XXV Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2017»

Заключительный тур

6 класс

▷ **1.** С числом разрешено производить две операции: «увеличить вдвое» и «увеличить на 1». Можно ли получить из числа 1 число 2017 за 16 операций?

Решение Можно : $1 > 2 > 3 > 6 > 7 > 14 > 15 > 30 > 31 > 62 > 63 > 126 > 252 > 504 > 1008 > 2016 > 2017$.

▷ **2.** В Сбербанк положена сумма в один миллион рублей под некоторые годовые проценты. Какие проценты дает банк, если спустя три года вкладчик получил 1061208 рублей?

Решение Пусть S_0 – первоначальная сумма, p – процентная ставка. Тогда через год на счете будет сумма $S_1 = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$, через два года $S_2 = S_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$, через три года $S_3 = S_2\left(1+\frac{p}{100}\right) = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$. Т.е. $1061208 = 1000000\left(1+\frac{p}{100}\right)^3$, $(100+p)^3 = 1061208 = 8\cdot 27\cdot 17^3$; $100+p = 2\cdot 3\cdot 17 = 102$, $p = 2$.

Ответ: 2%

▷ **3.** Обычно домино содержит 28 различных костей, при этом наибольшее число очков на одной кости — 12. Сколько костей содержало бы домино, если бы наибольшее число очков на одной кости было 16?

Решение В обычном домино на каждой половинке кости может быть от 0 до 6 очков (семь вариантов), при этом кости не повторяются (т.е. $0+1$ — та же кость, что и $1+0$). Всего можно составить 49 (7*7) пар чисел от 0 до 6, из них будет семь дублей (пары вида $0+0$ и т.д.), а остальные встречаются по два раза. Таким образом, различных костей имеется $\frac{7*7-7}{2}+7 = 28$. Обобщая на случай домино с количеством очков на половинке кости от 0 до n, получаем формулу $\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. При наибольшем числе очков на одной кости 16, на каждой половинке будет от 0 до 8 очков ($n = 8$), и всего костей будет $\frac{9\cdot 10}{2} = 45$.

Ответ: 45

▷ **4.** Три землекопа за 4 часа выкопали 6 ям. Сколько ям выкопают два землекопа за 3 часа?

Решение 3 землекопа за 4 часа выкопали 6 ям, следовательно, 1 землекоп за 4 часа выкопает 2 ямы, 1 землекоп за 1 час выкопает $\frac{1}{2}$ ямы. Тогда 1 землекоп за 3 часа выкопает $\frac{3}{2}$ ямы, а 2 землекопа за 3 часа выкопают 3 ямы.

Ответ: 3

▷ **5.** В примере ЧАЙ:АЙ=5 каждой букве соответствует своя цифра. Чему равно наибольшее возможное значение Ч+А+Й?

Решение $(100\cdot\texttt{Ч}+\texttt{АЙ}):\texttt{АЙ} = 5$, $100\cdot\texttt{Ч}+\texttt{АЙ} = 5\cdot\texttt{АЙ}$, $25\cdot\texttt{Ч} = \texttt{АЙ}$. Подберем Ч. Если $\texttt{Ч} = 1$, то $\texttt{АЙ} = 25$ и $\texttt{Ч}+\texttt{А}+\texttt{Й} = 1+2+5 = 8$. Если $\texttt{Ч} = 2$, то $\texttt{АЙ} = 50$ и $\texttt{Ч}+\texttt{А}+\texttt{Й} = 2+5+0 = 7$. Если $\texttt{Ч} = 3$, то $\texttt{АЙ} = 75$ и $\texttt{Ч}+\texttt{А}+\texttt{Й} = 3+7+5 = 15$. При больших Ч число АЙ становится трехзначным. Следовательно, наибольшее возможное значение Ч+А+Й равно 15.

Ответ: 15

▷ **6.** Часы показывают половину четвертого. Через сколько минут минутная стрелка догонит часовую?

Решение В половину четвертого минутная стрелка находится на часах впереди часовой на цифре 6, а часовая — посередине между цифрами 3 и 4. Таким образом, расстояние между ними в это время равно $180° + 90° + 15°$. Часовая стрелка движется со скоростью $\frac{360°}{12\text{ч}} = 30°/\text{ч} = 0,5°/\text{мин}$. Минутная стрелка движется со скоростью $\frac{360°}{60\text{мин}} = 6°/\text{мин}$.

Через t минут часовая стрелка пройдет $0,5t$ градусов, а минутная — $6t$ градусов. Тогда

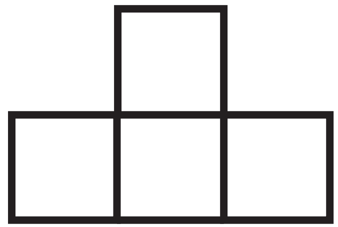
$$6t - 0,5t = 180° + 90° + 15°$$

$$\frac{11}{2}t = 285°$$

$$t = \frac{285\cdot 2}{11} = \frac{570}{11} = 51\frac{9}{11}$$

Ответ: $51\frac{9}{11}$ мин

▷ **7.** Чемпион по игре в тетрис утверждает, что он заполнил поле размером 10×200, используя все фигуры, из них 17 фигур вида, представленного на рисунке.



Могло ли такое быть?

Решение

Раскрасим поле 10×200 как шахматную доску. Так как каждая фигура состоит из четырех клеток, а всего клеток 2000, то использовано 500 фигур. При этом всего белых клеток ровно половина — 1000.

Всего возможных фигур в игре тетрис (кроме фигуры, приведенной выше) - 6 (условно обозначим их буквами a, b, c, d, e, f). Все эти фигуры при "шахматной"раскраске будут иметь две белых и две черных клетки. Фигуру же, приведенную на рисунке, можно раскрасить двумя способами - в первом будет три белых клетки и одна черная клетка (обозначим этот вариант x), а во втором — наоборот, одна белая и три черных клетки (обозначим этот вариант y).

