 0$ получим вместо уравнения (6) следующее:

$$Ay + B\frac{1}{y} = C, \quad (7) \quad \text{или} \quad Ay^2 - Cy + B = 0$$

Пример 5. $2^{1-x} = 15 + 2^{3+x}$

$2 \times 2^{-x} = 15 + 8 \times 2^x$ Положив $y = 2^x > 0$, получим

$$\frac{2}{y} = 15 + 8y \Leftrightarrow 8y^2 + 15y - 2 = 0$$

Решая последнее уравнение, получим $y_1 = -2, y_2 = \frac{1}{8}$,

$$\text{и } 2^x = 2^{-3} \Rightarrow x = -3;$$

Ответ: $\{-3\}$

Пример 6. Решить $\left(\sqrt[3]{\sqrt{3-\sqrt{8}}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{\sqrt{3+\sqrt{8}}}\right)^x = 6$

Учитывая, что $\sqrt{3-\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}$, получим уравнение

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}\right)^{\frac{x}{3}} + \left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{\frac{x}{3}} = 6, \text{ введем новую переменную}$$

$$y = \left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{\frac{x}{3}} > 0, \text{ тогда получим уравнение: } \frac{1}{y} + y = 6$$

или $y^2 - 6y + 1 = 0, \Rightarrow y_1 = 3 + \sqrt{8}; y_2 = 3 - \sqrt{8}$

1) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{\frac{x}{3}} = 3 + \sqrt{8} \Rightarrow x_1 = 6;$

2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{\frac{x}{3}} = 3 - \sqrt{8} \Rightarrow x_2 = -6;$

Ответ: $\{-6; +6\}$

Пример 7. $9^{x+\frac{1}{x+1}} + 26 \times 3^{x+\frac{1}{x}} - 3 = 0$. Решение: ОДЗ: $x \neq 0$.

Введем новую переменную

$$3^{x+\frac{1}{x}} = y > 0, \text{ тогда } 9y^2 + 26y - 3 = 0 \Rightarrow y_1 = -3 < 0 \text{ (п.к.); } y_2 = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 3^{x+\frac{1}{x}} = 3^{-2} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0, \Rightarrow x = -1; \text{ Ответ } \{-1\}$$

Пример 8. $2 \times 2^{2x} + 18 \times 2^{-2x} - 11 \times 2^x - 33 \times 2^{-x} + 26 = 0$

$$2(2^{2x} + 9 \times 2^{-2x}) - 11(2^x + 3 \times 2^{-x}) + 26 = 0$$

Обозначим $2^x + 3 \times 2^{-x} = y > 0$, тогда $y^2 = 2^{2x} + 9 \times 2^{-2x} + 6$

При этом уравнение принимает вид:

$$2y^2 - 11y + 14 = 0 \Rightarrow y_1 = 2; y_2 = \frac{7}{2}$$

1) $2^x + 3 \times 2^{-x} = 2$, делая замену $2^x = z > 0$, получим уравнение

$z^2 - 2z + 3 = 0$, которое не имеет решений.

2) $2^x + 3 \times 2^{-x} = \frac{7}{2}$, делая замену $2^x = z > 0$ получим $z + \frac{3}{z} = \frac{7}{2}$ или

$$2z^2 - 7z + 6 = 0 \Rightarrow z_1 = 2; z_2 = \frac{3}{2}$$

$$a) 2^x = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$b) 2^x = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = \log_2 \frac{3}{2}$$

Ответ: $\{1; \log_2(3/2)\}$

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения: ответы решить уравнения ответы

$$1) 2^{x+1} = 7 + 2^{2-x} \quad \{2\}$$

$$2) 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2^{4-\sqrt{x}} = 26 \quad \{9\}$$

$$3) 2 \cdot 2^{3+\sqrt{x}} + 4 = 33 \sqrt{2^{\sqrt{x}}} = 0 \quad \{16\}$$

$$4) 3^{1+\sqrt{x}} + 3^{3-\sqrt{x}} = 82 \quad \{9\}$$

$$8) 3 \cdot 4^{\sqrt{x}} - 25 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 8 = 0 \quad \{9\}$$

$$9) 2 \cdot 4^{1+\sin x} + 5 \cdot 4^{1-\sin x} = 44$$

$$\{(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$10) 4^{1+\cos x} + 2 \cdot 4^{1-\cos x} = 33$$

$$\{\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\}$$

1.2.4. Однородные уравнения относительно степеней

К данному виду относятся уравнения типа

$$Aa^{2x} + Ba^x b^x + Cb^{2x} = 0 \quad (8)$$

так как $b^{2x} \neq 0$, то разделим почленно уравнение (8) на b^{2x} :

$$A \left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + B \left(\frac{a}{b}\right)^x + C = 0$$

Вводя новую переменную $\left(\frac{a}{b}\right)^x = y > 0$, получим уравнение

аналогичное (7).

Пример 9.

$$\text{Решить } 2^{2x+2} - 6^x - 2 \times 3^{2x+2} = 0$$

Решение: $4 \times 2^{2x} - 2^x 3^x - 18 \times 3^{2x} = 0$, разделим на $3^{2x} \neq 0$

$$4 \left(\frac{2}{3} \right)^{2x} - \left(\frac{2}{3} \right)^x - 18 = 0. \text{ Обозначим } \left(\frac{2}{3} \right)^x = y > 0, \text{ тогда получим}$$

$$4y^2 - y - 18 = 0, y_1 = -2(\text{н.к.}), y_2 = \frac{9}{4} = \left(\frac{2}{3} \right)^{-2},$$

$$\left(\frac{2}{3} \right)^x = \left(\frac{2}{3} \right)^{-2} \Rightarrow x = -2$$

Ответ: $\{-2\}$

Пример 10.

Решить $3 \times 2^{2x-2} + 3^{2x+1} = 3 \times 2^{2x+1} - 2^{-1} \times 3^{2x}$

$$3^{2x} \left(3 + \frac{1}{2} \right) = 3 \times 2^{2x+1} \left(1 - \frac{1}{8} \right)$$

Разделим обе части последнего уравнения на 2^{2x} , тогда получаем

$$\left(\frac{3}{2} \right)^{2x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Ответ: $\{1/2\}$

Задания для самостоятельной работы

Решить уравнения:

	Ответы		ответы
1) $5 \cdot 3^{2x+1} - 16 \cdot 15^x - 3 \cdot 5^{2x+1} = 0$	$\{-1\}$	6) $3 \cdot 2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x - 2 \cdot 3^{2x+1} = 0$	$\{-1\}$
2) $2^{2x+3} - 6^{x+1} - 3^{2x+3} = 0$	$\{-2\}$	7) $125 \cdot 9^x + 30 \cdot 15^x - 27 \cdot 25^x = 0$	$\{2\}$
3) $5 \cdot 2^{2x+1} - 21 \cdot 10^x - 2 \cdot 5^{2x+1} = 0$	$\{-1\}$	8) $3 \cdot 2^{2x+2} - 19 \cdot 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} = 0$	$\{-2\}$
4) $3^{2x+3} - 12^{x+1} - 4^{2x+3} = 0$	$\{-2\}$	9) $64 \cdot 9^x + 12^{x+1} - 27 \cdot 16^x = 0$	$\{2\}$
5) $9 \cdot 2^{2x+1} + 19 \cdot 6^x - 4 \cdot 3^{2x+1} = 0$	$\{2\}$	10) $4 \cdot 9^x + 37 \cdot 12^{x-1} - 3 \cdot 16^x = 0$	$\{2\}$

1.2.5. Показательные уравнения, содержащие неизвестную в основании и в показателе степени

Такие уравнения содержат выражения типа $\varphi_1(x)^{\varphi_2(x)}$.

При решении уравнений считается, что $\varphi_1(x) > 0$. Однако рассматривается также решение, если

$$1) \begin{cases} \varphi_1(x) = 0 \\ \varphi_2(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \varphi_1(x)^{\varphi_2(x)} = 0 \quad \text{и}$$

2) если при $\varphi_1(x) < 0$ получается верное числовое равенство путем подстановки в исходное уравнение возможных корней.

При решении указанных уравнений используется основное логарифмическое тождество либо логарифмирование обеих частей уравнения.

Пример 11. Решить $x^{2x^2-3x+1} = x^3$
Рассмотрим $x > 0$. Преобразуем уравнение, используя основное логарифмическое тождество:

$$2^{(2x^2-3x+1)\log_2 x} = 2^{3\log_2 x}$$

$$(2x^2 - 3x + 1)\log_2 x = 3\log_2 x$$

$$(2x^2 - 3x - 2)\log_2 x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases} ; x = -\frac{1}{2} \text{ (п.к.)}$$

Рассмотрим, когда основание $x=0$. Обе части уравнения равны нулю.
 $\Rightarrow x=0$ является корнем исходного уравнения.

Ответ: $\{0; 1; 2\}$

Пример 12. $(1+x^2)^{1+\sqrt{x}} = (1+x^2)^{2+\sqrt{x}}$ ОДЗ: $x \geq 0$

Преобразуем уравнение:

$$10^{(1+\sqrt{x})\lg(1+x^2)} = 10^{(2+\sqrt{x})\lg(1+x^2)}$$

$$(1+\sqrt{x})\lg(1+x^2) = (2+\sqrt{x})\lg(1+x^2)$$

$$(1+\sqrt{x} - 2 - \sqrt{x})\lg(1+x^2) = 0$$

$$\lg(1+x^2) = 0 \Rightarrow x = 0;$$

Ответ: $\{0\}$

Пример 13: $|x+3|^{x^2-x-2} = 1$

$$10^{(x^2-x-2)\lg|x+3|} = 10^0$$

$$(x^2 - x - 2)\lg|x+3| = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 2;$$

$$\lg|x+3| = 0 \Rightarrow |x+3| = 1 \Rightarrow x_3 = -2; x_4 = -4; \quad \text{Ответ: } \{-1; \pm 2; -4\}$$

Пример 14: $x^{\sqrt[3]{x^2}} = (\sqrt{x})^x$ Решение: Прологарифмируем по

основанию 2, в результате получим $\sqrt[3]{x^2} \log_2 x = x \log_2 \sqrt{x}$

$$\left(\sqrt[3]{x^2} - \frac{x}{2}\right) \log_2 x = 0$$

$$1) \sqrt[3]{x^2} - \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{x^3}{8}$$

$$\Rightarrow x^2(x-8) = 0 \Rightarrow x_1 = 0(\text{н.к.}); x_2 = 8;$$

$$2) \log_2 x = 0 \Rightarrow x = 1;$$

Ответ: {1;8}

Пример 15. Решить $(x^2 + x + 1)^{x-5\sqrt{x}+6} = (x+3)^{x-5\sqrt{x}+6}$ ОДЗ: $x \geq 0$

Логарифмируя обе части уравнения, например, по основанию 2, получим уравнение

$$(x - 5\sqrt{x} + 6) \log_2(x^2 + x + 1) = (x - 5\sqrt{x} + 6) \log_2(x + 3)$$

равносильное исходному на области допустимых значений. Полученное уравнение можно переписать в виде

$$(x - 5\sqrt{x} + 6) \left(\log_2(x^2 + x + 1) - \log_2(x + 3) \right) = 0$$

Ответ: {4;9;\sqrt{2}}

§1.3. Методы решения показательных неравенств

Решение неравенств, содержащих показательную и логарифмическую функции, основано на свойствах этих функций, а также на методах решения алгебраических неравенств и показательных и логарифмических уравнений. При решении неравенств целесообразно начинать решение с определения ОДЗ и использовать правила равносильного перехода при преобразовании неравенств, так как в отличие от решения уравнений использовать проверку решения неравенства практически невозможно.

1.3.1. Решение неравенств путем приведения обеих частей неравенства к одному основанию

При этом используется свойство монотонности показательной функции:

$$a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) > \varphi(x), \text{ если } a > 1$$

$$a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \Leftrightarrow f(x) < \varphi(x), \text{ если } 0 < a < 1$$

Пример 16. $(1,25)^{1-x} < (0,64)^{2(1+\sqrt{x})}$ ОДЗ: $x \geq 0$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{1-x} < \left(\frac{16}{25}\right)^{2(1+\sqrt{x})} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{x-1} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4(1+\sqrt{x})}$$

$$x-1 > 4(1+\sqrt{x}) \Leftrightarrow x-4\sqrt{x}-5 > 0$$

$$\begin{cases} (\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1) > 0 \\ \sqrt{x} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x} \in (5, +\infty) \Rightarrow x \in (25, +\infty) \quad \text{Ответ: } (25, \infty).$$

1.3.2. Неравенства, содержащие показательные функции при различных основаниях

Такие неравенства приводятся к виду:

$$a^{f(x)} < b^{\varphi(x)}, a > 0, a \neq 1; b > 0, b \neq 1.$$

Если обе части неравенства положительны, то используется логарифмирование неравенства по какому-либо основанию, либо применяется основное логарифмическое тождество.

Пример 17. $2^x < 3^{\frac{1}{x}}$ Решение: ОДЗ: $x \neq 0$

Прологарифмируем по основанию 2: $x < \frac{1}{x} \log_2 3$, где $\log_2 3 > 0$

$$\text{Отсюда } \frac{x^2 - \log_2 3}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x - \sqrt{\log_2 3})(x + \sqrt{\log_2 3})}{x} < 0$$

Решив неравенство методом интервалов, получим
 $x \in (-\infty, -\sqrt{\log_2 3}) \cup (0, \sqrt{\log_2 3})$ Ответ: $(-\infty, -\sqrt{\log_2 3}) \cup (0, \sqrt{\log_2 3})$

1.3.3. Метод введения новой переменной

При решении неравенств в этом случае используется замена показательной функции $a^{\varphi(x)}$ на другую переменную.

Пример 18. $\frac{2^{1-x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{2^x} - 2^x + 1}{2^x - 1} \leq 0$ Решение: вводим

новую переменную $y = 2^x > 0$. Решим равносильную систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{2 - y^2 + y}{y(y-1)} \leq 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(y-2)(y+1)}{y(y-1)} \geq 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \in (0, 1) \cup [2, +\infty)$$

Переходя к переменной x с учетом того, что y возрастающая функция, получим $x \in (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ Ответ: $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$

Пример 19. $\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right)^x - \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right)^{-x} < 3$

Вводим новую переменную $y = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right)^x > 0$. Тогда исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} y - \frac{1}{y} < 3 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^2 - 3y - 1}{y} < 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\left(y - \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)\left(y - \frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right)}{y} < 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \in \left(0; \frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)$$

При переходе к переменной x следует учесть, что основание показательной функции $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} < 1$.

Следовательно, $y = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right)^x$ - монотонно убывающая функция, поэтому

$$x \in \left(\log_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}} \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right), +\infty\right). \quad \text{Ответ: } \left(\log_{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}} \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right), +\infty\right)$$

Пример 20. $16^x - 2 \times 12^x \leq 3^{2x+1}$
 $4^{2x} - 2 \times 3^x 4^x - 3 \times 3^{2x} \leq 0$

Разделим обе части неравенства на $3^{2x} \neq 0$: $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - 2\left(\frac{4}{3}\right)^x - 3 \leq 0$

Введем новую переменную $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x > 0$ и перейдем к равносильной

системе неравенств: $\begin{cases} y^2 - 2y - 3 \leq 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)(y-3) \leq 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow y \in (0; 3]$

Или $0 < \left(\frac{4}{3}\right)^x \leq 3 \Rightarrow -\infty < x \leq \log_{\frac{4}{3}} 3$ Ответ: $(-\infty; \log_{\frac{4}{3}} 3]$

1.3.4. Неравенства, содержащие неизвестную в основании и в показателе степени

К таким неравенствам относятся неравенства типа $f(x)^{\varphi(x)} > 0$.

Такие неравенства решаются либо логарифмированием обеих частей неравенства по какому-либо основанию, либо преобразованием с использованием основного логарифмического тождества.

