

**LXX Московская математическая олимпиада**

**Окружной тур**

**11 класс**

**28.01.2007**

1. Что больше:  $\frac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ}$  или  $\frac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ}$ ?
2. Найдите все нечетные натуральные числа, большие **500**, но меньшие **1000**, у каждого из которых сумма последних цифр всех делителей (включая **1** и само число) равна **33**.
3. Точка **M** лежит на стороне **BC** треугольника **ABC**. Известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник **ABM**, в два раза больше радиуса окружности, вписанной в треугольник **ACM**. Может ли отрезок **AM** оказаться медианой треугольника **ABC**?
4. Функция **f** такова, что для любых положительных **x** и **y** выполняется равенство  $f(xy) = f(x) + f(y)$ . Найдите  $f(2007)$ , если  $f\left(\frac{1}{2007}\right) = 1$ .
5. Основанием прямоугольного параллелепипеда **ABCDA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>** является квадрат **ABCD**. Найдите наибольшую возможную величину угла между прямой **BD<sub>1</sub>** и плоскостью **BDC<sub>1</sub>**.
6. Решите уравнение:  $(x^3 - 2)(2^{\sin x} - 1) + (2^{x^3} - 4) \sin x = 0$ .
7. Даны таблица **100 × 100** клеток и **N** фишек. Рассматриваются все расстановки фишек в клетки таблицы, удовлетворяющие условию: никакие две фишкы не стоят в соседних клетках. При каком наименьшем натуральном **N** существует такая расстановка, что при перемещении любой из фишек в любую соседнюю клетку заданное условие нарушится? (*Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону*).