Подсчитаем фигуры и белые клетки в них и получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f+x+y=500 \\ 2a+2b+2c+2d+2e+2f+3x+y=1000 \\ x+y=17 \end{cases}$$

Из второго уравнения вычтем удвоенное первое, получим

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=17 \end{cases}$$

Система не имеет решений в целых числах.

Ответ: нет

▷ **8.** Дана линейка без делений. На ней отмечены три точки, расстояния между которыми 2017 см и 1993 см. Докажите, что с помощью этой линейки можно отложить любой отрезок, длина которого выражается любым целым числом сантиметров.

Ответ:

1) $2017-1993=24$

2) $1993=24\cdot 83+1$

3) Имея единичный отрезок, можем построить любой отрезок

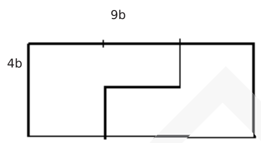
▷ **9.** Последовательно в порядке возрастания выписаны все пятизначные числа, в записи которых присутствуют цифры 0, 1, 2, 3, 4. Сколько всего таких чисел?

Решение На первом месте не может стоять 0, остается 4 цифры. На остальных позициях может стоять любая из 5 цифр. Итого получаем $N=4\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5=2500$.

Ответ: Всего чисел – 2500

▷ **10.** Длина одной стороны прямоугольника составляет 225% другой. Разрежьте этот прямоугольник на две части так, чтобы можно было из них составить квадрат.

Ответ: $a=4b$



XXV Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2017»

Заключительный тур

7 класс

▷ **1.** Последовательно в порядке возрастания выписаны все пятизначные числа, в записи которых присутствуют цифры 0, 1, 2, 3, 4. Какое число записано на 2017 месте?

Решение $5\times5\times5\times5\times4=2500$ (на первом месте не может стоять 0)

Количество чисел, на первом месте которых стоит 1, 2, 3 равно $3\times 5^4=1875$.

$\underbrace{10000, 10001, \ldots 34444}_{1875}, \underbrace{40000, \ldots 40444}_{125}, \underbrace{41000, \ldots 41024}_{15}, \underbrace{41030, \ldots 41031}_{2}.$

$2017-1875=142=125+17=125+15+2.$

Итак, на 2017-ом месте записано число 41031.

Ответ: На 2017-ом месте записано число 41031.

▷ **2.** Три землекопа за 4 часа выкопали 6 ям. Сколько времени потребуется четырем землекопам, чтобы вырыть 5 ям?

Решение 3 землекопа за 4 часа выкопали 6 ям, следовательно, 1 землекоп за 4 часа выкопает 2 ямы, 1 землекоп за 1 час выкопает 0,5 ямы. Тогда 4 землекопа за 1 час выкопают 2 ямы, а 4 землекопа за 2,5 часа выкопают 5 ям.

Ответ: 2,5 часа

▷ **3.** Приведена таблица финала чемпионата Южной Америки по футболу:

					Забитые мячи	Пропущенные мячи	Очки
Аргентина	X			6:0	11	5	4
Бразилия		X	1:3		4	5	3
Перу		3:1	X		7	7	2
Ямайка	0:6			X	3	8	3

Заполните пустые клетки. если известно, что за победу давалось два очка, за ничью — одно очко. Во всех не указанных матчах каждая команда не уходила без забитого гола.

Ответ:

Аргентина	X	1:2	4:3	6:0	11	5	4
Бразилия	2:1	X	1:3	1:1	4	5	3
Перу	3:4	3:1	X	1:2	7	7	2
Ямайка	0:6	1:1	2:1	X	3	8	3

▷ **4.** Известно, что у любого Кощея Бессмертного не более 11 зубов. Доказать, что среди 2017 Кощеев может не оказаться двух особ с одним и тем же набором зубов, а среди 20170 найдется по крайней мере 10 Кощеев с одинаковым набором зубов.

Решение: Использовать доказательство от противного. Пронумеруем (возможные) зубы Кощея от 1 до 11, на каждом месте либо есть зуб, либо его нет. Всего получаем $2^{11} = 2048$ различных возможных наборов зубов у Кощея, так как $2017 < 2048$, то первое утверждение доказано. Далее, так как $9 \cdot 2048 < 20170$, то среди 20170 Кощеев будет по крайней мере 10 особ с одинаковым набором зубов.

▷ **5.** Пусть $\overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ — десятичная запись k-значного числа. Найдите все четырехзначные числа, для которых выполняется соотношение:

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} = \overline{a_1 a_2} \cdot \overline{a_3 a_4} + 217.$$

Решение: Пусть $x = \overline{a_1 a_2}$, $y = \overline{a_3 a_4}$. x, y — целые двузначные числа. Тогда $100x + y = xy + 217$, $100x - 100 - xy + y = 117$, $(x-1)(100-y) = 117 = 3 \cdot 3 \cdot 13$. Тогда либо $x - 1 = 39$, $100 - y = 3$, либо $x - 1 = 13$, $100 - y = 9$, либо $x - 1 = 9$, $100 - y = 13$. То есть получаем наборы 40 и 97, 14 и 91, 10 и 87.

Ответ: 1087, 1491, 4097

▷ **6.** Из квадрата 7×7 вырезана не угловая клетка. Оставшуюся часть покрыли прямоугольниками 3×1. Определить вырезанную клетку.