Пример 21. $(2-x)^{\frac{3x-5}{3-x}} \leq 1$

Решение:

если $2-x > 0, (x < 2)$, то используя основное логарифмическое тождество, преобразуем левую часть неравенства к виду::

$$2^{\frac{3x-5}{3-x} \log_2(2-x)} \leq 1 \Leftrightarrow 2^{\frac{3x-5}{3-x} \log_2(2-x)} \leq 2^0,$$

которое равносильно системе неравенств: $\begin{cases} \frac{3x-5}{3-x} \log_2(2-x) \leq 0 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x-5}{3-x} < 0 \\ \log_2(2-x) > 0 \\ x < 2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x-5}{3-x} > 0 \\ \log_2(2-x) < 0 \\ x < 2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; 1) \\ x \in \left(\frac{5}{3}; 2\right) \\ x = \frac{5}{3} \\ x = 1 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x < 2 \\ \frac{3x-5}{3-x} = 0 \end{array} \right. \\ \log_2(2-x) = 0 \end{array} \right.$$

Объединяя полученные решения, получим $x \in (-\infty, 1] \cup \left[\frac{5}{3}; 2\right)$

Если $x = 2$, то исходное неравенство имеет вид: $0^1 \leq 1$. Это верное числовое неравенство, следовательно, $x = 2$ входит в множество решений данного неравенства.

Ответ: $(-\infty, 1] \cup \left[\frac{5}{3}; 2\right]$.

Глава II. Логарифмическая функция

§2.1. Свойства, графики. Решение задач, использующих свойства логарифмической функции

Определение. Логарифмом числа b , $b > 0$, по основанию a , $a > 0$, $a \neq 1$, называют такое число c , что $a^c = b$, записывается в виде $c = \log_a b$.

Из определения логарифма следует основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b \quad (1)$$

Примеры: $\log_3 9 = 2$, $\log_5 5^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, $\log_3 (1/27) = -3$

Так как из основного логарифмического тождества следует, что для любого x верно равенство

$$\log_a a^x = x, \quad (2)$$

то логарифмом может быть любое действительное число.

Формула (2) следует из свойства обратной функции: для любого x , принадлежащего области определения функции $f(x)$ справедливо соотношение $g(f(x)) = x$, где $g(x)$ - обратная к $f(x)$ функция; точно так же для любого x , принадлежащего области определения обратной функции $g(x)$, справедливо соотношение $f(g(x)) = x$. Если рассмотреть уравнение вида $a^x = b$, где a, b известные числа, x - искомая величина, то показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, является монотонной и принимает все возможные значения на $(0, \infty)$. Следовательно, при условии $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ уравнение $a^x = b$ имеет ровно один корень, который называется логарифмом числа b по основанию a и обозначается $\log_a b$.

Для любого допустимого основания a непосредственно из определения логарифма следует, что $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1$.

Теорема 1. (логарифм произведения). Пусть существуют числа $\log_a b$ и $\log_a c$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$. Тогда существует число $\log_a bc$ и верно равенство

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc \quad (3)$$

Доказательство.

$\log_a bc$ существует, так как $a > 0$, $a \neq 1$, а $bc > 0$ следует из условий теоремы.

Из определения логарифма и свойства показательной функции следует, что

$$a^{\log_a b + \log_a c} = a^{\log_a b} a^{\log_a c} = bc = a^{\log_a bc}$$

так как из равенства $a^x = a^y$ следует $x = y$, получается (3).

Замечание. Если формулировать свойство (3) в виде равенства $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$, то следует обязательно требовать существования $\log_a b$ и $\log_a c$, кроме существования $\log_a bc$. (Например, $\log_2((-8)(-6))$ существует, а логарифмы сомножителей нет.

Теорема 2. (логарифм степени.) Пусть существует число $\log_a b$, то есть $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$.

Тогда для любого числа c существует число $\log_a b^c$ и справедливо равенство $c \times \log_a b = \log_a b^c$

$$(4)$$

Доказательство:

Так как число $b > 0$ в любой степени больше нуля, то $\log_a b^c$ существует. Тогда

$$a^{c \log_a b} = (a^{\log_a b})^c = b^c = a^{\log_a b^c} \quad \text{ч.т.д.}$$

Теорема 3. (логарифм частного). Пусть существуют числа $\log_a b$ и $\log_a c$, т.е. $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$. Тогда существует число $\log_a(b/c)$ и верно равенство

$$\log_a b - \log_a c = \log_a(b/c) \quad (5)$$

Доказательство:

Используя теоремы (1) и (2), получаем

$$\log_a b - \log_a c = \log_a b + \log_a(c^{-1}) = \log_a(bc^{-1}) = \log_a(b/c) \quad \text{ч.т.д.}$$

Теорема 4. (формула перехода к новому основанию). Пусть существует $\log_a b$, т.е. $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$. Тогда для любого числа c такого, что $c > 0$, $c \neq 1$, существуют числа $\log_c b$ и $\log_c a$ и верно равенство

$$\log_a b = \log_c b / \log_c a \quad (6)$$

Доказательство:

Существование $\log_c b$ и $\log_c a$ следует из того, что $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $c \neq 1$; $\log_c a \neq 0$, т.к. $a \neq 1$.

$$c^{\log_c a \times \log_a b} = (c^{\log_c a})^{\log_a b} = a^{\log_a b} = b = c^{\log_c b}$$

Следовательно, $\log_c a \times \log_a b = \log_c b$ ч.т.д.

Из доказанных теорем (2,4) следуют следующие формулы:

$$\log_{a^\alpha} x = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \log_a x \quad (7)$$

$$\log_a b \times \log_b a = 1 \quad (8)$$

$$\log_{a^\alpha} x^\alpha = \log_a x \quad (9)$$

Таблица основных формул для логарифмов.

$$\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$$

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_{a^\alpha} x = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \log_a x$$

$$\log_a b \times \log_b a = 1$$

$$\log_{a^\alpha} x^\alpha = \log_a x$$

Упражнения:

1. Найти числовые значения выражений:

пример: $9^{\log_{\sqrt{3}} 2} = 3^{2\log_{\sqrt{3}} 2} = 3^{\log_{\sqrt{3}} 4} = 3^{\frac{\log_3 4}{\log_3 \sqrt{3}}} = 3^{2\log_3 4} = 3^{\log_3 16} = 16$.
 $4^{\log_3 3} = ?$, $27^{\log_3 2} = ?$, $4^{\log_8 27} = ?$

2. Найти значения следующих выражений ($a > 0$, $a \neq 1$):

$$a^{\log_a 2} = ?, a^{\log_{\sqrt{a}} 4} = ?, (2a)^{\log_{\sqrt{a}} 1} = ?, a^{4\log_a 2^5} = ?, \log_{a^3} a = ?, \log_{\sqrt{a}} a^{\frac{1}{3}} = ?$$

3. Выяснить, какие из указанных ниже логарифмов положительны, а какие отрицательны:

$$\log_2 5; \log_{0,2} 0,8; \log_5 2; \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{7}$$

4. Выяснить, какое из указанных чисел больше другого:

$$\log_3 4 \vee \log_4 \frac{1}{3}; \log_{\frac{3}{4}} \left(\frac{2}{5}\right) \vee \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{4}\right); \log_{0,1} \sqrt{2} \vee \log_{0,2} 0,34;$$
$$2^{\log_5 3} \vee 3^{\log_5 \left(\frac{1}{2}\right)};$$

5. Найти $\log_{49} 32$, если $\log_2 14 = a$; Найти $\log_{15} 49 = ?$, если $\log_7 9 = a$ и $\log_7 45 = b$.

6. Доказать следующие тождества:

$$\log_{ax} (bx) = (\log_a b + \log_a x) / (1 + \log_a x)$$

$$\frac{\log_a x}{\log_b x} = \log_a b; \quad \frac{\log_a x_1}{\log_a x_2} = \log_a x_1 x_2$$

Определение. Логарифмической функцией переменной x по основанию a называют отображение, которое числу x ставит в соответствие число равное $\log_a x$. Из определения логарифма следует, что число a должно быть положительным и не равным единице, а $x > 0$.

Свойства:

1. Область определения функции $D(\log_a x) = (0, \infty)$.
2. Область значений функции $E(\log_a x) = (-\infty, +\infty)$, уравнение $\log_a x = y$ при любом действительном y имеет всегда один корень $x = a^y$.
3. Периодичность. Логарифмическая функция не является периодической, т.к. она определена только для положительных чисел x .
4. Четность или нечетность. Логарифмическая функция не является четной или нечетной, т.к. она определена только для положительных чисел x .
5. Точки пересечения графика с осями координат. Так как уравнение $\log_a x = 0$ имеет единственный корень $x = 1$, то у логарифмической функции есть

одна точка пересечения с осью абсцисс $(1;0)$. Точка нуль не принадлежит области определения, поэтому точек пересечения с осью ординат нет.

6. Промежутки знакопостоянства функции. Если $a > 1$, то значения логарифмической функции отрицательны на промежутке $(0,1)$ и положительны на $(1,\infty)$. Если $0 < a < 1$, то значения логарифмической функции положительны на промежутке $(0,1)$ и отрицательны на промежутке $(1,\infty)$.

Доказательство:

Пусть $a > 1$ и $x > 1$. Докажем, что в этом случае значения логарифмической функции положительны. Предположим противное, т.е. существует такое $x > 1$, что $\log_a x = y \leq 0$. Тогда в силу возрастания показательной функции с основанием $a > 1$ получаем, что $a^y \leq a^0 = 1$. С другой стороны по основному логарифмическому тождеству

$$a^{\log_a x} = x > 1,$$

получили противоречие, т.е. предположение неверно.

7. Наибольшее и наименьшее значения. Логарифмическая функция не имеет наибольшего и наименьшего значений, так как областью значений этой функции являются все действительные числа и эта функция монотонна.

8. Интервалы возрастания и убывания. Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ убывает на всей своей области определения, и если $a > 1$, возрастает.

Доказательство:

Пусть $x_1 > x_2 > 0$ и $a > 1$. Пусть $y_1 = \log_a x_1$, $y_2 = \log_a x_2$. Из определения логарифмической функции

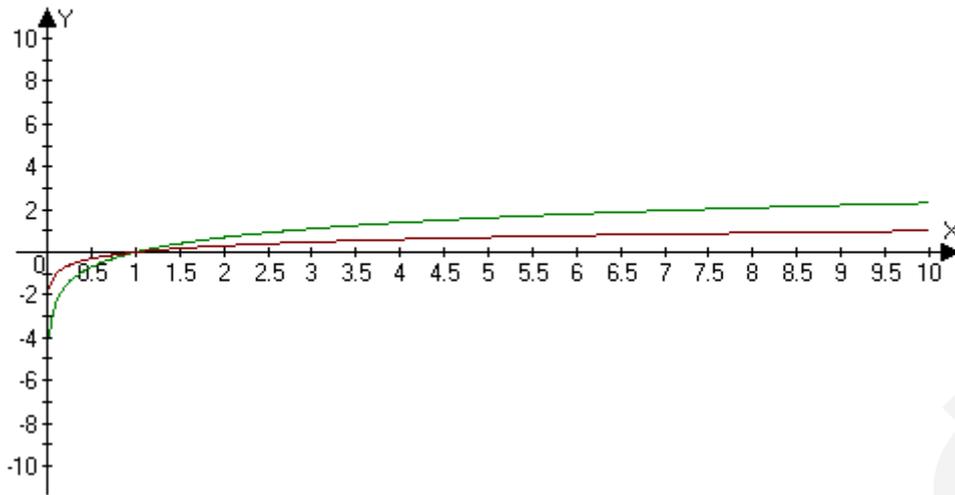
$$a^{y_1} = x_1 > x_2 = a^{y_2}$$

Из свойства возрастания показательной функции с основанием $a > 1$ получаем, что $y_1 > y_2$ ч.т.д.

Аналогично при $0 < a < 1$ логарифмическая функция убывает.

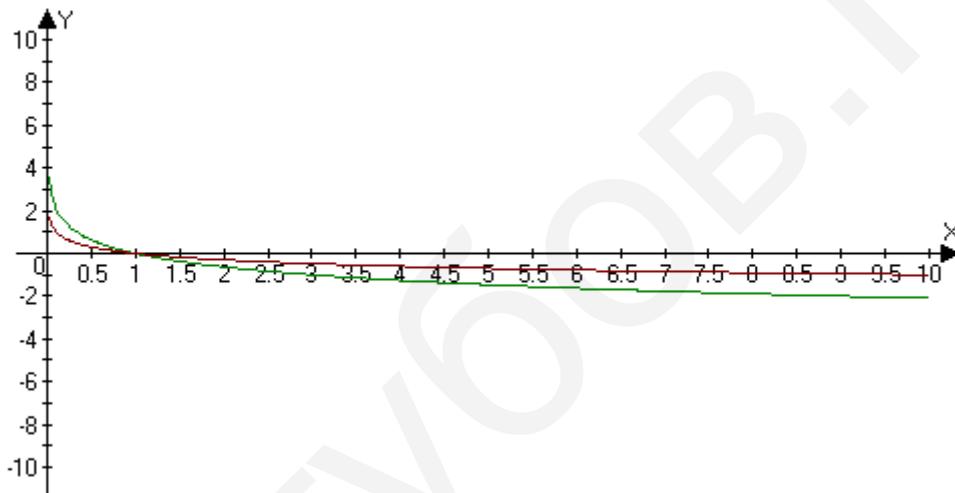
9. Асимптоты. Единственной асимптотой графика логарифмической функции является ось ординат.

$$a=10, a=e$$



$$y = \log_a x, a > 1$$

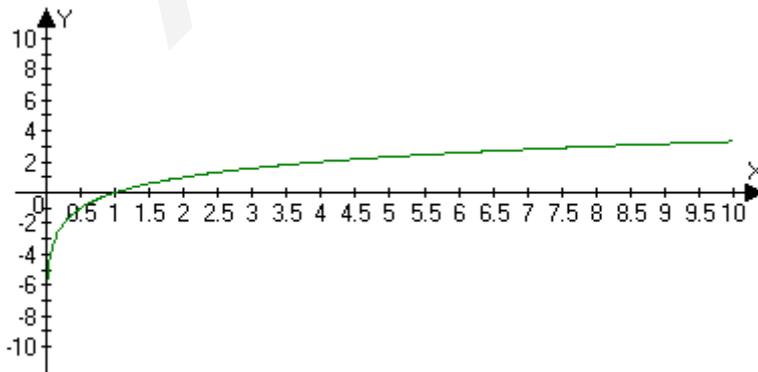
$$a=1/3, a=1/10$$



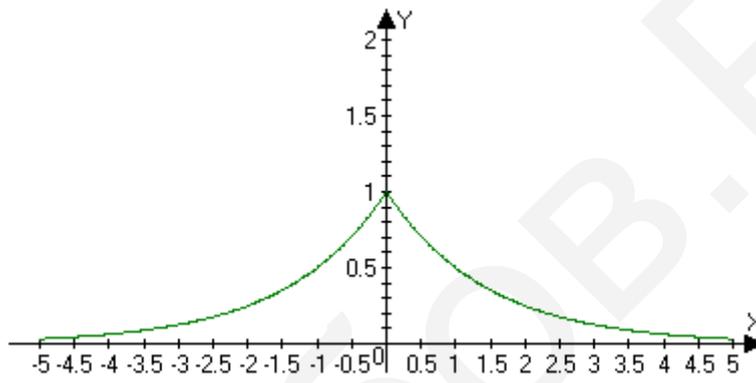
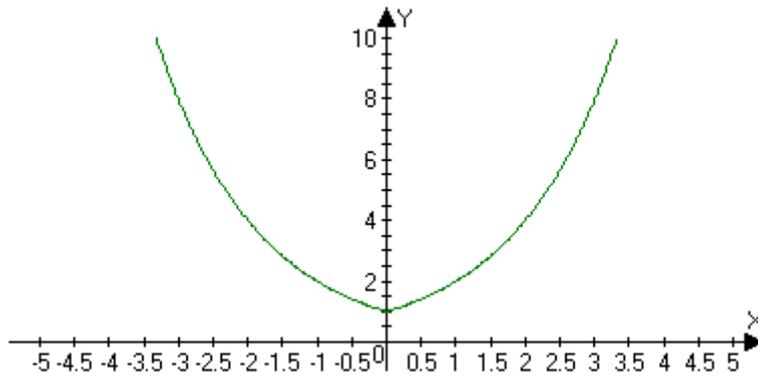
$$y = \log_a x, 0 < a < 1$$

Упражнения: построить графики следующих функций.

