

8–9 класс

1. В треугольнике ABC : I — центр вписанной окружности, точка M лежит на стороне BC , причем $\angle BIM = 90^\circ$. Докажите, что расстояние от точки M до прямой AB равно диаметру окружности, вписанной в треугольник ABC .

2. На стороне AC треугольника ABC во внешнюю сторону построен параллелограмм $ACDE$. Пусть O — точка пересечения его диагоналей, N и K — середины сторон BC и BA соответственно. Докажите, что прямые DK , EN и BO пересекаются в одной точке.

3. В остроугольном треугольнике ABC $\angle ABC = 60^\circ$, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр. Биссектриса BL пересекает описанную окружность в точке W ; X — точка пересечения отрезков WH и AC . Докажите, что точки O , L , X и H лежат на одной окружности.

4. Серединный перпендикуляр к биссектрисе BL треугольника ABC пересекает биссектрисы его внешних углов A и C в точках P и Q соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника PBQ , касается окружности, описанной около треугольника ABC .

8–9 класс

5. Даны отрезок PQ и окружность. По окружности движется хорда AB , равная PQ . Пусть T — точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AP и BQ . Докажите, что все полученные таким образом точки T лежат на одной прямой.

6. В остроугольном треугольнике ABC точка I_c — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB ; A_1 и B_1 — точки касания двух других вневписанных окружностей со сторонами BC и CA соответственно; C' — точка на описанной окружности, диаметрально противоположная точке C . Докажите, что прямые I_cC' и A_1B_1 перпендикулярны.

8–9 класс

1. В треугольнике ABC : I — центр вписанной окружности, точка M лежит на стороне BC , причем $\angle BIM = 90^\circ$. Докажите, что расстояние от точки M до прямой AB равно диаметру окружности, вписанной в треугольник ABC .

2. На стороне AC треугольника ABC во внешнюю сторону построен параллелограмм $ACDE$. Пусть O — точка пересечения его диагоналей, N и K — середины сторон BC и BA соответственно. Докажите, что прямые DK , EN и BO пересекаются в одной точке.

3. В остроугольном треугольнике ABC $\angle ABC = 60^\circ$, O — центр описанной окружности, H — ортоцентр. Биссектриса BL пересекает описанную окружность в точке W ; X — точка пересечения отрезков WH и AC . Докажите, что точки O , L , X и H лежат на одной окружности.

4. Серединный перпендикуляр к биссектрисе BL треугольника ABC пересекает биссектрисы его внешних углов A и C в точках P и Q соответственно. Докажите, что окружность, описанная около треугольника PBQ , касается окружности, описанной около треугольника ABC .

8–9 класс

5. Даны отрезок PQ и окружность. По окружности движется хорда AB , равная PQ . Пусть T — точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AP и BQ . Докажите, что все полученные таким образом точки T лежат на одной прямой.

6. В остроугольном треугольнике ABC точка I_c — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AB ; A_1 и B_1 — точки касания двух других вневписанных окружностей со сторонами BC и CA соответственно; C' — точка на описанной окружности, диаметрально противоположная точке C . Докажите, что прямые I_cC' и A_1B_1 перпендикулярны.

10–11 класс

1. Окружность, вписанная в квадрат $ABCD$, касается сторон AB и CD в точках M и K соответственно. Прямая BK пересекает эту окружность в точке L ; X — середина KL . Найдите угол MXK .

2. Углы одного четырехугольника соответственно равны углам другого четырехугольника. Кроме того, равны соответствующие углы между их диагоналями. Обязательно ли такие четырехугольники подобны?

3. Восстановите остроугольный треугольник ABC по вершине A , основанию высоты, проведенной из вершины B и центру окружности, описанной около треугольника BHC (точка H — ортоцентр треугольника ABC).

4. Дан прямоугольный треугольник ABC . Внеписанная окружность касается гипотенузы AB в точке C_1 ; A_1 — точка касания с прямой BC внеписанной окружности, касающейся стороны AC ; B_1 — точка касания с прямой AC внеписанной окружности, касающейся стороны BC . Найдите угол $A_1C_1B_1$.

10–11 класс

5. На сторонах AB и BC неравнобедренного треугольника ABC выбраны точки C_1 и A_1 так, что четырехугольник AC_1A_1C вписанный. Прямые CC_1 и AA_1 пересекаются в точке P . Прямая BP пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Q . Докажите, что прямые QC_1 и CM , где M — середина A_1C_1 , пересекаются на описанной окружности треугольника ABC .

6. Сумма косинусов плоских углов трехгранного угла равна -1 . Найдите сумму его двугранных углов.

10–11 класс

1. Окружность, вписанная в квадрат $ABCD$, касается сторон AB и CD в точках M и K соответственно. Прямая BK пересекает эту окружность в точке L ; X — середина KL . Найдите угол MXK .

2. Углы одного четырехугольника соответственно равны углам другого четырехугольника. Кроме того, равны соответствующие углы между их диагоналями. Обязательно ли такие четырехугольники подобны?

3. Восстановите остроугольный треугольник ABC по вершине A , основанию высоты, проведенной из вершины B и центру окружности, описанной около треугольника BHC (точка H — ортоцентр треугольника ABC).

4. Дан прямоугольный треугольник ABC . Внеписанная окружность касается гипотенузы AB в точке C_1 ; A_1 — точка касания с прямой BC внеписанной окружности, касающейся стороны AC ; B_1 — точка касания с прямой AC внеписанной окружности, касающейся стороны BC . Найдите угол $A_1C_1B_1$.

10–11 класс

5. На сторонах AB и BC неравнобедренного треугольника ABC выбраны точки C_1 и A_1 так, что четырехугольник AC_1A_1C вписанный. Прямые CC_1 и AA_1 пересекаются в точке P . Прямая BP пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Q . Докажите, что прямые QC_1 и CM , где M — середина A_1C_1 , пересекаются на описанной окружности треугольника ABC .

6. Сумма косинусов плоских углов трехгранного угла равна -1 . Найдите сумму его двугранных углов.