Решение: Раскрасим квадрат по диагоналям в три цвета последовательно: первую диагональ в первый цвет, вторую — во второй, третью — в третий, четвертую — снова в первый и т.д. При такой раскраске любой прямоугольник 3×1 будет содержать все три цвета. Подсчитаем число клеток каждого цвета:

в первый цвет раскрасили первую, четвертую, седьмую, десятую и тринадцатую диагональ – всего $1 + 4 + 7 + 4 + 1 = 17$ клеток;

во второй цвет раскрасили вторую, пятую, восьмую и одиннадцатую диагональ – всего $2 + 5 + 6 + 3 = 16$ клеток;

в третий цвет раскрасили третью, шестую, девятую, двенадцатую диагональ — всего $3 + 6 + 5 + 2 = 16$ клеток.

Отсюда ясно, что вырезали клетку цвета 1. Повернем квадрат на 90° (так как диагонали могли быть проведены в двух возможных направлениях) и выделим клетки цвета 1, которые сохранили цвет после поворота. Получим 5 подходящих вариантов клеток - центральная и по середине каждой из сторон.

Ответ: 5 подходящих вариантов клеток - центральная и по середине каждой из сторон

▷ **7.** Обычно домино содержит 28 различных костей, при этом наибольшее число очков на одной кости — 12. Сколько костей содержало бы домино, если бы наибольшее число очков на одной кости было 20?

Решение В обычном домино на каждой половинке кости может быть от 0 до 6 очков (семь вариантов), при этом кости не повторяются (т.е. $0 + 1$ — та же кость, что и $1 + 0$). Всего можно составить 49 (7*7) пар чисел от 0 до 6, из них будет семь дублей (пары вида $0 + 0$ и т.д.), а остальные встречаются по два раза. Таким образом, различных костей имеется $\frac{7*7-7}{2} + 7 = 28$. Обобщая на случай домино с количеством очков на половинке кости от 0 до n, получаем формулу $\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. При наибольшем числе очков на одной кости 20, на каждой половинке будет от 0 до 10 очков ($n = 10$), и всего костей будет $\frac{11 \cdot 12}{2} = 66$.

Ответ: 66

▷ **8.** Известно, что ОДИН+ОДИН=МНОГО. Найдите чему равно ДОМИНО.

Решение 6823+6823=13646

Ответ: 861236

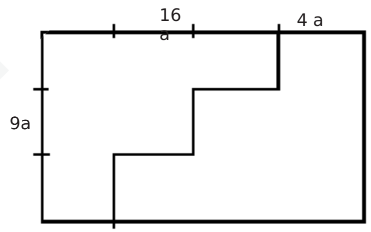
▷ **9.** Каждую вершину квадрата соединили с серединами сторон квадрата, не проходящих через эту вершину. Середины смежных сторон соединили попарно. Найдите площадь фигуры, получившейся при пересечении образовавшихся четырех треугольников.

Решение Пусть a — сторона квадрата. $S = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + 4\frac{a}{6}\frac{a}{12} = \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{18} = \frac{a^2}{6}$

Ответ: Площадь равна $\frac{a^2}{6}$

▷ **10.** Длина одной стороны прямоугольника составляет 18% от его периметра. Разрежьте этот прямоугольник на две части так, чтобы из этих частей можно было составить квадрат.

Ответ:



XXV Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2017»

Заключительный тур

8 класс

$\triangleright$ **1.** Сколько существует натуральных чисел n таких, что число $2018n$ делится на $2017+n$?

Решение $\frac{2018n}{2017+n} = \frac{2018(n+2017)-2017\cdot 2018}{n+2017} = 2018 - \frac{2\cdot 1009\cdot 2017}{n+2017}$

Ответ:

1) $n+2017 = 2018, n = 1$;

2) $n+2017 = 2\times 2017, n = 2017$;

3) $n+2017 = 1009\times 2017, n = 1008\times 2017$;

4) $n+2017 = 2018\times 2017, n = 2017^2$;

$\triangleright$ **2.** Найдите два наименьших натуральных числа, каждое из которых делится на 5-ую степень некоторого числа, большего 1.

Решение $2^5 = 32, 3^5 = 243$.

$|32a-243b| = 1$, $32a-243b = \pm 1$, $32a = 243b\pm 1$, следовательно b — нечетно:

$b=1$, $32a = 242$ или 244 — невозможно.

$b=3$, $32a = 729\pm 1$ — невозможно.

$b=5$, $32a = 1214$ или 1216.

$1216 = 32\times 38$, т.е. $a = 38$.

$b = 5+325$, $a = 38+243t$

При $b = 5+32 = 37$, $a = 281$.

Пусть $N = 1215 \vdots 3^5 = 243$

$1215 = 243\times 5$

$N+1 = 1216 \vdots 25 = 32$

$1216 = 32\times 38$

Ответ: 1215, 1216

$\triangleright$ **3.** Пусть $d(x)$ — расстояние от x до ближайшего целого числа. Сколько решений имеет уравнение

$$d(x) = \frac{x}{1000}?$$

Ответ: 1000

$\triangleright$ **4.** Известно, что у дракона 5 голов и у каждой не более 31 зуба. Верно ли, что среди 32^{31} драконов может не оказаться двух особ с одним и тем же наборов зубов, а среди 16^{39} драконов обязательно найдется хотя бы одна пара с одним и тем же наборов зубов?

Решение Пронумеруем (возможные) зубы головы дракона от 1 до 31, на каждом месте либо есть зуб, либо его нет. Всего получаем 2^{31} различных возможных наборов зубов у головы, и $(2^{31})^5 = 2^{155}$ различных возможных наборов зубов у дракона. Так как $32^{31} = 2^{155}$, то первое утверждение доказано. Далее, так как $16^{39} = 2^{39\cdot 4} = 2^{156} > 2^{155}$, то среди 16^{39} драконов обязательно найдется хотя бы одна пара с одним и тем же наборов зубов.