1) $y = \log_2 x$

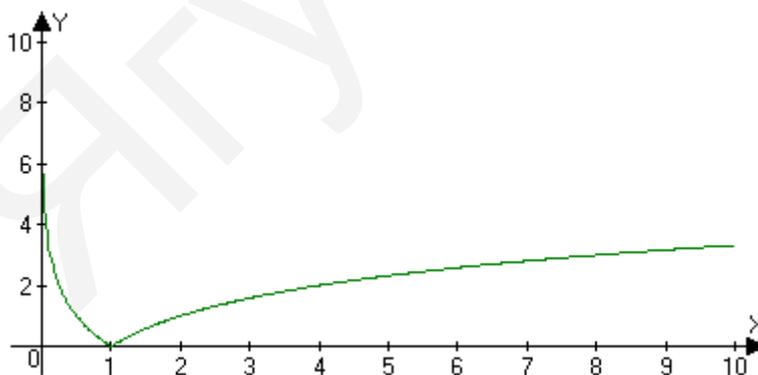


2) $y=2^{|x|}$

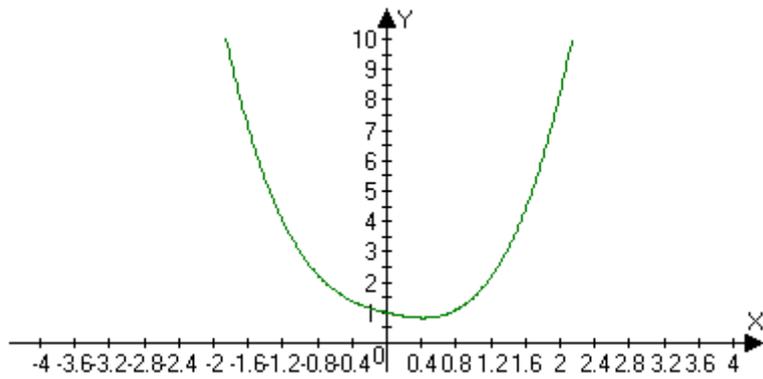


3) $y=2^{-|x|}$

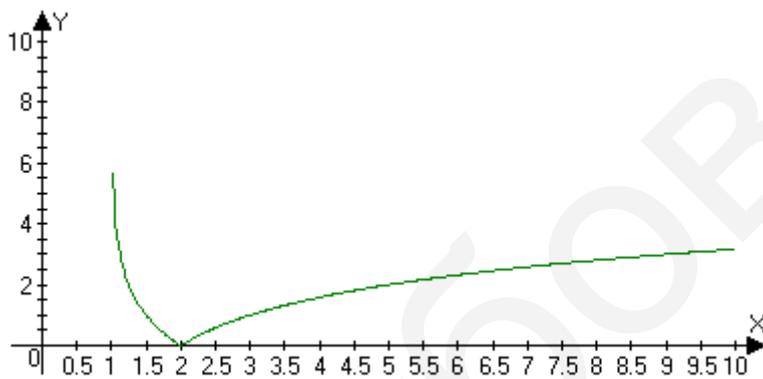
4) $y=|\log_2 x|$



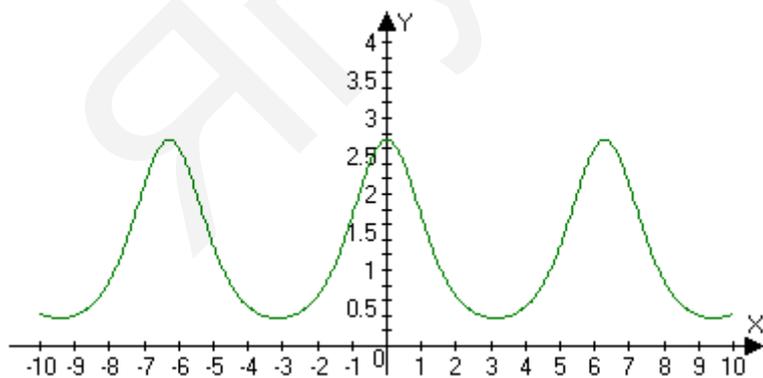
$$5) y = |x^3| + 2^{-x}$$



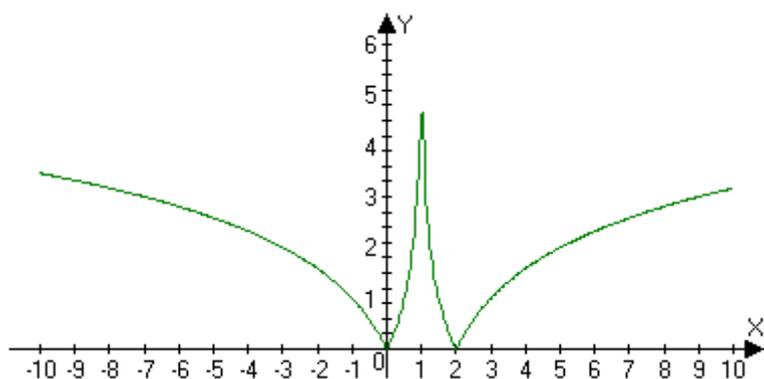
$$6) y = \log_2(x-1)$$



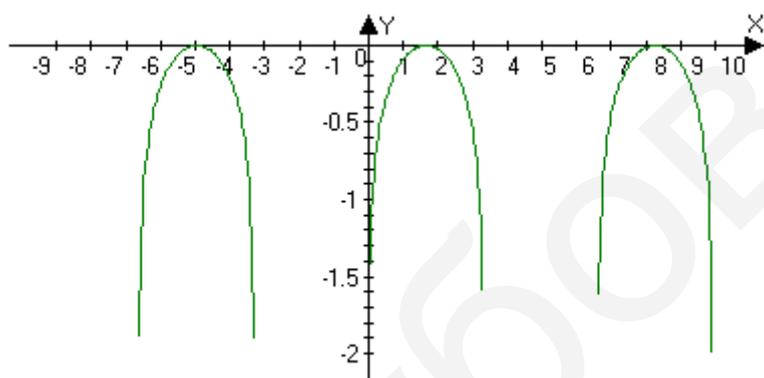
$$7) y = \exp(\cos x)$$



$$8) y = |\log_2 |x-1|$$



$$9) y = \lg(\sin x)$$



Задания для самостоятельной работы

2. Построить графики функций:

$$1) y = 3^{\log_3 x};$$

$$2) y = 3^{\log_3 x}$$

$$3) y = 2^{\log_3 |x|}$$

$$4) y = 3^{\log_3 \sin x}$$

$$5) y = 3^{-\log_3 x}$$

$$6) y = 3^{-\log_3 |x|}$$

$$7) y = 5^{\frac{1}{2} \log_3 x^2}$$

$$8) y = \log_2 |x-2|$$

$$9) y = 2^{x-1} + 3$$

$$10) y = 5^{\log_5(2-x) - \log_5 x}$$

Сравнение логарифмов

Пример 1. Сравнить $\log_2 3$ и $\log_3 5$

первый способ: умножение обеих частей на число $k \geq 2$

$$k=2 \quad 2\log_2 3 \quad \vee \quad 2\log_3 5$$

$$\log_2 3^2 \vee \log_3 5^2$$

$$3 < \log_2 9 < 4 \quad 2 < \log_3 25 < 3$$

поэтому $\log_2 3 > \log_3 5$

второй способ: деление отрезка пополам

$$1 < \log_2 3 < 2 \quad 1 < \log_3 5 < 2$$

сравним $\log_2 3$ и $\log_3 5$ с числом $\frac{3}{2}$ - серединой отрезка (1;2)

$$\log_2 3 \vee \frac{3}{2} \quad \log_3 5 \vee \frac{3}{2}$$

$$\log_2 3 \vee \log_2 2^{\frac{3}{2}} \quad \log_3 5 \vee \log_3 3^{\frac{3}{2}}$$

$$3 \vee 2^{\frac{3}{2}} \quad 5 \vee 3^{\frac{3}{2}}$$

возведем обе части сравнения в квадрат

$$9 > 8 \quad 25 < 27$$

$$\text{поэтому } \log_2 3 > \frac{3}{2} \quad \log_3 5 < \frac{3}{2}.$$

Ответ $\log_3 5 < \log_2 3$.

третий способ: используем неравенство о среднем арифметическом и среднем

геометрическом чисел $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

$$\text{рассмотрим отношение } \sqrt{\frac{\log_3 5}{\log_2 3}} = \sqrt{\log_3 5 \log_3 2} \leq \frac{\log_3 5 + \log_3 2}{2} = \frac{\log_3 10}{2} < 1$$

отношение меньше 1, когда числитель меньше знаменателя, поэтому

$$\log_3 5 < \log_2 3.$$

Пример 2. Сравним $\log_3 4$ и $\log_4 5$

Оба логарифма находятся в промежутке (1;2)

Будем умножать на числа $k \geq 2$

$$k=2 \quad 2\log_3 4 = \log_3 16; \quad 2\log_4 5 = \log_4 25$$

оба логарифма находятся в промежутке (2;3)

$$k=3 \quad 3\log_3 4 = \log_3 64; \quad 3\log_4 5 = \log_4 125$$

оба логарифма находятся в промежутке (3;4)

$$k=4 \quad 4\log_3 4 = \log_3 256; \quad 4\log_4 5 = \log_4 625$$

оба логарифма находятся в промежутке (4;5)

$$k=5 \quad 5\log_3 4 = \log_3 1024; \quad 5\log_4 5 = \log_4 3125$$

$$6 < \log_3 1024 < 7 \quad 5 < \log_4 3125 < 6$$

поэтому $\log_4 5 < \log_3 4$.

$$\text{Другим способом: } \sqrt{\frac{\log_4 5}{\log_3 4}} = \sqrt{\log_4 5 \log_4 3} \leq \frac{\log_4 5 + \log_4 3}{2} = \frac{\log_4 15}{2} < 1$$

Пример 3. Сравнить $\log_2 3$ и $\sqrt[3]{7}$

Оба числа находятся в промежутке (1;2)

Определим, как они расположены по отношению к середине отрезка – числу $\frac{3}{2}$

$$\log_2 3 \sqrt{\frac{3}{2}} = \log_2 \frac{3}{2} \quad \sqrt[3]{7} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$3 \sqrt{2^{\frac{3}{2}}} \quad 7 > \frac{27}{8}$$

$$9 > 8$$

$$\log_2 3 > \frac{3}{2} \quad \sqrt[3]{7} > \frac{3}{2}$$

оба числа больше $\frac{3}{2}$ и меньше 2.

Сравним их с серединой $(\frac{3}{2}; 2)$ – числом $\frac{7}{4}$

$$\log_3 2 \sqrt{\frac{7}{4}} = \log_2 2^{\frac{7}{4}} \quad \sqrt[3]{7} \sqrt{\frac{7}{4}}$$

$$3 \sqrt{2^{\frac{7}{4}}} \quad 7 \sqrt{\frac{7^3}{4^3}}$$

$$81 \sqrt{2^7} \quad 1 > \frac{49}{64}$$

$$81 < 128$$

$$\log_3 2 < \frac{7}{4} \quad \sqrt[3]{7} > \frac{7}{4}$$

Пример 4. Сравнить $\log_3 4$ и $\sqrt[4]{2}$

Оба числа находятся в промежутке $(1; 2)$

Сравним их с числом $\frac{3}{2}$

$$\log_3 4 \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \sqrt[4]{2} \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$4 \sqrt{3^{\frac{3}{2}}} \quad 2 < \frac{81}{16}$$

$$16 < 27$$

оба числа больше 1 и меньше $\frac{3}{2}$

Сравним их с серединой $(1; \frac{3}{2})$ – числом $\frac{5}{4}$

$$\log_3 4 \sqrt{\frac{5}{4}} \quad \sqrt[4]{2} \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$4 \sqrt{3^{\frac{5}{4}}} \quad 2 \sqrt{\frac{5^4}{4^4}}$$

$$256 > 243$$

$$2 < \frac{625}{256}$$

$$\text{Ответ } \sqrt[4]{2} < \frac{5}{4} < \log_3 4$$

Задания для самостоятельной работы

Сравнить $\log_7 8$ и $\log_8 9$; $\log_5 3$ и $\frac{2}{3}$; $\log_2 5$ и $2\frac{2}{3}$; $\log_2 5 + \log_5 3$ и 4; $\log_2 3 + \log_3 2$ и 2.

1. Доказать: $\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_\pi 2} > 2$
2. Вычислить без таблиц:
 - a) $\lg(\operatorname{tg} 40^\circ) \cdot \lg(\operatorname{tg} 40^\circ) \cdot \lg(\operatorname{tg} 42^\circ) \cdot \dots \cdot \lg(\operatorname{tg} 50^\circ)$
 - b) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \dots \cdot \log_9 10$
 - c) $\lg(\operatorname{tg} 3^\circ) \cdot \lg(\operatorname{tg} 6^\circ) \cdot \lg(\operatorname{tg} 9^\circ) \cdot \dots \cdot \lg(\operatorname{tg} 80^\circ)$
3. Найти x , если $\lg x = 5 \lg m - \frac{1}{2} \lg(m+n) - \frac{4}{5} \lg\left(\operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2}\right)$
4. Найти $\lg x$, если $x = \frac{\sqrt{5a^3(c+d)^5 \cos^2 \alpha}}{\sqrt[3]{3b \sin \frac{\alpha}{2}}}$
5. Сколько корней имеет уравнение $\operatorname{tg} x = \lg x$
6. При каких x имеет смысл выражение $\sqrt{\log_{0,1} \sin x}$
7. Доказать тождество $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$
8. Вычислить $\log_{\sqrt{3}} 8$, если $\log_{12} 3 = a$
9. Вычислить $\log_3 200$, если $\log_3 5 = a; \log_2 3 = b$
10. Вычислить
 - 1) $\log_{30} 8$, если $\lg 5 = a, \lg 3 = b$
 - 2) $\lg \sqrt[3]{25}$, если $\lg 64 = b$
11. Вычислить а) $2^{2+\log_1 7}$ б) $\log_{\sqrt{2}} \left(4\sqrt[3]{2} \cdot 3^{\log_1 \sqrt[5]{8}} \right)$
12. Вычислить

1) $\log_{\sqrt{3}-1} (6\sqrt{3}-10)$	2) $\log_{\sqrt{3}-1} (4-2\sqrt{3})$
3) $5^{\frac{\lg 5}{\lg 25}}$	4) $\log_{2\sqrt[3]{4}} (\sqrt{0,5})$
5) $\left((1,5)^{\frac{2}{2\log_3 3 - \log_5 4}} + 11 \cdot 8^{\log_{27} 3} \right)^{\frac{1}{3}}$	6) $\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}$
7) $\log_{\frac{1}{7}} \left(\frac{1}{49} \sqrt[5]{7} \cdot 5^{\log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{49}} \right)$	8) $\log_3 5 \cdot \log_4 9 \cdot \log_5 2$
13. Сравнить a и b ; $a = \log_{0,3} 0,09; b = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{11}$
14. Сравнить:
 - 1) $7\sqrt[3]{7}$ и $2^{(1,25\log_8 49 - 0,5\log_{0,25} 7)}$
 - 2) $\log_3 4$ и $\log_4 5$

- 3) $2^{\log_7 3} + \sqrt[5]{6}$ и $3^{\log_7 2} + 6^{\frac{1}{3} \log_6 3}$
15. Найти значение a , при котором три числа $\lg a, \lg(a-99), -1-2\lg a$ составляют арифметическую прогрессию.
16. Найти значение a , при котором три числа $\log_3(a+2), \log_3 \sqrt{13-14a}, \log_3(28-a^2)$ составляют арифметическую прогрессию.
17. Найти значение a , при котором три числа $2^a, 2^a-6, 4a-63,5$ составляют геометрическую прогрессию.
18. Найти значение a , при котором три числа $9^{a-2}, 3^a-2, 3^a+6$ составляют геометрическую прогрессию.
19. Найти значение a , при котором три числа $\log_2(5 \cdot 2^a + 1), \log_4(2^{1-a} + 1), 1$ составляют арифметическую прогрессию.
20. Доказать, что числа $\frac{1}{\log_3 2}, \frac{1}{\log_6 2}, \frac{1}{\log_{12} 2}$ составляют арифметическую прогрессию.
21. Каждая из двух троек чисел $\lg a, \lg b, \lg c$ и $\lg a - \lg 2b, \lg 2b - \lg 3c, \lg 3c - \lg a$ является арифметической прогрессией. Могут ли числа a, b, c быть сторонами треугольника?

§ 2.2. Решение уравнений, содержащих логарифмическую функцию

2.2.1. Логарифмические уравнения, решаемые, исходя из определения логарифма

Упражнения на простые логарифмические уравнения:

Пример 1. $\log_{9\left(\frac{1}{3}\right)} x = 1,5$ Ответ {3}

Пример 2. $\log_3(x-12) = 2$ Ответ {21}

Пример 3. $\log_{2\sqrt{2}}\left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{2}{3}$ Ответ {-1/2}

Пример 4. $\log_{11} \log_3 \log_2 \left(\frac{2}{(1-x)} \right) = 0$ Ответ {3/4}

Пример 5. $\log_{\log_{3\left(\frac{1}{27}\right)}^x} 27 = 1$ Ответ {3}

Пример 6. $\log_{\sin x} \left(\frac{4 \sin x - \cos x}{4} \right) = 3$

Решение:

$$\sin^3 x = (1/4)(4\sin x - \cos x), \sin x > 0, \sin x \neq 1, (4\sin x - \cos x) > 0.$$

$$\sin x(\sin^2 x - 1) + (1/4)\cos x = 0, \cos x(\sin x \times \cos x - 1/4) = 0$$

$$a) \cos x = 0 \text{ (п.к., т.к. } \sin x \neq 1)$$

$$б) \sin 2x = 1/2$$

$$\text{Ответ } x = \pi/12 + \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = 5\pi/12 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Пример 7. Найти точки пересечения графика функции

$$y = \log_2(\sqrt{4-x} + \sqrt{1-3x} - 6) \text{ с осями координат}$$

Решение:

$$\text{Положим } y=0, \text{ тогда } y = \log_2(\sqrt{4-x} + \sqrt{1-3x} - 6) = 0,$$

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{1-3x} - 6 = 1 \text{ и } \sqrt{4-x} + \sqrt{1-3x} = 7.$$

$$\text{Решим это уравнение. Пусть } \sqrt{4-x} = t \geq 0, \text{ тогда } 4-x = t^2, 4 = x - t^2,$$

И уравнение примет вид $t + \sqrt{3t^2 - 11} = 7$, откуда $\sqrt{3t^2 - 11} = 7 - t$

$$3t^2 - 11 = 49 - 14t + t^2, 2t^2 + 14t - 60 = 0, \text{ или } t^2 + 7t - 30 = 0, \text{ откуда}$$

$t_1 = 3, t_2 = -10$ ($t_2 < 0$, что невозможно на множестве \mathbb{R} , так как $\sqrt{4-x} \geq 0$, при $x \sqrt{4-x} \geq 0$, при $x \leq 4$).

Значит, $\sqrt{4-x} = 3$, откуда $4-x = 9$, и $x = -5$. Таким образом, график пересекает ось абсцисс в точке $(-5, 0)$.

2.2.2. Линейные уравнения, решаемые потенцированием

Уравнения типа $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$ $a \neq 1 > 0$, равносильны системе

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0 \\ f(x) > 0 \\ f(x) = \varphi(x) \end{cases}$$

Пример 8. $\lg x - \lg 11 = \lg 19 - \lg(30-x)$,

Решение: ОДЗ $x \in (0, 30)$

$$30x - x^2 = 209$$

$$\text{Ответ: } \{19, 11\}$$

Пример 9 $(\lg 8 - \lg(x-5))/(\lg(x+7)^{(1/2)} - \lg 2) = -1$

Решение: ОДЗ: $x > 5$;

$$\lg(8/(x-5)) = -1 \times \lg((x+7)^{(1/2)}/2) = \lg(2/(x+7)^{(1/2)})$$

$$8/(x-5) = 2/(x+7)^{(1/2)}$$

$$\text{Ответ } \{29\}$$

Пример 10. $\log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}(x^3 - 2) + \log_{0,2}(x - 2) = 4$

(Указание: привести к одному основанию)

$$\text{Ответ } \{3\}$$

Пример 11. $\lg 2x / \lg |4x - 15| = 2$

$$\text{Ответ } \{9/2; 25/8\}$$

Пример 12. $x \log_2 3 - 1 = -\log_2 18$

$$\text{Ответ } \{-2\}$$

2.2.3. Уравнения второй и выше степени относительно логарифма. Замена неизвестного

В данном разделе рассматриваются уравнения, в которых логарифмическая функция заменяется вспомогательной переменной.

Пример 13. $\lg^2 x - \lg x^4 = \lg^2 5 - 4$

Решение: ОДЗ: $x > 0$; пусть $t = \lg x$, тогда

$$t^2 - 4t - (\lg^2 5 - 4) = 0; \quad t_{1,2} = 2 \pm \lg 5;$$

Ответ $x = \{20, 500\}$

Пример 14. $(17 - \lg x)/(4 \times \lg x) = 4 \times \lg x$

Ответ $\{10^{(-17/16)}\} \cup \{10\}$

Пример 15. $3 \log_2^2(\sin x) + \log_2(1 - \cos 2x) = 2$

Ответ: $x = \pi/6 + 2\pi k, k \geq 0, 1, 2, \dots$ $x = 5\pi/6 + 2\pi n, n \geq 0, 1, 2, \dots$

Пример 16. $\log_x(125x) \log_{25}^2(x) = 1$

Решение: ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$. Перейдя к новому основанию, получаем

$$\frac{\log_5(125x) \log_5^2(x)}{\log_5 x} = 4, \quad (\log_5(125) + \log_5 x) \log_5^2 x = 4 \log_5 x,$$

$(3 + \log_5 x) \log_5^2 x = 4 \log_5 x$, пусть $t = \log_5 x$, тогда

$t(t^2 + 3t - 4) = 0, t_1 = 0 \Rightarrow x = 1$ (п.к.); $t_2 = 1 \Rightarrow x = 5$ Ответ $\{5; 1/625\}$

Пример 17. $\log_3 \log_4 \log_3^2(x - 3) = 0$

Решение: ОДЗ: $x > 3$, тогда $\log_4 \log_3^2(x - 3) = 1$,

$\log_3^2(x - 3) = 4 \Leftrightarrow \log_3(x - 3) = \pm 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x - 3 = 9 \\ x - 3 = \frac{1}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ x = \frac{29}{8} \end{cases}$$

Ответ $\{12; 28/9\}$

Пример 18. $\log_{x+3}(x^2 + x - 6)^2 = 2$

Решение: Согласно ОДЗ

$x > -3, x \neq -2; 2 \log_{x+3}|x^2 + x - 6| = 2$, далее получаем следующее уравнение $|x^2 + x - 6| = x + 3$, решая которое получаем ответ. Ответ $\{1; 3\}$

Пример 19. $\sqrt{4 \log_4 x - 2} + \sqrt{1 + \log_2 x} = 4$

Решение:

$\sqrt{4 \log_4 x - 2} + \sqrt{1 + \log_2 x} = 4$, положим $\sqrt{1 + \log_2 x} = t > 0$ тогда

$1 + \log_2 x = t^2$, тогда имеем $t + \sqrt{2(t^2 - 1) - 1} = 4$ $\sqrt{2(t^2 - 2)} = 4 - t$ и

$2(t^2 - 2) = (4 - t)^2$ или $t^2 + 8t - 20 = 0$, решая которое получаем два корня $t_1 = 2$ и $t_2 = -10$ (посторонний корень), и $\log_2 x = 3$ Ответ $\{8\}$.

Задачи для самостоятельной работы

Решить уравнения

ответы

$$\begin{array}{ll}
1) \log_4(10x-14) = 1 + \log_2(x-8) & \left\{ \frac{27}{2} \right\} \\
2) \log_4(10x+46) = 1 + \log_2(x-2) & \left\{ \frac{15}{2} \right\} \\
3) \log_3 x \cdot \log_8(9x) = \log_2 3 & \left\{ 3; \frac{1}{27} \right\} \\
4) \log_2 x \cdot \log_{81}(8x) = \log_3 2 & \left\{ 2; \frac{1}{16} \right\} \\
5) \log_3 \frac{x}{3} \cdot \log_{64} x = \log_2 3 & \left\{ 27; \frac{1}{9} \right\} \\
6) \log_4(20x-54) = 2 + \log_2(6-x) & \left\{ \frac{9}{2} \right\} \\
7) \frac{\lg(5x^2+1)}{\lg(2x+1)} = 2 & \{4\} \\
8) \frac{\lg(5x-19)}{\lg(x-3)} = 2 & \{7\} \\
9) \frac{\lg(3x^2-3x+1)}{\lg x} = 2 & \left\{ \frac{1}{2} \right\} \\
10) \frac{\lg(3x^2-16x+21)}{\lg(x-1)} = 2 & \{5\} \\
11) 1 + \log_{\sqrt{3}} x = \log_3(5x+2) & \{2\} \\
12) \log_{\sqrt{2}} x + \log_2 3 = 2 + \log_2(x+1) & \{2\}
\end{array}$$

2.2.4. Уравнения, содержащие неизвестные в основании логарифмов

В данном разделе рассматриваются несколько различных типов уравнений.

Уравнения вида $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\psi(x)} g(x)$ можно решать с помощью перехода к числовому основанию, но учитывать, что

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0, \varphi(x) \neq 1 \\ \psi(x) > 0, \psi(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Пример 20. $\log_x(2x+1) = \log_{2x^3+x^2}(4x^3+4x^2+x)$

Решение: ОДЗ состоит из двух промежутков $0 < x < 1$ и

$1 < x < \infty$. Переходя к логарифмам по основанию, например, 2, получим уравнение

$$\frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x} = \frac{\log_2(4x^3+4x^2+x)}{\log_2(2x^3+x^2)} \quad \text{равносильное исходному на ОДЗ,}$$

которое можно записать в виде

$$\frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x} = \frac{\log_2 x + 2\log_2(2x+1)}{2\log_2 x + \log_2(2x+1)}, \quad \text{обозначив } \frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x} = t, \text{ решим}$$

уравнение относительно t , получим $t_1 = 1$ и $t_2 = -1$. Ответ $\{1/2\}$.

Уравнения вида $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\psi(x)} g(x)$ можно решать с помощью перехода к основанию, содержащему неизвестную. О.Д.З. определяется системой.

$$\begin{cases} \varphi(x) > 0, \varphi(x) \neq 1 \\ \psi(x) > 0, \psi(x) \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Пример 21. $\log_x x^2 - \log_{8x} x^3 = 0$

Решение: ОДЗ состоит из всех x , удовлетворяющих условиям $x > 0$, $x \neq 4$, $x \neq 1/8$. Здесь удобно перейти к логарифмам по основанию x , но сначала проверим является ли $x=1$ корнем исходного уравнения. Проверка показывает, что $x=1$ является корнем исходного уравнения. Перейдя теперь к логарифмам по основанию x , учитывая, что $x > 0, x \neq 1, x \neq 4, x \neq 1/8$, получим уравнение

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x \frac{x}{4}} - \frac{\log_x x^3}{\log_x 8x} = 0 \quad \text{далее} \quad \frac{2}{1 - \log_x 4} - \frac{3}{\log_x 8 + 1} = 0,$$

преобразуется к виду $2(1 + \log_x 8) - 3(1 - \log_x 4) = 0$ или $12 \log_x 2 = 1$, которое имеет единственный корень $x = 2^{12}$. Ответ: $\{1, 2^{12}\}$.

Замечание: уравнения вида $\log_{\varphi(x)} h(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$ можно решать
 $\log_{f(x)} \varphi(x) = \log_{g(x)} \varphi(x)$

переходя от этих уравнений к их следствиям, т.е. от первого уравнения к $h(x)=g(x)$, а от второго к совокупности $f(x)=g(x)$ и $\varphi(x)=1$. Затем проверить какие из найденных корней будут корнями исходного уравнения.

Пример 22. $\log_{1+x+\sin x}(x^2+x-1) = \log_{1+x+\sin x}(3x+2)$

Решение: перейдем к следствию $x^2+x-1=3x+2$, найдем корни $x_1=3$ и $x_2=-1$ (п.к., т.к. функция в основании логарифмов отрицательна). Проверяем первый корень. Ответ $\{3\}$

Пример 23.

$$\log_{\sin x + \cos^2 x + \sqrt{\cos x}}(1 - \sqrt{x^2 - x}) = \log_{\sin x + 1 + \sqrt{\cos x}}(1 - \sqrt{x^2 - x})$$

Решение. Совокупность уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \cos^2 x + \sqrt{\cos x} = \sin x + 1 + \sqrt{\cos x} \\ 1 - \sqrt{x^2 - x} = 1 \end{cases}$$

является следствием исходного уравнения. Первое уравнение приводится к виду $\cos x = \pm 1$, но так как $\cos x$ неотрицателен, то $x = 2\pi k$. При любом $x_k = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, функция $\sin x + \cos^2 x + \sqrt{\cos x}$ равна 2, т.е. при этих x_k основания логарифмов равны 2. Поэтому решениями будут те $x_k = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, для которых $1 - \sqrt{x_k^2 - x_k} > 0$. Только $x_0 = 0$ удовлетворяет этому условию, и следовательно, является решением исходного уравнения.

Решения уравнения $1 - \sqrt{x^2 - x} = 1$ есть $x = 0, x = 1$ Так как $\sin 1 > \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 1 > \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то

$$\sin 1 + 1 + \sqrt{\cos 1} > 1, \sin 1 + \cos^2 1 + \sqrt{\cos 1} > \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 1$$

Только $x = 1$ удовлетворяет исходному уравнению. Следовательно, решениями являются $x = 0$ и $x = 1$. Ответ $\{0; 1\}$

Уравнения вида $\log_{f(x)} g(x) = a$, где $a = n$, n – натуральное число решаются переходом к следствию $g(x) = [f(x)]^n$.

Пример 24. $\log_{2x-1}(2x^2 + 4x + 1) = 2$.

Решение. ОДЗ:
$$\begin{cases} x \in (\frac{1}{2}; 1) \cup (1; +\infty) \\ x \in (-\infty; -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \cup (-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty) \end{cases}$$

Уравнение $2x^2 + 4x + 1 = (2x - 1)^2$ является следствием исходного уравнения, корнями которого будут $x_1 = 4$ и $x_2 = 0$. Подходит $x = 4$. Ответ $\{4\}$

Уравнения 25,26,27 решаются логарифмированием обеих частей.