Ответ: оба утверждения верны

$\triangleright$ **5.** Известно, что числа 40316, 64520 и 98809 при делении на некоторое число дают один и тот же остаток. Найдите этот делитель и остаток.

Решение

$$\begin{cases} 40316 = as+r, \\ 64520 = bs+r, \\ 98809 = cs+r. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b-a)s = 24204 = 2^2\cdot 3\cdot 2017, \\ (c-b)s = 34289 = 17\cdot 2017, \\ (c-a)s = 58493 = 29\cdot 2017. \end{cases}$$

Получаем, что $c = 2017$.

$40316 = 2017\cdot 19+1993$

$64520 = 2017\cdot 31+1993$

$98809 = 2017\cdot 48+1993$

Ответ: 2017, 1993

$\triangleright$ **6.** Пусть $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_k}$ — десятичная запись k-значного числа. Найдите все четырехзначные числа, для которых выполняется соотношение:

$$\overline{a_1a_2a_3a_4} = \overline{a_1a_2}\cdot\overline{a_3a_4}+1677.$$

Решение: Пусть $x = \overline{a_1a_2}$, $y = \overline{a_3a_4}$. x, y — целые двузначные числа. Тогда $100x+y = xy+1677$, $100x-100-xy+y = 1577$, $(x-1)(100-y) = 1577 = 19\cdot 83$. Тогда либо $x-1 = 19$, $100-y = 83$, либо $x-1 = 83$, $100-y = 19$. То есть получаем наборы 20 и 17, 84 и 81.

Ответ: 2017, 8481

$\triangleright$ **7.** Найти все точки плоскости (x, y), координаты которых удовлетворяют соотношению

$$\max\{x, x^2\}+\min\{y, y^2\} = 1.$$

Решение: Рассмотрим $x\in[0,1]$. В этом случае $\max\{x,x^2\} = x$, $\min\{y,y^2\} = y^2$, соотношение имеет вид $x+y^2 = 1$. Далее, для $x\in[-1,0)$ $\max\{x,x^2\} = x^2$, $\min\{y,y^2\} = y^2$, соотношение имеет вид $x^2+y^2 = 1$. При $x<-1$ $\max\{x,x^2\} = x^2$, $\min\{y,y^2\} = y$, соотношение имеет вид $x^2+y = 1$. При $x>1$ $\max\{x,x^2\} = x^2$, $\min\{y,y^2\} = y$, соотношение имеет вид $x^2+y = 1$.

Ответ:

$$\begin{cases} y = 1-x^2, & x<-1, \\ y = \sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,0), \\ y = \sqrt{1-x}, & x\in[0,1], \\ y = 1-x^2, & x>1, \end{cases}$$

▷ **8.** Как разрезать квадрат со стороной 7 см на прямоугольники, сумма периметров которых равна

а) 2017см;

б) 1993 см?

Решение:

а) Отрежем от квадрата прямоугольник размером $\frac{1}{2} \times 7$, его разрежем на две части размером $\frac{1}{2} \times \frac{7}{2}$. Оставшуюся часть разрежем на 142 прямоугольника размером $\frac{\frac{13}{2}}{142} \times 7$. Сумма периметров: $P = 142(14 + \frac{13}{142}) + 2(7+1) = 142 \cdot 14 + 13 + 16 = 2017$.

б) Отрежем от квадрата прямоугольник размером $\frac{5}{2} \times 7$, его разрежем на две части размером $\frac{5}{2} \times \frac{7}{2}$. Оставшуюся часть разрежем на 140 прямоугольников размером $\frac{\frac{9}{2}}{140} \times 7$. Сумма периметров: $P = 140(14 + \frac{9}{140}) + 2(7+5) = 140 \cdot 14 + 9 + 24 = 1993$.

▷ **9.** Обычно домино содержит 28 различных костей, при этом наибольшее число очков на одной кости — 12. Сколько костей содержало бы домино, если бы наибольшее число очков на одной кости было 14?

Решение В обычном домино на каждой половинке кости может быть от 0 до 6 очков (семь вариантов), при этом кости не повторяются (т.е. $0+1$ — та же кость, что и $1+0$). Всего можно составить 49 (7*7) пар чисел от 0 до 6, из них будет семь дублей (пары вида $0+0$ и т.д.), а остальные встречаются по два раза. Таким образом, различных костей имеется $\frac{7*7-7}{2} + 7 = 28$. Обобщая на случай домино с количеством очков на половинке кости от 0 до n, получаем формулу $\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. При наибольшем числе очков на одной кости 14, на каждой половинке будет от 0 до 7 очков ($n = 7$), и всего костей будет $\frac{8 \cdot 9}{2} = 36$.

Ответ: 36

▷ **10.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + 2z = -2, \\ xy - x + y - 2z^2 = 3. \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} (x+1) + (y-1) = -2 - 2z, \\ (x+1)(y-1) = 2z^2 + 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 1 = -2(1+z) - (x+1), \\ (x+1)(-2(1+z) - (x+1)) = (z^2 + 2z + 1) + (z^2 - 2z + 1). \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 1 = -2(1+z) - (x+1), \\ (x+1)^2 + 2(1+z)(x+1) + (z^2 + 2z + 1) + (z^2 - 2z + 1) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 1 = -2(1+z) - (x+1), \\ ((x+1) + (1+z))^2 + (z-1)^2 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 1 = -2(1+z) - (x+1), \\ (x+1) + (1+z) = 0, \\ z - 1 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -1, \\ x = -3, \\ z = 1. \end{cases}$$

Ответ: (-3,-1,1)

XXV Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2017»

Заключительный тур

9 класс

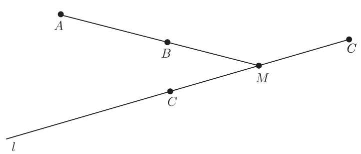
▷ **1.** Провести через точки A и B, лежащие по одну сторону от прямой l, окружность, касающуюся прямой l.