Пример 25. $x^{\log_2 x + 2} = 256$

Решение: $x \in (0, \infty)$; $\log_2 x = t$; $t^2 + 2t - 8 = 0$;

$t_{1,2} = \{-4; 2\} \Rightarrow$

Ответ $\{1/16; 4\}$

Пример 26. $x^{\lg x^{(1/4)}} = 10$

Ответ $\{100; 1/100\}$

Пример 27. $(x + 7)^{\lg(x+7)} = 10$

Ответ $\{3; -69/10\}$

Задачи для самостоятельной работы

Решить уравнение

ответы

1) $(\log_2(5 - 4x)) \cdot \log_x \left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$\left\{\frac{1}{4}\right\}$

2) $(1 - \log_3(7 - 4x)) \cdot \log_x 3 = 1$

$\left\{\frac{3}{4}\right\}$

3) $(\log_5 x + \log_x 5 + 2) \cdot (\log_5 x - \log_{5x} x) = 6$

$\left\{25; \frac{1}{125}\right\}$

4) $(\log_x 2) \cdot \log_2 \left(7 - \frac{6}{x}\right) = 1$

$\{6\}$

5) $\left(1 + \log_3 \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{x}\right)\right) \cdot \log_x 3 = 1$

$\{3\}$

6) $(2 - \log_2(9 - 5x)) \cdot \log_x 2 = 1$

$\left\{\frac{4}{5}\right\}$

7) $(\log_2(6 - 5x)) \cdot \log_x \left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$\left\{\frac{1}{5}\right\}$

8) $(\log_2 x + \log_x 2 + 2)(\log_2 x - \log_{2x} x) = 12$

$\left\{8; \frac{1}{16}\right\}$

9) $x^{\lg x^{\frac{1}{4}}} = 10$

$\left\{100; \frac{1}{100}\right\}$

10) $(x + 7)^{\lg(x+7)} = 10$

$\left\{3; -\frac{69}{10}\right\}$

§2.3 Решение неравенств

2.3.1. К решению логарифмических неравенств сводятся некоторые задачи на отыскание области определения функции

Пример 28. Найти область определения функции $y = \sqrt{\lg(x^2 - 7x + 13)}$

Решение: $\lg(x^2 - 7x + 13) \geq 0$

$\begin{cases} x^2 - 7x + 13 > 0 \\ x^2 - 7x + 13 \geq 1 \end{cases}$

Ответ: $(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$

Пример 29. $y = \lg x + (x+1)^{(1/2)}$

Ответ: $\{x>0\}$

Пример 30. $y = \lg \sin x$

Ответ: $\{(2\pi k; \pi+2\pi k), k \in \mathbb{Z}\}$

Пример 31. $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{x+3}{x-3}}$

Ответ: $(6; +1)$

Пример 32. $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \log_2 |x-2|}$

Ответ: $[0; 2) \cup (2; 4]$

2.3.2. Решение неравенств типа $\log_{f(x)} \varphi(x) \geq k$

Решения неравенств, рассматриваемых в данном разделе, сводятся к решению совокупности следующих систем.

$$\begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ 0 < \varphi(x) \leq [f(x)]^m \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) > 1 \\ \varphi(x) \geq [f(x)]^m \end{cases}$$

Пример 33. $\log_{(3-x)}(x-2,5) > 0$

Решение:

$$\begin{cases} 3-x > 1 \\ x - \frac{5}{2} > 1 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

Ответ $(5/2; 3)$

$$\begin{cases} 0 < 3-x < 1 \\ x - \frac{5}{2} < 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}; 3\right)$$

Пример 34. $\log_{(x-1)}(2(x-2)(x-4)/(x+5)) \geq 1$ Ответ $(8-\sqrt{43}; 2) \cup (8+\sqrt{43}; \infty)$

Пример 35. Ответ: $(-3; -2) \cup (-2; \frac{1-\sqrt{21}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{21}}{2}; 3) \cup (3; \infty)$

Пример 36. $\log_{\log_{\left(\frac{1}{2}\right)^x}}(x^2 - 10x + 22) > 0$

Решение: неравенство равносильно совокупности систем а) и б)

$$a) \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x > 1 \\ x^2 - 10x + 22 > 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; 3\right) \cup (7; +\infty)$$

$$b) \begin{cases} 0 < \log_{\frac{1}{2}} x < 1 \\ 0 < x^2 - 10x + 22 < 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \emptyset$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 3\right) \cup (7; +\infty)$

Пример 37. $\log_7 \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2 + |x| - 30}{x + 6} < 0$

Решение: неравенство равносильно

$$\frac{x^2 - |x| - 30}{x + 6} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{x^2 + x - 30}{x + 6} > \frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{x^2 - x - 30}{x + 6} > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ:

$$x \in \left(\frac{16}{3}; 6\right) \cup \left(1 - \sqrt{37}; \frac{2 - \sqrt{292}}{3}\right)$$

Пример 38. $\log_{((2x+2)/(5x-1))}(10x^2 + x - 2) \leq 0$ Ответ $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

Пример 39. $\log_{\left(\frac{x+3}{x-3}\right)} 4 < 2(\log_{\frac{1}{2}}(x-3) - \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(x+3)^{\frac{1}{2}})$ Ответ $(3; 9)$

2.3.3. Неравенства вида $\log_{f(x)} \varphi(x) \geq \log_{f(x)} h(x)$

Неравенства данного раздела сводятся к решению следующих систем:

$$\begin{cases} \varphi(x) \geq h(x) > 0 \\ f(x) > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 < \varphi(x) \leq h(x) \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$$

Аналогично $\log_{f(x)} \varphi(x) \leq \log_{f(x)} h(x)$

$$\begin{cases} 0 < \varphi(x) \leq h(x) \\ f(x) > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 < h(x) \leq \varphi(x) \\ 0 < f(x) < 1 \end{cases}$$

Пример 40. $\log_{x^2}(x^2 - 4x + 3) > \log_{x^2} x^2$

Решение: неравенство равносильно совокупности следующих систем:

$$\begin{cases} x^2 > 1 \\ x^2 - 4x + 3 > x^2 > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ 0 < x^2 - 4x + 3 < x^2 \end{cases} \quad \text{Ответ: } x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{3}{4}; 1\right)$$

Пример 41. $\lg_{|x-4|} \sqrt{x+7} > \lg_{|x-4|} |x+1|$

Решение: перепишем неравенство в виде

$$\lg_{|x-4|} \frac{\sqrt{x+7}}{|x+1|} > 0, \text{ где } x \neq -1, x > -7$$

Неравенство эквивалентно совокупности двух систем

$$\begin{cases} x > 5 \\ x < 3 \\ x \neq -1 \\ x + 7 > (x + 1)^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -1 < x - 4 < 1 \\ x \neq 4 \\ x > -7 \\ x + 7 < (x + 1)^2 \end{cases} \quad \text{Ответ: } (-3; -1) \cup (-1; 2) \cup (3; 4) \cup (4; 5)$$

Пример 42. $\log_{24-2x-x^2}(x+6) \leq \log_{24-2x-x^2}(4-x)$

Решение: Неравенство эквивалентно совокупности следующих систем:

$$\begin{cases} 0 < x + 6 \leq 4 - x \\ 24 - 2x - x^2 > 1 \\ x + 6 \geq 4 - x > 0 \\ 0 < 24 - 2x - x^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-6; -1] \\ x \in \left(\frac{-1-2\sqrt{6}}{2}; \frac{-1+2\sqrt{6}}{2} \right) \\ x \in [-1; 4] \\ x \in \left(-6; \frac{-1-2\sqrt{6}}{2} \right) \cup \left(\frac{-1+2\sqrt{6}}{2}; 4 \right) \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{-1-2\sqrt{6}}{2}; -1 \right] \cup \left(\frac{-1+2\sqrt{6}}{2}; 4 \right)$

Пример 43.

$$(\log_{3-x}(2x+1))(\log_{2x+1}x^2) \leq (\log_{3-x}(3x+1))(\log_{3x+1}(x+2))$$

Решение: переходя к основанию $(3-x)$, получим

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{3-x}x^2 \leq \log_{3-x}(x+2) \\ 2x+1 > 0 \\ 2x+1 \neq 1 \\ 3x+1 > 0 \\ 3x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3-x > 1 \\ 0 < x^2 \leq x+2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < 3-x < 1 \\ 0 < x+2 \leq x^2 \end{cases} \\ x > -\frac{1}{3} \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \text{Ответ: } x \in \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup (0; 2) \cup (2; 3)$$

Пример 44. $\log_{21+4x-x^2}(7-x) \geq \log_{21+4x-x^2}(x+3)$

Решение: неравенство эквивалентно совокупности следующих систем:

$$\left[\begin{cases} 21 + 4x - x^2 > 1 \\ 7 - x \geq x + 3 > 0 \\ 0 < 21 + 4x - x^2 < 1 \\ 0 < 7 - x \leq x + 3 \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x \in (2 - 2\sqrt{6}; 2 + 2\sqrt{6}) \\ x \in (-3; 2] \\ ((-3; 2 - 2\sqrt{6}) \cup (2 + 2\sqrt{6}; 7)) \\ [2; 7) \end{cases} \right]$$

$$\text{Ответ: } (2 - 2\sqrt{6}; 2) \cup (2 + 2\sqrt{6}; 7)$$

Пример 45. $\log_{\sqrt{x-1}} \frac{x-8}{x^2-2x-3} \leq 0$

Решение: неравенство эквивалентно совокупности систем

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} > 1 \\ 0 < x-8 \leq x^2-2x-3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sqrt{x-1} < 1 \\ x-8 \geq x^2-2x-3 > 0 \end{cases}$$

Решение первой системы $x > 8$; у второй системы решений нет.

$$\text{Ответ: } x \in (8; +\infty)$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенство

1) $\log_3 \left(1 - \frac{2}{3x+2} \right) < 1$

ответы
 $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$

2) $2 + \log_2 \left(1 + \frac{1}{x} \right) < 0$

$$\left(-\frac{4}{3}; -1 \right)$$

3) $\log_{\frac{1}{2}} \left(3 + \frac{2}{x} \right) > 0$

$$\left(-1; -\frac{2}{3} \right)$$

- 4) $2 \cdot \log_x 3 < 1$ $(0; 1) \cup (9; +\infty)$
- 5) $1 + 3 \log_x 2 > 0$ $\left(0; \frac{1}{8}\right) \cup (1; +\infty)$
- 6) $\frac{\lg(7x^2 - 10x + 4)}{\lg x} > 2$ $\left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$
- 7) $1 + \log_x(8 - 7x) < 0$ $\left(\frac{1}{7}; 1\right) \cup \left(1; \frac{8}{7}\right)$
- 8) $\log_2\left(\frac{x}{2x-1}\right) + \log_2(x+1) \leq 1$ $(-1; 0) \cup [1; 2]$
- 9) $\frac{\lg(81x^2 - 144x + 64)}{\lg x} > 2$ $\left(\frac{4}{5}; \frac{8}{9}\right) \cup \left(\frac{8}{9}; 1\right) \cup (1; +\infty)$
- 10) $\log_2 \frac{x^2 - 2x}{x - 3} \leq 3$ $(0; 2) \cup [4; 6]$
- 11) $3 + \log_{\sqrt{3}} x \leq \log_3(6x + 1)$ $\left[0; \frac{1}{3}\right]$
- 12) $\log_x(9x^2 - 24x + 16) < 2$ $(0; 1) \cup \left(1; \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; 2\right)$
- 13) $\log_x(5x^2 - 7x + 3) > 2$ $\left(\frac{3}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$
- 14) $\log_x(16 - 24x + 9x^2) < 2$ $(0; 1) \cup \left(1; \frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$
- 15) $\log_2\left(\frac{x^2 + 4x}{x - 2}\right) < 4$ $(-4; 0) \cup (4; 8)$
- 16) $\log_x(25x^2 - 40x + 16) > 2$ $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{5}; 1\right) \cup (1; +\infty)$
- 17) $1 + \log_x\left(\frac{x}{9x - 8}\right) < 0$ $\left(\frac{8}{9}; 1\right) \cup (1; 8)$
- 18) $\log_2 \frac{x+1}{x} + \log_2(x+3) < 3$ $(-3; -1) \cup (1; 3)$
- 19) $\lg\left(3 + \frac{4}{x}\right) < 0$ $\left(-2; -\frac{4}{3}\right)$

- 20) $\log_3(3x^2 - 8x) \leq 1$ $\left[-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(\frac{8}{3}; 3\right]$
- 21) $\log_{\sqrt{2}} x + \log_2 3 \leq 2 + \log_2(x+1)$ $(0; 2]$
- 22) $\log_2\left(\frac{x}{x+2}\right) < 1$ $(-\infty, -4) \cup (0; +\infty)$
- 23) $1 + \log_2\left(\frac{2x-1}{x}\right) \geq \log_2(x+1)$ $(-1; 0) \cup [1; 2]$
- 24) $\log_{0,5}(2x+1) < \log_2(2-3x)$ $\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$
- 25) $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_x 3 - \frac{5}{2}$ $\left(\frac{1}{2}; 2\right) \left(\frac{1}{2}; 2\right)$
- 26) $(1,25)^{1-(\log_2 x)^2} < (0,64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}$ $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (32; +\infty)$
- 27) $4^{\sin^2 \pi x} + 3 \cdot 4^{\cos^2 \pi x} \leq 8$ $\left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n\right)$
- 28) $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} < 10^{-3} \cdot (10^{3-x})^2$ $(-3; 1)$
- 29) $x^{\log_3(x^2-2x-2)} > 1$ $(0; 1) \cup (3; +\infty)$
- 30) $5^{\lg\left(x^2-5x+\frac{17}{4}\right)} < \frac{1}{25}$ $\left(\frac{5+2\sqrt{2}}{2}; \frac{5+\sqrt{201}}{2}\right)$
- 31) $3^{\log_6(x^2-4x-4)} < 1$ $(-1; 2-\sqrt{6}) \cup (2+\sqrt{6}; 5)$
- 32) $\frac{0,2^{x-0,5}}{\sqrt{5}} > 5 \cdot 0,04^{x-1}$ $(3; +\infty)$
- 33) $\log_{\frac{14}{3}}(x^2+2x-3) < 0$ $(-\infty; -1-\sqrt{5}) \cup (-1+\sqrt{5}; +\infty)$
- 34) $\log_{\frac{1}{4}}(x^2-2x+3) < \log_{\frac{1}{4}}(8+2x)$ $(-4; -1) \cup (5; +\infty)$
- 35) $\log_2 \log_2 \frac{12x-7}{x+1} > 0$ $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{9}{10}; +\infty\right)$
- 36) $\frac{\log_5(x-2)}{\log_5(x+3)} < 0$ $(2; 3) \cup (3; +\infty)$
- 37) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1$ $\left(1; \frac{3}{2}\right)$
- 38) $\log_{\frac{3}{5}} \frac{1}{x-2} > 0$ $(3; +\infty)$

Глава III. Различные задачи, связанные с логарифмической и показательной функциями

§ 3.1. Смешанные уравнения и неравенства, содержащие логарифмическую и показательную функции

В настоящем разделе рассматриваются различные уравнения и неравенства, которые содержат показательные и логарифмические функции.

Пример 1. $x^{\log_7 x} + 7^{\log_7^2 x} < 14$

Решение: ОДЗ: $x > 0$

Согласно основному логарифмическому тождеству $x = 7^{\log_7 x}$,

тогда $x^{\log_7 x} = 7^{\log_7^2 x}$ и исходное неравенство принимает вид:

$$2 \times 7^{\log_7^2 x} < 14 \Leftrightarrow 7^{\log_7^2 x} < 7 \Leftrightarrow \log_7^2 x < 1$$

$$(\log_7 x - 1)(\log_7 x + 1) < 0$$

$$-1 < \log_7 x < 1 \Leftrightarrow \log_7 \frac{1}{7} < \log_7 x < \log_7 7 \Rightarrow \frac{1}{7} < x < 7 \quad \text{Ответ: } \left(\frac{1}{7}; 7\right)$$

Пример 2. $3 - 2^x = \left|2^x - 3\right| \log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+9}{2x+4}$ Ответ: $\{-7/2\}$

Пример 3. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 6$ Ответ $\{3; 1/3\}$

Решение: $x > 0$; $(3^{\log_3 x})^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 6$; $2x^{\log_3 x} = 6$; $\log_3 x \times \log_3 x = 1$; \Rightarrow

Ответ $\{3; 1/3\}$

Пример 4. $\log_{2^{x-1}}(x^2 - 6x + 9) < 0$ Ответ $(0; 1) \cup (2; 3) \cup (3; 4)$

Пример 5. $2^{2 \lg x} + 2^3 = 6x^{\lg 2}$ Ответ $\{10; 100\}$

Пример 6. $\log_{|2x+2|}(1 - 9^x) < \log_{|2x+2|}(1 + 3^x) + \log_{|2x+2|}\left(\frac{5}{9} + 3^{x-1}\right)$

Ответ: $(-3/2; -1) \cup (-1/2; 0)$

Пример 7. $\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)$

Решение:

$$\log_2(4^x + 4) = \log_2 2^x + \log_2(2^{x+1} - 3)$$

$$\log_2(4^x + 4) = \log_2 \left[2^x (2 \times 2^x - 3) \right]$$

потенцируя по основанию 2, получим $4^x + 4 = 2 \times 2^{2x} - 3 \times 2^x$

$$2^{2x} + 4 = 2 \times 2^{2x} - 3 \times 2^x$$

Вводим новую переменную $y = 2^x > 0$

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow y_1 = 4; y_2 = -1(\text{н.к.}) \Rightarrow 2^x = 4 \Rightarrow x = 2;$$

Проверка подстановкой $x=2$ в исходное уравнение подтверждает, что ответ $\{2\}$.