Решение

1) AB не параллельна l.

$|MC|^2 = |MA||MB|$

$|MC| = \sqrt{|MA||MB|}$, т.е. решения 2.



2)Если $AB \parallel l$ — одно единственное решение.

Ответ: 1) Если AB непараллельна l, решения два. 2) Если прямые параллельны - решение единственно

▷ **2.** Найдите все трехзначные числа, в которых количества сотен, десятков и единиц образуют:

1) арифметическую прогрессию;

2) геометрическую прогрессию.

Решение

Пусть $N = \overline{abc}$, следовательно количество сотен — a, десятков — $\overline{ab} = 10a+b$, а единиц — $100a + 10b + c$.

1) $2(10a + b) = a + 100a + 10b + c$;

$20a + 20b = 101a + 10b + c$;

$0 = 81a + 8b + c$, что невозможно.

2) $(10a + b)^2 = a(100a + 10b + c)$;

$100a^2 + 20ab + b^2 = 100a^2 + 10ab + ac$;

$10ab + b^2 = acb^2 = a(c - 10b)$, следовательно $c - 10b \geq 0$, но $c - 10b \leq 0$, так как c и b — цифры, значит, $b = c = 0$, тогда a — любое.

Ответ: 1)нет таких чисел, 2) 9 чисел: 100, 200, ... , 900.

▷ **3.** Докажите, что для катетов a, b и гипотенузы c прямоугольного треугольника выполняется неравенство

$$(a + b)c \geq 2\sqrt{2}ab.$$

Решение

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$(a + b)\sqrt{a^2 + b^2} \geq 2\sqrt{2}ab \Leftrightarrow (a + b)^2(a^2 + b^2) \geq 8a^2b^2$

Известно, что $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

$(a+b)^2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \cdot 2ab = (a^2+b^2+2ab) \cdot 2ab \geq (2ab+2ab) \cdot 2ab = 8a^2b^2$

Утверждение доказано.

▷ **4.** Число $\frac{2017}{2^{2017}}$ записали в виде конечной десятичной дроби. Какая цифра стоит на четвертом месте с конца?

Решение

$$\frac{2017}{2^{2017}} = 2017 \cdot 5^{2017} \cdot 10^{-2017}$$

$2017 = 4 \cdot 504 + 1$

$2017 \cdot 5 = 10085,\ n = 1$

$10085 \cdot 5 = 20425,\ n = 2$

$20425 \cdot 5 = 32125,\ n = 3$

$32125 \cdot 5 = 40625,\ n = 4$

$40625 \cdot 5 = 53125,\ n = 5$

$53125 \cdot 5 = 65625,\ n = 6$

$65625 \cdot 5 = 78125,\ n = 7$

$78125 \cdot 5 = 80625,\ n = 8$

Видно, что последние четыре цифры начинают повторяться, для четвертой цифры с конца получаем цикл 0-3-5-8. То есть для $n = 4, 8, \ldots, 2016, \ldots$ четвертая цифра с конца - 0, а для $n = 2017$ получаем то же окончание, что и для $n = 5$.

Ответ: 3

▷ **5.** Найти все точки плоскости (x, y), координаты которых удовлетворяют соотношению

$$\begin{cases} \max\{x, x^2\} = \min\{y, y^2\}, \\ \min\{x, x^2\} + \max\{y, y^2\} = 1. \end{cases}$$

Решение

Поскольку

$$max\{x, x^2\} = \left[\begin{array}{ll} x^2, & x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \\ x, & x \in [0; 1] \end{array} \right.$$

и

$$min\{x, x^2\} = \left[\begin{array}{ll} x, & x \in (-\infty; 0] \cup [1; +\infty) \\ x^2, & x \in [0; 1] \end{array} \right.$$

то рассмотрев все участки, получим для первого соотношения:

$$\begin{cases} y = x^2, & x < -1, \\ y = -x, & x \in [-1, 0), \\ y = \sqrt{x}, & x \in [0, 1], \\ y = x^2, & x > 1, \end{cases}$$

и для второго соотношения:

$$\begin{cases} x = 1 - y^2, & y < -1, \\ x = \sqrt{1 - y^2}, & y \in [-1, 0), \\ x = \sqrt{1 - y}, & y \in [0, 1], \\ x = 1 - y^2, & y > 1, \end{cases}$$

Эти два набора точек пересекаются в двух местах: в квадрате, где $0 \le x, y \le 1$ получаем систему

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y + x^2 = 1 \end{cases}$$

Вторая точка пересечения при $x < -1, y > 1$ определяется решением системы

$$\begin{cases} x^2 = y \\ x + y^2 = 1 \end{cases}$$

Эти системы приводят к уравнениям 4 порядка, которые можно решить методом Кардано.

$\triangleright$ **6.** Последовательно выписаны в порядке возрастания все шестизначные числа, в записи которых присутствуют $0, 1, 2, 3$. Какое число записано на 1993-ем месте?

Решение

$T = 4^5 \cdot 3 = 3072$— количество шестизначных чисел, которые можно составить из набора цифр.

$\underbrace{100000, \ldots, 1333\ldots3}_{1024}, \underbrace{200000, \ldots, 203333}_{256}, \underbrace{210000, \ldots, 213333}_{256}, \underbrace{220000, \ldots, 223333}_{256}$ $\underbrace{230000, \ldots, 230333}_{64}, \underbrace{231000, \ldots, 231333}_{64}, \underbrace{232000, \ldots, 232333}_{64}, \underbrace{233000, \ldots, 233003}_{4},$ $\underbrace{233010, \ldots, 233013}_{4}, 233020.$

Получаем, что $a_{1993} = 233020$.

Ответ: 233200

$\triangleright$ **7.** Докажите, что существует такое натуральное n, что $1993^n - 1$ делится нацело на 2017.

Доказательство: Рассмотрим 2018 чисел

$$1993^1 - 1, 1993^2 - 1, \ldots 1993^{2018} - 1.$$

Остатков при делении на 2017 — 2017. Следовательно по признаку Дирихле существует 2 числа, имеющих одинаковый остаток.

Пусть это $1993^i - 1$ и $1993^j - 1$, $j > i$, тогда

$((1993^i - 1) - (1993^j - 1)) \vdots 2017$,

$(1993^j (1993^{i-j} - 1)) \vdots 2017$, следовательно $(1993^{i-j} - 1) \vdots 2017$.

$\triangleright$ **8.** Пусть $\overline{a_1 a_2 a_3 \ldots a_k}$ — десятичная запись k-значного числа. Найдите все числа, для которых выполняется соотношение:

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6} = \overline{a_1 a_2 a_3} \cdot \overline{a_4 a_5 a_6} + 2017.$$

Решение: Пусть $x = \overline{a_1 a_2 a_3}$, $y = \overline{a_4 a_5 a_6}$. x, y — целые трехзначные числа. Тогда $1000x + y = xy + 2017$, $1000x - 1000 - xy + y = 1017$, $(x-1)(1000-y) = 1017 = 3 \cdot 3 \cdot 113$. Тогда либо $x - 1 = 113$, $1000 - y = 9$, либо $x - 1 = 339$, $1000 - y = 3$. То есть получаем наборы 114 и 991, 340 и 997.

Ответ: 340997, 114991

$\triangleright$ **9.** В двух неодинаковых банках с водой растворили по одной килограммовой пачке сахара, получив 40% и 60% растворы сахара. Скольки процентный раствор сахара получится после смешивания этих объемов раствора?

Решение: Пусть в первой банке было x л воды, тогда $\frac{1}{x+1} = 0,4$, откуда $x = \frac{3}{2}$. Пусть во второй банке было y л воды, тогда $\frac{1}{y+1} = 0,6$, откуда $y = \frac{2}{3}$. После смешивания получим концентрацию сахара :

$$\frac{2}{x + y + 2} = \frac{2}{\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + 2} = \frac{12}{25} = 0,48$$

Ответ: 48%

$\triangleright$ **10.** При каком a число решений уравнения $d(x) = a\sqrt{x}$, где $d(x)$ — расстояние от x до ближайшего целого числа, равно

а) 2017;

б) 2018?

Ответ: а) $\frac{1}{\sqrt{4030}} < a < \frac{1}{\sqrt{4026}}$ б) $a = \frac{1}{\sqrt{4034}}$

XXV Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2017»

Заключительный тур

10 класс

▷ **1.** Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin 36^\circ}{2\sin 42^\circ - \cos 36^\circ}$$

В ответе укажите наименьший положительный угол в градусах.

Решение:

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin 36^\circ}{2\sin 42^\circ - \cos 36^\circ}$$

$2\sin x \cdot \sin 42^\circ - \sin x \cdot \cos 36^\circ = \cos x \cdot \sin 36^\circ$

$2\sin x \cdot \sin 42^\circ = \cos x \cdot \sin 36^\circ + \sin x \cdot \cos 36^\circ$

$2\sin x \cdot \sin 42^\circ = \sin(x + 36^\circ)$

$x = 48^\circ + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

$2\sin 48^\circ \cdot \sin 42^\circ = \sin(48^\circ + 76^\circ)$

$2\cos 42^\circ \cdot \sin 42^\circ = \sin 84^\circ$

$\sin 84^\circ = \sin 84^\circ$ — верно.

Ответ: 48

▷ **2.** Какая цифра стоит на четвертом месте с конца в десятичной записи дроби $\frac{1993}{2^{2017}}$?

Решение:

$$\frac{1993}{2^{2017}} = \frac{1993 \cdot 5^{2017}}{10^{2017}}$$

$1993 \cdot 5 = 19965$

$19965 \cdot 5 = 29825$

$29825 \cdot 5 = 39125$

$39125 \cdot 5 = 45625$

$45625 \cdot 5 = 58125$

$58125 \cdot 5 = 60625$

$60625 \cdot 5 = 73125$

$73125 \cdot 5 = 85625$

$85625 \cdot 5 = 98125$

$\ldots$

Последние четыре цифры — 8125.

Ответ: 8

▷ **3.** Каждую вершину квадрата соединили с серединами сторон квадрата, не проходящих через эту вершину. Середины смежных сторон соединили попарно. Найти наибольшее значение синуса внутреннего угла в получившейся при пересечении образовавшихся четырех треугольников фигуре.

Ответ: $\frac{3}{5}$

▷ **4.** Найдите наибольшее значение величины $\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}$, если $x, y, z \geq 1$ и $x + y + z = 6$.

Решение:

$\sqrt{x-1} \leq \frac{x}{2}, \forall x \geq 1$

$x - 1 \leq \frac{x^2}{4}$

$0 \leq \frac{x^2}{4} - x + 1$

$0 \leq (x-2)^2$. Равенство при $x = 2$, следовательно

$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1} \leq \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$ — достигается при $x = y = z = 2$.

Ответ: 3

▷ **5.** Пусть $d(x)$ — расстояние от x до ближайшего целого числа. При каком a уравнение:

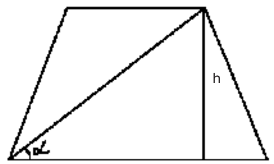
$$d(x) = \frac{x}{a}$$

имеет ровно 2017 решений?