Пример 8. $x^{2\lg^2 x} = 10x^3$

Решение: ОДЗ: $x > 0$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10.

$$2\lg^2 x \lg x = 1 + 3\lg x$$

$$2\lg^3 x - 3\lg x - 1 = 0$$

Раскладывая левую часть на множители, получим:

$$(\lg x + 1)(2\lg^2 x - 2\lg x - 1) = 0$$

$$1) \lg x = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{10}$$

$$2) 2\lg^2 x - 2\lg x - 1 = 0 \Rightarrow \lg x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = 10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}; x_3 = 10^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}} \quad x_2 = 10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}; x_3 = 10^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}} \quad \text{Ответ: } \left\{ \frac{1}{10}; 10^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}; 10^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}} \right\}$$

Пример 9. $9^{2(\log_6 x)^{-2}} + 9 = 10 \times 9^{(\log_6 x)^{-2}}$,

Решение: ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$ Используем замену переменной $y = 9^{(\log_6 x)^{-2}} > 1$

$$y^2 - 10y + 9 = 0 \Rightarrow y_1 = 9; y_2 = 1$$

$$1) 9^1 = 9^{(\log_6 x)^{-2}} \Leftrightarrow (\log_6 x)^{-2} = 1 \Leftrightarrow \log_6 x = \pm 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6}; 6$$

$$2) 1 = 9^0 = 9^{(\log_6 x)^{-2}} \text{ не имеет решения.}$$

Ответ: $\{1/6; 6\}$

Пример 10. $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$

Решение: ОДЗ: $x < 3$

$$\log_2(9 - 2^x) = 3 - x; 2^{3-x} = 9 - 2^x$$

$$\frac{8}{2^x} - 9 + 2^x = 0, \quad 2^{2x} - 9 \times 2^x + 8 = 0 \quad \text{Замена переменной } y = 2^x > 0$$

$$y^2 - 9y + 8 = 0 \Rightarrow y_1 = 8 = 2^x \Rightarrow x = 3(\text{н.к.})$$

$$y_2 = 1 \Rightarrow 2^x \Rightarrow x = 0;$$

Ответ: $\{0\}$

Задачи для самостоятельного решения.

Решить уравнение

ОТВЕТЫ

1. $\log_3 x^3 + \log_2 x^2 = \frac{2\lg 6}{\lg 2} + 1$

$\{3\}$

2. $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$

$\left\{ \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$

3. $5^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 100$

$\{2\}$

4. $\frac{1}{\log_6(3+x)} + \frac{2\log_{0,25}(4-x)}{\log_2(3+x)} = 1$ {3}
5. $\log_3(3+\sqrt{3+x}) = \frac{2}{\log_x 3}$ $\left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$
6. $\sqrt[3]{1+\lg tgx} + \sqrt[3]{1-\lg tgx} = 2$ $\left\{\frac{\pi}{4} + \pi k\right\}$
7. $\frac{\lg \sqrt{3x-1} - \lg x}{2 + \lg \sqrt{2} + \lg 0,01} = 1$ $\left\{1; \frac{1}{2}\right\}$
8. $\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x} - 2 = 0$ $\left\{\frac{1}{2\log_3 2}\right\}$
9. $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 \sqrt{x+1} + \frac{1}{2}\log_3(x^2-1)} = \sqrt{2(x-1)}$ {3}
10. $(\log_2)^2 = 2 + 2\log_2 \sqrt{x}$ $\left\{\frac{1}{4}; 1\right\}$
11. $3^{1-2\log_3 \sqrt{x-1}} = \frac{3}{\sqrt{2(x-1)}}$ {3}
12. $\frac{2\lg 2 + \lg(x-3)}{\lg(7x+1) + \lg(x-3) + \lg 1} = \frac{1}{2}$ $\left\{\frac{49}{9}\right\}$
13. $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{1}{2}} - 3^{2x-1}$ $\left\{\frac{1}{2}\right\}$
14. $(\log_2 x)^2 + \log_{\frac{1}{2}} x = 2$ $\left\{4; \frac{1}{2}\right\}$
15. $(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5$ $\left\{32; \frac{1}{5}\right\}$
16. $\lg \sqrt{2} - \lg \sqrt{5x-4} = \lg \sqrt{x+1}$ {1}
17. $2 \cdot \log_x 3 \cdot \log_{3x} 3 = \log_{9\sqrt{x}} 3$ $\left\{9; \frac{1}{3}\right\}$
18. $\frac{\lg(\sqrt{x+1}+1)}{\lg \sqrt[3]{x-4}} = 3$ {3; 8}
19. $\log_3(4 \cdot 3^{x-1} - 1) = 2x - 1$ {3; 1}
20. $\log_{3x}\left(\frac{3}{x}\right) + (\log_3 x)^2 = 1$ $\left\{\frac{1}{9}; 3; 1\right\}$
21. $\lg 100 + \frac{1}{3} \cdot \lg(1125 - 5^{\sqrt{3x}}) = 3$ n {3}
22. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ $\left\{\frac{3}{2}\right\}$
23. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}}(5x+3) = -2$ $\left\{\frac{7}{5}\right\}$

24. $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4$ $\{2; -2\}$
25. $3^{1-x} \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x$ $\left\{ \frac{1}{1-\log_2 3} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{3} \right)} \right\}$
26. $\lg(2^{x-2} + 9) + \lg 2 = 1 + \lg(2^{x-2} + 1)$ $\{2\}$
27. $\log_x \sqrt{3} + \log_x 3x = \log_x^2 \sqrt{3} - 3$ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}; \sqrt[8]{3} \right\}$
28. $-\log_x 64 - \log_2 x + 5 = 0$ $\{8; 4\}$
29. $\log_x 81 - \log_3 x + 3 = 0$ $\left\{ 81; \frac{1}{3} \right\}$
30. $-\log_{\sqrt[3]{x}} 16 - \log_2 x + 7 = 0$ $\{8; 16\}$
31. $\log_{\sqrt{x}} 16 - \log_2 x - 2 = 0$ $\left\{ 4; \frac{1}{16} \right\}$

§ 3.2. Уравнения и неравенства, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные ВУЗы

В данном параграфе рассматриваются примеры задач, предлагавшиеся в МГТУ им. Н.Э.Баумана, МГУ, МФТИ, МИЭМ, МЭИ в течение нескольких последних лет.

Пример 1. $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x - 2 = 0$ Ответ $\{\pi/4 + 2\pi k\}$

Пример 2. $3 \log_{a^2 x} x + \frac{1}{2} \log_{\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)} x = 2$ Ответ $\{a; a^{(4/3)}\}$

Пример 3. $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_4 x + \log_2^2 x = \frac{1}{2} \log_x x$ Ответ $\{2; 1/\sqrt{2}\}$

Пример 4. $\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) = 1$ Ответ $\{10^{2k}; 10^{(1/2+2n)}, n, k \in \mathbb{Z}\}$

Пример 5. $\log_2 (3x^2 - 16x + 13) \log_{2-3x} 2 \geq 2$

Решение: ОДЗ: $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$\frac{\log_2 (3x^2 - 16x + 13)}{\log_2 (2 - 3x)} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 \frac{3x^2 - 16x + 13}{(2 - 3x)^2}}{\log_2 (2 - 3x)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{3x^2 - 16x + 13}{(2 - 3x)^2} - 1}{2 - 3x - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6x^2 + 4x - 9}{(2 - 3x)(3x - 1)} \geq 0$$

С учетом ОДЗ решение неравенства имеет следующий

вид: $x \in \left[\frac{2 - \sqrt{58}}{6}; \frac{1}{3} \right)$. Ответ: $\left[\frac{2 - \sqrt{58}}{6}; \frac{1}{3} \right)$

Пример 6. Решить $\frac{1 + \log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+4} + \log_{\frac{1}{2}} (13-x)}{|x^2 + 2x - 3| - |2x^2 - 10x + 8|} \geq 0$

Решение:

$$\frac{\log_2(2x+8) - \log_2(13-x)}{(x^2 + 2x - 3)^2 - (2x^2 - 10x + 8)^2} \geq 0$$

$$\begin{cases} 2x+8 > 0 \\ 13-x > 0 \\ \frac{(2x+8) - (13-x)}{((x^2 + 2x - 3) - (2x^2 - 10x + 8))((x^2 + 2x - 3) + (2x^2 - 10x + 8))} \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } (-4; 11) \setminus \left\{ 1; \frac{5}{3} \right\}$$

Пример 7. $\log_{(1/3)} \log_2((x^2 - |x| - 12)/(x+3)) > 0$ Ответ $(-\sqrt{15}; (1 - \sqrt{73})/2) \cup (5; 6)$

Пример 8. $\log_{x+1} 9x/2 \geq \log_{1/x+1} 9/(2x)$ Ответ $[1/2; 1] \cup [2; \infty)$

Пример 9. $\log_2^2 x + \log_x 4 \geq -1$ Ответ $(0; 1/2] \cup (1; \infty)$

Пример 10. $\log_2^2 x + 3\log_2 x \times \log_2(x-2) + 2\log_2^2(x-2) \geq 0$
 Ответ $(2; 1 + \sqrt{2}] \cup [(1/2)(3 + \sqrt{5}); 3)$

Пример 11. $\lg^2(x+1) \geq \lg(x+1)\lg(x-1) + 2\lg^2(x-1)$ Ответ $[\sqrt{2}; 3]$

Пример 12. $|\log_3 x| + \log_3 3 \leq 5/2$ Ответ $[1/27; 1/3] \cup [1/\sqrt{3}; 3^{(3+\sqrt{33})/4}]$

Пример 13. $\lg(1/x)\lg(10^5 x)\lg(x/10^3) \leq 0$ Ответ $[10^{-5}; 1] \cup [10^3; \infty)$

Пример 14. $\log_3^3 x - 5\log_3^2 x + 8\log_3 x < 0$ Ответ $(0; 1)$

Пример 15. $\log_{1/3}(x-1) + \log_{1/3}(x+1) + \log_{\sqrt{3}} |5-x| = 1$ Ответ $\{2\}$

Пример 16. $(\log_2 x + \log_x 8) / \log_x(2x) \leq 3$ Ответ $(0; 1/2) \cup (1; 8]$

Пример 17. $\log_2^2(-x) - 1 - \log_2(-x/2) = 0$ Ответ $\{-2; -1\}$

Пример 18. $\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}+1-\sqrt{3}}}(4x - x^2 - 2) \geq 0$
 Ответ $(2 - \sqrt{2}; 1] \cup [3; 2 + \sqrt{2})$

Пример 19. $\log_{x^2} |5x + 2| < \frac{1}{2}$ Ответ $(-1; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{3}; 0) \cup (0; 1)$

Пример 20. $\log_{2|x|+1}(7x + 4) - \log_{7x+4}(2|x| + 1) > 0$
 Ответ $(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{7}) \cup (-\frac{1}{3}; 0) \cup (0; \infty)$

Пример 21. $\frac{36}{\sqrt{\log_2 x - 2}} + \frac{4}{\sqrt{\log_2 x - 7}} \leq 28 - 4\sqrt{\log_2 x - 2} - \sqrt{\log_2 x - 7}$
 Ответ $(x = 2^{11})$

Пример 22. $\log_{(20-2x)}(99 - 2x - x^2) + \log_{\sqrt{99-2x-x^2}}(20 - 2x) \leq 3$

Решение: ОДЗ $(-11; 9)$ Обозначим $t = \log_{(20-2x)}(99 - 2x - x^2)$,
 тогда наше неравенство преобразуется в $\frac{(t-1)(t-2)}{t} \leq 0$, или

$$\begin{cases} \log_{(20-2x)}(99 - 2x - x^2) < 0 \\ \log_{(20-2x)}(99 - 2x - x^2) \leq 2 \\ \log_{(20-2x)}(99 - 2x - x^2) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{учитывая, что } 20-2x > 1 \text{ на множестве}$$

допустимых значений получаем $\begin{cases} (-11; -1 - 3\sqrt{11}) \cup (-1 + 3\sqrt{11}; 9) \\ (-11; 7] \cup [43/5; 9) \\ [-\sqrt{79}; \sqrt{79}] \end{cases}$

Ответ: $(-11; -1 - 3\sqrt{11}) \cup [-\sqrt{79}; 7] \cup [43/5; \sqrt{79}] \cup (-1 + 3\sqrt{11}; 9)$

Пример 23. $\log_{(\frac{13}{2}-x)}\left(\frac{99}{4} - x - x^2\right) + 2\log_{(\frac{99}{4}-x-x^2)}\left(\frac{13}{2} - x\right) \leq 3$

Решение: ОДЗ : $x \in \left(\frac{-11}{2}; \frac{1-4\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-4\sqrt{6}}{2}; \frac{1+4\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+4\sqrt{6}}{2}; \frac{9}{2}\right)$

Пусть $t = \log_{\left(\frac{13}{2}-x\right)}\left(\frac{99}{4} - x - x^2\right)$, тогда наше неравенство переписывается в виде $\frac{t^2 - 3t + 2}{t} \leq 0$, решениями будут $t \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$. Пусть $\frac{13}{2} - x > 1$, тогда t будет возрастающей функцией, при этом условии решаем следующее двойное неравенство $1 \leq \log_{\left(\frac{13}{2}-x\right)}\left(\frac{99}{4} - x - x^2\right) \leq 2$. Его решением являются $x \in \left[\frac{-\sqrt{73}}{2}; \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}; \frac{\sqrt{73}}{2}\right]$. При $t < 0$ имеем неравенство $\log_{\left(\frac{13}{2}-x\right)}\left(\frac{99}{4} - x - x^2\right) < 0$ решением которого с учетом ОДЗ будут $x \in \left(\frac{-11}{2}; \frac{-1-4\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+4\sqrt{6}}{2}; \frac{9}{2}\right)$. В случае $0 < \frac{13}{2} - x < 1$, т.е. когда t является убывающей функцией решений нет.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{-11}{2}; \frac{-1-4\sqrt{6}}{2}\right) \cup \left[\frac{-\sqrt{73}}{2}; \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}; \frac{\sqrt{73}}{2}\right] \cup \left(\frac{-1+4\sqrt{6}}{2}; \frac{9}{2}\right)$$

Глава. IV. Нестандартные методы решения

§ 4.1. Переход к новой переменной, получаемой логарифмированием.

В данном разделе рассматриваются уравнения, при преобразовании которых используются следующие формулы:

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a} \tag{1}$$

$$a^{\sqrt{\log_a b}} = b^{\sqrt{\log_b a}} \tag{2}$$

$$a^{\sqrt[n]{\log_a b}} = b^{\sqrt[n]{\log_b^{n-1} a}} \tag{3}$$

справедливость этих формул можно установить логарифмированием выражения (1) по основанию c ; формул (2) и (3) по основанию a или b .

Пример1. $5^{\log_2 x} + 2x^{\log_2 5} = 15$ Ответ {2}

Пример2. $2^{\sqrt{\log_2 x}} + x^{\sqrt{\log_x 2}} = 4$ Ответ {2}

Пример 3 $9^{\sqrt[4]{\log_3 x}} - 4x^{\sqrt[4]{\log_x^3 3}} + 3 = 0$

Ответ {3}

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения

Ответы

- | | |
|--|-----------------------|
| 1) $3 \cdot 3^{\lg x} - x^{\lg 3} = 18$ | {100} |
| 2) $6 \cdot 2^{\lg x} + x^{\lg 2} = 28$ | {100} |
| 3) $2 \cdot 2^{\lg x} + x^{\lg 2} = 24$ | {1000} |
| 4) $x^{\log_4(3x)} = 3^{\frac{1}{\log_3 2}}$ | $\{\frac{1}{9}; 3\}$ |
| 5) $x^{\log_{16}(27x)} = 3^{\frac{1}{\log_3 2}}$ | $\{\frac{1}{81}; 3\}$ |
| 6) $x^{\log_{81}(8x)} = 2^{\frac{1}{\log_2 3}}$ | $\{\frac{1}{16}; 2\}$ |
| 7) $x^{\lg 4} - 2^{\lg x} = 12$ | {100} |
| 8) $x^{\lg 9} - 8 \cdot 3^{\lg x} = 9$ | {100} |
| 9) $x^{\lg 4} - 3 \cdot 2^{+\lg x} = 16$ | {1000} |

§ 4.2. Замена переменных

При решении уравнений данного раздела используется замена переменных.