Ответ: 2017

▷ **6.** Высота трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, равна h. Какой может быть длина средней линии такой трапеции? Какова наименьшая возможная длина средней линии? Когда она получается?

Ответ:



x - средняя линия. $x = \frac{h}{sin 2\alpha}$, минимальное значение $x = h$ получается при $\alpha = \pi/4$

▷ **7.** Найдите наименьшее натуральное n, удовлетворяющее неравенству:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \cdots + n(n+1)(n+2) \geq 1993 \cdot 2017.$$

Решение:

Запишем общий член суммы в виде $(k-1)k(k+1) = k^3 - k$, складываются выражения для $k = 1, \ldots, n+1$. Известно, что сумма кубов чисел от 1 до m равна $\left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2$, а сумма чисел от 1 до m равна $\frac{m(m+1)}{2}$. Тогда сумма членов вида $k^3 - k$ при $k = 1, \ldots, n+1$ равна

$$\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 - \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{4}(n^2+3n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Получаем
$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \geq 1993 \cdot 2017 = 16079524$$
Подбором определим наименьшее n.

Ответ: $n = 62$

$\triangleright$ **8.** Можно ли разрезать квадрат 10×10 на несколько прямоугольников, сумма периметров которых равна 2017?

Решение: Одно из возможных построений: отрежем от квадрата прямоугольник размером $\frac{1}{2} \times 10$, его разрежем на 18 частей размером $\frac{1}{2} \times \frac{10}{18}$. Оставшуюся часть разрежем на 98 прямоугольников размером $\frac{\frac{19}{2}}{98} \times 10$. Сумма периметров: $P = 98(20 + \frac{19}{98}) + 18(\frac{20}{18} + 1) = 98 \cdot 20 + 19 + 20 + 18 = 2017$.

Ответ: да

$\triangleright$ **9.** Дан отрезок длиной $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$. С помощью циркуля и линейки построить отрезок длиной $\sqrt[4]{10}$.

Решение: $5\sqrt{2} = \sqrt{50} > \sqrt{49} = 7$; $(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7) = 1$

$x = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$

$x^3 = 7 + 5\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 7 + 3\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7})$

$x^3 = 10\sqrt{2} + 3x$, пусть $x = y\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}y^3 - 3\sqrt{2}y - 10\sqrt{2} = 0$

$2y^3 - 3y - 10 = 0$

$(y-2)(2y^2 + 4y + 5) = 0$

$y = 2$, $x = 2\sqrt{2}$.

Имея отрезок длиной $2\sqrt{2}$ можно построить отрезок длиной $\sqrt{2}$, восстановив перпендикуляр длиной $\frac{\sqrt{2}}{2}$ в середине данного отрезка получим прямоугольный треугольник с катетом 1. Имея отрезок длиной 1, построим прямоугольный треугольник с катетами 1 и 3, получим гипотенузу $\sqrt{10}$. Поскольку $\sqrt[4]{10} = \sqrt{1 \cdot \sqrt{10}}$, то откладывая на прямой от одной точки O в разные стороны отрезки 1 и $\sqrt{10}$ и строя на получившемся отрезке как на диаметре окружность, можем провести из точки O прямую h, перпендикулярную исходной прямой и получить точку пересечения h с окружностью. Расстояние от этой точки до исходной прямой $\sqrt[4]{10}$.

$\triangleright$ **10.** В одной прямоугольной половине квадрата 20×20 проведена единичная окружность, центр которой удален не менее, чем на 3 единицы от ее границы.

Случайным образом на второй половине, не видя первую окружность, рисуется такая же единичная окружность. Какова вероятность того, что существует квадрат, две противолежащие вершины которого принадлежат окружностям, а две другие — общей границе этих половин?

Решение: Чтобы построить необходимый квадрат, нужно отобразить окружность, относительно данной прямой, (если существуют точки пересечения этих окружностей, то такой квадрат существует) получив точку пересечения, через нее перпендикулярно данной прямой провести прямую, отрезок соединяющий 2 противолежащие окружности — диагональ квадрата, отложив такой же отрезок на прямой получаем вершины квадрата.

Ответ: $\pi/36$

XXV Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2017»

Заключительный тур

11 класс

$\triangleright$ **1.** Решите уравнение $\sin x = 2\sin 20° \sin(170° - x)$.

Решение: $\sin(170° - x) = \sin(x + 10°) = \sin x \cos 10° + \cos x \sin 10°$

$\sin x = 2\sin 20°(\sin x \cos 10° + \cos x \sin 10°)$

$\sin x = 2\sin 20° \sin x \cos 10° + 2\sin 20° \cos x \sin 10°$

$\sin x(1 - 2\sin 20° \cos 10°) = 2\sin 20° \cos x \sin 10°$

$1 - 2\sin 20° \cos 10° = 1 - \sin 30° - \sin 10° = \frac{1}{2} - \sin 10° = \sin 30° - \sin 10° = 2\sin 10° \cos 20°$

$2\sin 10° \cos 20° \sin x = 2\sin 20° \cos x \sin 10°$

$\cos 20° \sin x - \sin 20° \cos x = 0$

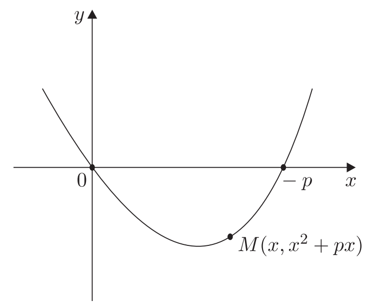
$\sin(x - 20°) = 0$

$x = 20° + 180° n$

Ответ: $x = \pi/9 + \pi n$

$\triangleright$ **2.** Точка начинает движение из начала координат и движется по графику функции $y = x^2 + px$ и не меняет направление движения. При каком p эта точка всегда удаляется от начала координат?