Пример 4. Решить уравнение:

$$\log_7(3-2x) \log_x(3-2x) = \log_7(3-2x) + \log_7 x^2$$

Решение: ОДЗ: $0 < x < \frac{3}{2}; x \neq 1$

Перейдем к основанию 7.

$$\log_7^2(3-2x) = \log_7(3-2x) \log_7 x + 2 \log_7^2 x$$

Пусть $\log_7(3-2x) = u, \log_7 x = v$ тогда исходное уравнение запишется

$$u^2 - uv - 2v^2 = 0 \Leftrightarrow (u+v)(u-2v) = 0$$

Получаем следующую совокупность двух уравнений:

$$\log_7(3-2x) + \log_7 x = 0$$

$$\log_7(3-2x) - 2 \log_7 x = 0$$

Решение первого уравнения:

$$(3 - 2x)x = 1 \Rightarrow 2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{2};$$

Первое решение не подходит по ОДЗ.

$$\text{Решение второго: } 3 - 2x = x^2 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = 1;$$

Оба решения не входят в ОДЗ.

Ответ: $\{1/2\}$.

§ 4.3. Эквивалентная замена выражения

При решении смешанных неравенств иногда бывает целесообразно использовать следующее свойство показательных и логарифмических функций: знак выражения $a^b - a^c$ совпадает со знаком выражения $(a-1)(b-c)$, а выражение $\log_a b$ имеет один знак с выражением $(a-1)(b-1)$, что позволяет заменить логарифмическую и показательную функции на более простые выражения.

Пример 5.
$$\frac{2 - 2^{\frac{-2}{x}}}{(x+4)\ln(1-x)} \geq 0$$

Решение: ОДЗ: $x \neq 0, x < 1$

$$\frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{(x+4)(1-x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)}{x^2(x+4)} \leq 0$$

Ответ: $x \in (-4, -2]$

Пример 6. Решить неравенство:

$$\left(\frac{4x^2}{x^4+1}\right)^{3x^2-x} > \left(\frac{x^4+1}{4x^2}\right)^{x-2},$$

Решение: $x \neq 0$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^4+1}{4x^2} - 1\right)(x-2 - (-3x^2+x)) < 0 \Rightarrow (x^4 - 4x^2 + 1)(3x^2 - 2) < 0,$$

$$\text{Ответ: } \left(-\sqrt{2+\sqrt{3}}; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(-\sqrt{2-\sqrt{3}}; 0\right) \cup \left(0; \sqrt{2-\sqrt{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{2}{3}}; \sqrt{2+\sqrt{3}}\right)$$

Пример 7: Решить
$$\frac{\log_{2x}(5x-1)\log_{3x}(7x-1)}{2^{15x^2+2} - 2^{11x}} \geq 0$$

Заменим каждый множитель на выражение того же знака

$$\frac{(2x-1)(5x-2)(3x-1)(7x-2)}{15x^2+2-11x} \geq 0 \text{ при условии } x > \frac{1}{5}, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{3}$$

Ответ: $\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{7}\right] \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Пример 8.

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{6-x}-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)\log_3\left(3x-x^2-\frac{5}{4}\right)\leq\log_{\frac{1}{3}}\left(\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x\right|+\frac{3}{2}\right)\log_2\left(3x-x^2-\frac{5}{4}\right)$$

$$\text{Решение: О.Д.З. } \begin{cases} 3x-x^2-\frac{5}{4}>0 \\ \sqrt{6-x}-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}>0 \end{cases} \Rightarrow x\in\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$$

Переходя к новым основаниям исходное неравенство можно преобразовать к следующему виду:

$$-\log_2\left(\sqrt{6-x}-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)\log_3\left(3x-x^2-\frac{5}{4}\right)\leq-\log_3\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)\frac{\log_3\left(3x-x^2-\frac{5}{4}\right)}{\log_3 2}$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(3x-x^2-\frac{5}{4}\right)\left[\log_2\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)-\log_2\left(\sqrt{6-x}-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)\right]\geq 0$$

$$\Rightarrow\left(3x-x^2-\frac{5}{4}-1\right)\left[\left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)-\left(\sqrt{6-x}-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}\right)\right]\leq 0$$

(Т.к. знак выражения $\log_2 a - \log_2 b$ тот же что и у $a - b$)

$$\Rightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2(x-\sqrt{6-x})\geq 0\Rightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2(x-\sqrt{6-x})\geq 0 \text{ Ответ: } \left\{\frac{3}{2}\right\}\cup\left[2;\frac{5}{2}\right)$$

Пример 9. $2 + \log_{\sqrt{x^2-2x-3}} \frac{x+4}{x+1} \geq \log_{x^2-2x-3} (x^2-2x-2)^2$

Решение: $1 + \log_{x^2-2x-3} \frac{x+4}{x+1} \geq \log_{x^2-2x-3} |x^2-2x-2|$

$$\Leftrightarrow \log_{x^2-2x-3} \frac{(x^2-2x-3)(x+4)}{x+1} \geq \log_{x^2-2x-3} |x^2-2x-2|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(x-2)(x+4)-1}{(x+1)|x^2-2x-2|} \geq \frac{(x^2-2x-3)-1}{(x^2-2x-3)-1} \\ (x+1)(x-3) > 0 \text{ (} x^2-2x-2 > 0, x+1 > 0 \text{)} \\ (x-2)(x+4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-\frac{3}{10}}{(x-(1+\sqrt{5}))(x-(1-\sqrt{5}))} \geq 0 \\ \begin{cases} x > 3 \\ x < -4 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{10}{3} \\ 3 < x < 1 + \sqrt{5} \end{cases}$$

Ответ: $(3; 1 + \sqrt{5}) \cup (\frac{10}{3}; +\infty)$

§ 4.4. Использование свойств показательной и логарифмической функций

4.4.1. Решение на основе анализа области допустимых значений

При решении уравнений данного раздела рассматривается область определения функции.

Пример 10. $\log_x \log_2(4^x - 6) > 0$

Обычно при решении неравенств такого вида рассматриваются два случая: $0 < x < 1$ и $x > 1$, переходя к соответствующей совокупности двух систем неравенств.

Для данного неравенства целесообразно рассмотреть область определения функции. $4^x - 6 > 0 \Rightarrow x > 1$

Следовательно, исходное неравенство равносильно следующему:

$$\log_2(4^x - 6) > 1 \text{ Отсюда } (4^x - 6) > 2, 2^{2x} > 2^3 \Rightarrow x > \frac{3}{2} \text{ Ответ: } \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

Пример 11. $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) + 1} = x - 4 + \sqrt{\log_3(x - 1) - 1}$

Решение: Рассмотрим области определения выражений, входящих в уравнение.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) \geq -1, \text{ т.е. } 0 < x^2 - 5x + 6 \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 5x + 4 \leq 0 \end{cases}$$

$$x \in (1; 2] \cup (3; 4]$$

$$\log_3(x - 1) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 3 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [4; +\infty)$$

Область допустимых значений содержит одну точку $x=4$. Ответ $\{4\}$.

4.4.2. Использование свойств монотонности

Решения уравнений данного раздела основываются на использовании монотонности функций.

Пример 12. $2^x + 3^x + 4^x < 3$

Решение: Показательные функции $2^x, 3^x, 4^x$ - непрерывные и монотонно возрастающие, следовательно функция $y = 2^x + 3^x + 4^x$ также непрерывная и монотонно возрастающая.

При $x=0$ $y=1+1+1=3$

При $x<0$ $y = 2^x + 3^x + 4^x < 3$

При $x>0$ $y = 2^x + 3^x + 4^x > 3$, следовательно решением исходного неравенства являются $x<0$. Ответ: $(-\infty; 0)$

Пример 13. $\log_6(1-x) = x + 6$

Решение: ОДЗ: $x < 1$. При $x = -5$ обе части уравнения равны 1, $x = -5$ является корнем исходного уравнения. Докажем, что -5 - единственный корень. Функция $y = \log_6(1-x)$ в своей области определения ($x \in (-\infty; 1)$), убывает, функция $y = x + 6$ - возрастает. Следовательно, других корней уравнение не имеет.

4.4.3. Метод мажорант

Мажорантой данной функции $f(x)$ на множестве P называется такое число M , что либо $f(x) \leq M$ для всех $x \in P$, либо $f(x) \geq M$ для всех $x \in P$

Пример 14. $6x - x^2 - 5 = 2^{x^2 - 6x + 11}$

Решение: Левая часть не больше четырех. Равенство четырем достигается в точке $x = 3$. Правая часть имеет минимум в точке $x = 3$, и равна в этой точке четырем. Пересечение областей значений левой и правой частей исходного уравнения равно четырем, при $x = 3$. Следовательно, $x = 3$ является корнем данного уравнения.

Ответ: $\{3\}$

Пример 15. $\log_2(3 + 2x - x^2) = x^2 - 2x + 3$

Решение: Область значений функции, стоящей в левой части уравнения $(-\infty; 2]$, причем, наибольшее значение, равное двум, достигается в точке $x = 1$. Область значений функции в правой части равна $[2; +\infty)$, наименьшее значение при $x = 1$. Пересечение областей равно двум. Следовательно, корень уравнения равен 1

Ответ: $\{1\}$

Глава V. Системы уравнений

При решении систем уравнений, содержащих показательную и логарифмическую функции, используются в основном те же методы, что и при решении систем рациональных уравнений, такие как замена переменных, подстановка, разложение на множители, равносильные преобразования и др. Кроме этого, при решении рассматриваемых в данной работе задач необходимо учитывать свойства показательной и логарифмической функций. Рассмотрим примеры решения систем уравнений.

Пример 1. Используем подстановку и замену переменных.

$$\begin{cases} x + \log_2(y + 4) = 4 & (1) \\ e^{\ln y} + 2^x = 6 & (2) \end{cases}$$

Решение:

Область допустимых значений: $y > 0$.

Преобразуем уравнение (2): $y = 6 - 2^x$ (3)

Подставляя (3) в уравнение (1), получим: $x + \log_2(10 - 2^x) = 4$,

откуда следует $\log_2(10 - 2^x) = 4 - x$ и $10 - 2^x = 2^{4-x}$ (4)

Используем замену переменных $2^x = t > 0$.

Уравнение (4) принимает вид: $t^2 - 10t + 16 = 0$, которое имеет корни $t_1 = 8$ и $t_2 = 2$.

Переходя к переменной x , получим $x = 1$ и $x = 3$.

Подставим полученное решение в выражение (3): $y_1 = 4$, $y_2 = -2$ (посторонний корень). С учетом ОДЗ Ответ: (1; 4).

Пример 2. Используется подстановка и преобразование с учетом свойств логарифмической функции.

$$\begin{cases} \log_y x = 1 \\ \log_2 y + 2 = \log_2(x^2 + 3) \end{cases} \quad (5)$$

$$\log_2 y + 2 = \log_2(x^2 + 3) \quad (6)$$

Решение:

Запишем ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$.

Из (5) следует, что $y = x$ (7)

Подставляя (7) в (6), получим $\log_2 y + 2 = \log_2(y^2 + 3)$ (8)

После преобразования уравнение (8) принимает вид:

$\log_2(4y) = \log_2(y^2 + 3)$, откуда следует, что $y^2 - 4y + 3 = 0$ (9).

Уравнение (9) имеет корни $y_1 = 1$, $y_2 = 3$. Корень $y_1 = 1$ противоречит ОДЗ. Из выражения (7) получим, что $x = 3$. Ответ: (3, 3).

Пример 3. (МФТИ 1998г.) Используется преобразование уравнений, подстановка и переход к совокупности.

$$\begin{cases} \log_3\left(\frac{x^2}{y} + x\right) + \log_{1/3}\left(\frac{y^2}{x} + y\right) = 2 \\ \log_2|x + y| = 1 \end{cases} \quad (10)$$

$$\log_2|x + y| = 1 \quad (11)$$

Решение:

Преобразуем уравнение (10) исходной системы:

$$\log_3\left[\frac{x}{y}(x + y)\right] - \log_3\left[\frac{y}{x}(y + x)\right] = 2 \quad (12)$$

Запишем ОДЗ: $\frac{x}{y}(x + y) > 0$ (13)

С использованием свойства логарифмической функции уравнение (12)

принимает вид: $\log_3\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2$ (14)

Потенцируя систему уравнений (14), (11), получим

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 9 \Leftrightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = 3 \quad (15)$$

$$|x + y| = 2 \quad (16)$$

С учетом ОДЗ система уравнений (15), (16) равносильна совокупности двух

$$\text{систем: } \begin{cases} \frac{x}{y} = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = -3 \\ x + y = -2 \end{cases} \quad (18)$$

Решая систему уравнений (17), получим $x=3/2$, $y=1/2$ и систему уравнений (18) с корнями $x=-3$, $y=1$. Ответ: $\{(3/2; 1/2); (-3; 1)\}$.

В следующих примерах № 4, 5 воспользуемся введением новых переменных, в результате чего исходная система сводится к алгебраической системе уравнений.

Пример 4.
$$\begin{cases} 16^x - 3 \cdot 3^y = 3 \\ 16^x \cdot 3^y = 18 \end{cases}$$

Положив $16^x = u > 0$, $3^y = v > 0$, получим алгебраическую систему уравнений:

$$\begin{cases} u - 3v = 3 & (19) \\ u \cdot v = 18 & (20) \end{cases}$$

Выразим из уравнения (19) $u = 3v + 3$ и подставим в (20): $3v^2 + 3v = 18$
 $v^2 + v - 6 = 0$

откуда $v_1 = -3$ (п.к.) $v_2 = 2$

Найдем $u_2 = 9$

Исходная система равносильна следующей:
$$\begin{cases} 16^x = 9 \\ 3^y = 2 \end{cases}$$

которая имеет решение:
$$\begin{cases} x = \log_4 9 \\ y = \log_3 2 \end{cases} \quad \text{Ответ: } (\log_4 9; \log_3 2).$$

Пример 5. (МГУ 2001 г.)
$$\begin{cases} 2 \cdot 5^{1-y} = \log_3(x^{-2}) \\ 5^y + \log_3 x = 4 \end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$

Воспользуемся заменой переменных $u = \log_3 x$, $v = 5^y > 0$,

тогда исходная система уравнений принимает вид:
$$\begin{cases} \frac{10}{v} + 2u = 0 & (21) \\ v + u = 4 & (22) \end{cases}$$

Выражая u из (22): $u = 4 - v$ (23) и подставляя в (21), получим квадратное уравнение $v^2 - 4v - 5 = 0$, которое имеет корни $v_1 = 5$, $v_2 = -1$. Так как $v = 5^y > 0$, то значение $v_2 = -1$ является посторонним. Из (23) следует, что $u = -1$. Исходная

система равносильна следующей:
$$\begin{cases} \log_3 x = -1 \\ 5^y = 5 \end{cases}, \quad \text{имеющей решение } x = 1/3, y = 1.$$

Ответ: $(1/3, 1)$.

Рассмотрим системы уравнений, содержащих переменные в показателе степени и в ее основании, а также под знаком логарифма и в его основании.

Пример 6.
$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases} \quad \begin{matrix} (24) \\ (25) \end{matrix}$$

Решение:

ОДЗ: $x > 0, y > 0$

Используя основное логарифмическое тождество, представим исходную систему в следующем виде:

$$\begin{cases} 10^{(x+y)\lg x} = 10^{12\lg y} \\ 10^{(x+y)\lg y} = 10^{3\lg x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\lg x = 12\lg y \\ (x+y)\lg y = 3\lg x \end{cases} \quad \begin{matrix} (26) \\ (27) \end{matrix}$$

Из уравнения (26) $\lg y = \frac{(x+y)}{12}\lg x$ (28).

Подставим (28) в уравнение (27):

$$\frac{(x+y)^2}{12}\lg x = 3\lg x \text{ или } \lg x \left[\frac{(x+y)^2}{12} - 3 \right] = 0 \quad (29)$$

Из (29) следует $x=1$ либо $y+x=6$. Подставляя $x=1$ в выражение (28), получим $y=1$. Подставим $y=6-x$ в выражение (28): $\lg(6-x) = \frac{\lg x}{2}$ (30)

Потенцируя уравнение (30), получим квадратное уравнение $x^2 - 13x + 36 = 0$, имеющее корни $x_1=4, x_2=9$, которым соответствуют $y_1=2, y_2=-3$ (п.к.)

Ответ: $\{(1,1); (4,2)\}$.

Пример 7. (МГУ 1998 г.)
$$\begin{cases} y^x = 3y \\ 2\log_3 y + \log_y 3 = 3x \end{cases} \quad \begin{matrix} (31) \\ (32) \end{matrix}$$

Решение:

ОДЗ: $y > 0, y \neq 1$

Прологарифмируем уравнение (31) по основанию 3:

$$x \log_3 y = 1 + \log_3 y, \text{ из которого } x = \frac{1 + \log_3 y}{\log_3 y} \quad (33)$$

Преобразуем (32): $2\log_3 y + \frac{1}{\log_3 y} = 3x$ (34)

Подставим (33) в (34): $2\log_3 y + \frac{1}{\log_3 y} = \frac{3(1 + \log_3 y)}{\log_3 y}$ (35)

Заменяя $\log_3 y = t$ и приводя к общему знаменателю уравнение (35), получим $2t^2 - 3t - 2 = 0$, которое имеет корни $t_1=2, t_2=-1/2$. Из условия $t_1=2$ следует, что $\log_3 y = 2$, откуда $y_1=9$.

Из условия $\log_3 y = -1/2$ следует, что $y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Подставим y_1 и y_2 в выражение

(33), в результате чего получим $x_1=3/2, x_2=-1$. Ответ: $\left\{ \left(\frac{3}{2}; 9 \right); \left(-1; \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$.

В следующих примерах используются равносильные преобразования уравнений системы, а именно переход к разности или сумме уравнений.

Пример 8. (МГУ 2003 г.)
$$\begin{cases} \frac{1}{2} \log_7(x-y) + 7^{xy} = 1 & (36) \\ 7^{xy} + \log_7(x-y) = 1 & (37) \end{cases}$$

Решение.

Вычтем из (36) уравнение (37): $\log_7(x-y) = 0$ (38)

Подставим (38) в (36): $7^{xy}=1$. Исходная система уравнений (36), (37) равносильна следующей:

$$\begin{cases} \log_7(x-y) = 0 & (38) \\ 7^{xy} = 1 & (39) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \\ y=0 \\ x=1 \end{cases}$$

Ответ: $\{(0,-1);(1,0)\}$

Пример 9. (МГУ 2003 г.)
$$\begin{cases} 4 \cdot 49^x - 4 \cdot 7^{x+y \log_7 3} + 9^y = 9 \\ 49^x + 12 \cdot 3^{x \log_3 7 + y} - 4 \cdot 9^y = 9 \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем исходную систему:

$$\begin{cases} 4 \cdot 7^{2x} - 4 \cdot 7^x \cdot 3^y + 3^{2y} = 9 & (40) \\ 7^{2x} + 12 \cdot 7^x \cdot 3^y - 4 \cdot 3^{2y} = 9 & (41) \end{cases}$$

Введем новые переменные $u=7^x > 0, v=3^y > 0$.

Тогда система уравнений (40), (41) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} 4u^2 - 4uv + v^2 = 9 & (42) \\ u^2 + 12uv - 4v^2 = 9 & (43) \end{cases}$$

Вычитая из (42) уравнение (43), получим равносильную систему:

$$\begin{cases} 3u^2 - 16uv + 5v^2 = 0 & (44) \\ u^2 + 12uv - 4v^2 = 9 & (45) \end{cases}$$

Решим уравнение (44) относительно u : дискриминант уравнения (44) равен $D=196v^2$

$$u_{1,2} = \frac{16v \pm 14v}{6}$$

Откуда $u_1 = 5v$ (46)

$$u_2 = \frac{v}{3} \quad (47)$$

Подставляя (46) в (45), получим $25v^2 + 60v^2 - 4v^2 = 9$

Или $81v^2 = 9, v = \pm \frac{1}{3}$

Так как $v > 0$, то $u_1=5/3, v_1=1/3$. Подставляя (47) в (45), получим $\frac{v^2}{9} + 4v^2 - 4v^2 = 9$

Или $\frac{v^2}{9} = 9, v = \pm 9$

$V=-9$ является посторонним корнем. Следовательно, $v_2=9$ и $u_2=3$.

Найдем неизвестные x и y :

$$7^x = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \log_7 \frac{5}{3}$$

$$3^y = \frac{1}{3} \Rightarrow y = -1$$

Ответ: $\{(\log_7 5/3, -1); (\log_7 3; 2)\}$.

$$7^x = 3 \Rightarrow x = \log_7 3$$

$$3^y = 9 \Rightarrow y = 2$$

Пример №10. (МГУ 2000г.) В этом примере используются методы подстановки, замены переменных и преобразования.
$$\begin{cases} \log_2(xy) \log_{4x} y = 2 & (48) \\ 8x - y = 1 & (49) \end{cases}$$

Решение:

Запишем ОДЗ: $y > 0, x > 0, x \neq \frac{1}{4}$

Используем замену переменных: $u = \log_2 x; v = \log_2 y$

Тогда уравнение (48) запишется следующим образом:

$$(u+v) \cdot \frac{v}{2+u} = 2 \text{ или } v^2 + vu - 2u - 4 = 0 \quad (50)$$

Решим уравнение (50) относительно v . Найдем дискриминант

$$D = u^2 + 8u + 16 = (u+4)^2$$

$$v_{1,2} = \frac{-u \pm (u+4)}{2}$$

$$v_1 = 2$$

$$\log_2 y = 2$$

$$y = 4$$

Подставляя $y=4$ в (49) получим $8x-4=1$, откуда $x=5/8$.

Второе решение уравнения (50) равно

$$v_2 = -u - 2 \quad (51)$$

$$\text{Откуда получим: } \log_2 y = -\log_2 x - 2 \quad (52)$$

$$\text{Потенцируем (52): } xy = 1/4 \quad (53)$$

Решим систему уравнений (49), (53)

$$\begin{cases} 8x - y = 1 \\ xy = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} \\ x_2 = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Оба корня противоречат ОДЗ.

Ответ: $(5/8, 4)$.

Задачи для самостоятельного решения.

Решить систему уравнений:

ответы

$$1. \begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\left\{ \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{6} \right); \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4} \right) \right\}$$

2. МГУ 2001 г. $\begin{cases} \log_2 \sqrt{y} = -3^{1-x} \\ 3^x + \log_2 y = 1 \end{cases} \quad \left(1; \frac{1}{4}\right)$
3. МФТИ $\begin{cases} 2\log_2 \sqrt{x} + 2^y = -1 \\ \log_2 x^3 + 4^y = 1 \end{cases} \quad \left(\frac{1}{32}; 2\right)$
4. МГУ 2000 г. $\begin{cases} 3\log_5 x + \log_{\sqrt[3]{5}} y = 3 \\ \log_5(y-x-2) + \log_{125}(y-x+2)^3 = \log_5 12 \end{cases} \quad (1; 5)$
5. МГУ 2000 г. $\begin{cases} 9 \cdot 2^x \cdot 5^y - 5 \cdot 3^{x+y} = 3^x \cdot 5^y \\ 2^{x-2} \cdot 3^{y-x+1} \cdot 5^{1-y} = 1 \end{cases} \quad (2; 1)$
6. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ \log_2 x + \log_2 y = 1 \end{cases} \quad \{(1; 2); (4; 1/2)\}$
7. $\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4 \end{cases} \quad (2; 6)$
8. $\begin{cases} y^{x^2+7x+12} = 1 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad \{(5, 1); (-4, 10); (-3, 9)\}$
9. $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3} \\ xy = 16 \end{cases} \quad \{(8, 2); (1/4, 64)\}$
10. $\begin{cases} \log_x 10 + \log_y 10 = 5 \\ \lg x + \lg y = \frac{5}{4} \end{cases} \quad \{(10; \sqrt[4]{10}); (\sqrt[4]{10}; 10)\}$
11. $\begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{65}{36} \\ xy - x + y = 118 \end{cases} \quad \{(12, 10); (-10, -12)\}$
12. $\begin{cases} (x-y)^{x+y} = 16 \\ (x-y)^2 \cdot 2^{x+y} = 64 \end{cases} \quad \{(3, -1); (3, 1)\}$
13. $\begin{cases} 4^y = 32 \cdot 8^x \\ 3^y = 3 \cdot 9^{\frac{1}{y-1}} \end{cases} \quad \{(-2; 4); \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)\}$
14. $\begin{cases} y^x = x^y \\ y^y = x^{9x} \end{cases} \quad \{(1; 1); (\sqrt{3}; 3\sqrt{3})\}$
15. МФТИ 2004 г. $\begin{cases} (x-2)(x+3) = y(y-5) \\ \log_x(2-y) = \frac{x}{y^2} \end{cases} \quad (4; -2)$
16. МГУ 2003 г. $\begin{cases} 5\log_{32}(x+y) + \log_{\frac{1}{2}}(3y-8) = 0 \\ x^2 + 2x + y^2 + y = 12 \end{cases} \quad (-2; 3)$

17. МГУ 2003 г.
$$\begin{cases} 9^x - 3^{x+1} \cdot 2^y - 4^{y+1} = 0 \\ 9^x + 3^x \cdot 2^{y+1} - 2 \cdot 4^y = 11 \end{cases} \quad \left(\frac{3}{2} \log_3 2; -\frac{1}{2}\right)$$
18. МГУ 2003 г.
$$\begin{cases} 3 \cdot 4^x + 2^{x+1} \cdot 3^y - 9^y = 0 \\ 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x \cdot 3^y + 9^y = -8 \end{cases} \quad \left(\frac{1}{2}; \log_3 3\sqrt{2}\right)$$
19. МФТИ 1984 г.
$$\begin{cases} 5 + \log_y x^2 = -\log_{\sqrt{x}} y \\ \frac{(\log_5 y)^2}{\log_5 x} = 6 - 3^{x^2 y} - \log_{25} y \end{cases} \quad \left\{\left(5; \frac{1}{25}\right); \left(\sqrt[3]{(\log_3 6)^2}; \sqrt[3]{\log_6 3}\right)\right\}$$
20. МФТИ 1999 г.
$$\begin{cases} \log_3(5y - x - 2) - \log_9(x - y)^2 = 1 \\ \log_3\left(1 - \frac{2}{y} - 4x\right) - \log_9 x^2 = 1 \end{cases} \quad (1 - \sqrt{2}; \sqrt{2})$$
21. МФТИ 2000 г.
$$\begin{cases} \log_2^2(x + y) + \log_{\frac{1}{2}}(x + y) \log_{\frac{1}{2}}(x - 2y) = 2 \log_2^2(x - 2y) \\ x^2 - xy - 2y^2 = 4 \end{cases} \quad \left\{(2; 0); \left(\frac{43}{4}; \frac{21}{4}\right)\right\}$$
22. МФТИ 2003 г.
$$\begin{cases} \frac{\log_5(5x - 3y - 1)}{\log_5(2y - x + 3)} = \frac{\log_2(5 + 4y - 3x) - 1}{\log_2(3x - y + 1)} \\ 2x^2 + y^2 = 3xy + x + 1 \end{cases} \quad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 1; \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 2\right)$$
23. МФТИ 1998 г.
$$\begin{cases} \log_2(x^2 y + 2xy^2) - \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right) = 4 \\ \log_5 \left| \frac{xy}{6} \right| = 0 \end{cases} \quad \{(2, -3); (-6, 1)\}$$
24.
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases} \quad \left(\frac{2}{3}; \frac{27}{8}; \frac{32}{3}\right)$$
25.
$$\begin{cases} \log_2 x \left(\frac{1}{\log_x 2} + \log_2 y \right) = 2 \log_2 x \\ \log_2 x \log_3(x + y) = 2 \log_3 x \end{cases} \quad (2; 2)$$
26.
$$\begin{cases} x^y = 5x - 4 \\ \log_x 16 = y \end{cases} \quad (4; 2)$$
27.
$$\begin{cases} 2^{2 \log_2 x} + 3^{2 \log_3 y} = 8 \\ 2^{\frac{2 \log_1 x}{2}} + 3^{\frac{2 \log_1 y}{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2; 2)$$
28.
$$\begin{cases} 3 \left(2 \log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y \right) = 10 \\ xy = 81 \end{cases} \quad (3; 27)(27; 3)$$

$$29. \begin{cases} 3\left(\frac{1}{\log_x y} + \log_x y\right) = 10 \\ xy = 81 \end{cases} \quad (3;27)(27;3)$$

Литература:

1. И.Ф.Шарыгин, В.И. Голубев. Решение задач: Учебное пособие для 11 кл. общеобразовательных учреждений.-М.:Просвещение,1995.
2. Е.В.Якушева и др. Математика. Ответы на вопросы. М.1Федеративная Книготорговая Компания,1997
3. Н.Я.Виленкин и др. Алгебра и математический анализ. Для 11 класса.- М.:Просвещение,1996
4. С.Н.Олехник и др. Уравнения и неравенства.-М.Дрофа,2001.
5. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы. Под редакцией Г.Н.Яковлева., М.,Наука,1981.
6. В.В.Ткачук. Математика абитуриенту.,МЦНМО,2001
7. А.В. Васильев, А.И.Заз. Математика. М. , МГТУ им.Баумана,1998.
8. Моденов П.С. Сборник задач по математике. Сов. наука. 195

Содержание

Введение	3
Глава I. Показательная функция	7
§1.1. Определение, свойства, графики показательной функции	7
§1.2. Методы решения показательных уравнений	10
1.2.1 Решение уравнений, в которых обе части уравнения можно привести к одному основанию	10
1.2.2.Уравнения, в которых левая и правая части содержат показательные функции с разными основаниями	11
1.2.3. Метод решения показательных уравнений путем введения новой переменной	12
1.2.4. Однородные уравнения относительно степеней	14
1.2.5.Показательные уравнения, содержащие неизвестную в основании	

и в показателе степени	15
§1.3. Методы решения показательных неравенств	17
1.3.1. Решение неравенств путем приведения обеих частей неравенства к одному основанию	17
1.3.2. Неравенства, содержащие показательные функции при различных основаниях	17
1.3.3. Метод введения новой переменной	18
1.3.4. Неравенства, содержащие неизвестную в основании и в показателе степени	19
Глава II. Логарифмическая функция	20
§2.1. Свойства, графики. Решение задач, использующих свойства логарифмической функции	20
§ 2.2. Решение уравнений, содержащих логарифмическую функцию	32
2.2.1. Логарифмические уравнения, решаемые, исходя из определения логарифма	32
2.2.2. Линейные уравнения, решаемые потенцированием	33
2.2.3. Уравнения второй и выше степени относительно логарифма. Замена неизвестного	33
2.2.4. Уравнения, содержащие неизвестные в основании логарифмов	35
§2.3. Решение неравенств	38
2.3.1. К решению логарифмических неравенств сводятся некоторые задачи на отыскание области определения функции	38
2.3.2. Решение неравенств типа $\log_{f(x)}\varphi(x)\geq k$	38
2.3.3. Неравенства вида $\log_{f(x)}\varphi(x)\geq\log_{f(x)}h(x)$	40
Глава III. Различные задачи, связанные с логарифмической и показательной функциями	44
§ 3.1. Смешанные уравнения и неравенства, содержащие логарифмическую и показательную функции	44
§ 3.2. Уравнения и неравенства, предлагавшиеся на вступительных экзаменах в различные ВУЗы	47
Глава. IV. Нестандартные методы решения	50
§ 4.1. Переход к новой переменной, получаемой логарифмированием.	50
§ 4.2. Замена переменных	51
§ 4.3. Эквивалентная замена выражения	52
§ 4.4. Использование свойств показательной и логарифмической функций	54
4.4.1. Решение на основе анализа области допустимых значений	54
4.4.2. Использование свойств монотонности.	55
4.4.3. Метод мажорант.	55
Глава. V. Системы уравнений	56
Литература	63