Решение:



Пусть для определенности $p \leq 0$. если $p = 0$, то $y = x^2$ — подходит. Пусть $p < 0$. Функции $f(x) = OM = \sqrt{(x-0)^2 + (x^2 + px - 0)^2}$ должна быть возрастающей, т.е. функция $y = x^2 + (x^2 + px)^2$ — возрастающая.

$y' = 2x + 2(x^2 + px)(2x + p) \geq 0$

При $x < 0$ — является возрастающей.

При $x > 0$ — неизвестно.

Сократим на $2x$:

$1 + (x + p)(2x + p) \geq 0$

$2x^2 + 3px + (p^2 + 1) \geq 0$

$x^2+\frac{3}{2}px+\frac{p^2+1}{2}\geq 0$
$(x+\frac{3}{2}p)^2+\frac{8p^2+8-9p^2}{16}\geq 0,$
$(x+\frac{3}{2}p)^2+\frac{8-p^2}{16}\geq 0, \forall x$, следовательно $8-p^2\geq 0$.
Ответ: $|p|<2\sqrt{2}$

▷ **3.** При каком наименьшем n неравенство

$$x^2+x\leq\overline{\underbrace{11\dots1}_{n}\underbrace{22\dots2}_{n}}$$

имеет не менее 2017 решений, кратных 1993?

Решение:

$$x^2+x-\overline{\underbrace{11\dots1}_{n}\underbrace{22\dots2}_{n}}\leq 0$$

$$x^2+px+q\leq 0$$

$$p=-1, q=-\overline{\underbrace{11\dots1}_{n}\underbrace{22\dots2}_{n}}$$

$$D=p^2-4q=\overline{\underbrace{44\dots4}_{n}\underbrace{88\dots8}_{n-1}9}$$

$$\underbrace{99\dots9}_{n}=10^n-1$$

$$D=\underbrace{44\dots4}_{n}\cdot 10^n+\underbrace{88\dots8}_{n}+1=\frac{4}{9}(\underbrace{99\dots9}_{n})\cdot 10^n+\frac{8}{9}(\underbrace{99\dots9}_{n})+1=$$

$$=\frac{4}{9}(10^n-1)\cdot 10^n+\frac{8}{9}(10^n-1)+1=\frac{4}{9}\cdot 10^{2n}-\frac{4}{9}\cdot 10^n-\frac{8}{9}+1=\frac{4}{9}\cdot 10^{2n}+\frac{4}{9}\cdot 10^n+\frac{1}{9}=$$

$$=\frac{1}{9}((2010^n)^2+2(2\cdot 10^n)+1)=\frac{1}{9}\cdot(2\cdot 10^n+1)^2=\left(\frac{2\cdot 10^n+1}{3}\right)^2=\left(\frac{200\dots01}{3}\right)^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{D}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm 666\dots67}{2}$$

$$x_1=\underbrace{33\dots34}_{n}$$

$$x_2=-\underbrace{33\dots34}_{n}$$

$$x\in\left[-\underbrace{33\dots34}_{n};\underbrace{33\dots34}_{n}\right]$$

$$N=\underbrace{66\dots68}_{n}$$

N— число целых решений.

$$\underbrace{66\dots68}_{n}\leq\underbrace{1993\cdot 2017}_{4019781}$$

т.е. $n=6$.

Ответ: 6

▷ **4.** Если поверхность треугольной пирамиды разрезать вдоль ребер, выходящих из вершины, то ее развертка на плоскости основания является квадратом. Найти отношение поверхностей сфер, вписанной и описанной около этой пирамиды.

Ответ: 24:1

▷ **5.** Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$x_1^4+x_2^4+\dots+x_{13}^4=2017?$$

Решение:

Если x— четно, то $x^4\equiv 0(\mod 16)$, а если x— нечетно, то $x^4\equiv 1(\mod 16)$. Так как $2017=16\cdot 126+1(\mod 16)$, то ровно одно x_k — нечетно, остальные четны.

1) Пусть это нечетно число равно 1, для определенности возьмем $x_{13}=1$, остальные — четные.

$$(2y_1)^4+(2y_2)^4+\dots+(2y_{12})^+1=1+16\cdot 126$$

$$y_1^4+y_2^4+\dots+y_{12}^4=126$$

Имеем: $126=7\cdot 16+14$. Слева сумма остатков при делении на 16 не превышает 12, следовательно решений нет.

2) Пусть $x_{13}=3$, тогда придем к уравнению

$$y_1^4+y_2^4+\dots+y_{12}^4=121=7\cdot 16+9$$

Значит, ровно 9 y_k нечетны, а 3 — четны. Четные y_k не могут быть больше 2, так как $4^4=256$. Значит, они равны по 2:

$$y_1^4+\dots+y_9^4+2^4+2^4+2^4=7\cdot 16+9$$

$$y_1^4+\dots+y_9^4=73$$

Нечетные y_k не могут быть больше 1, так как $3^4=81>73$, значит, все они равны 1. Но $9\cdot 1<73$, следовательно решений нет.

2) Пусть $x_{13}=5$, тогда:

$$y_1^4+y_2^4+\dots+y_{12}^4=87=16\cdot 5+7$$

Значит, ровно 7 нечетных, 5 — четных, следовательно $(y_k)=(1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2)$.
$(x_k)=(2,2,2,2,2,2,2,4,4,4,4,4,5)$ и перестановки этих чисел.

Ответ: $\frac{13!}{7!\cdot 5!}$

▷ **6.** В трех неодинаковых банках с водой растворили по килограммовой пачке сахара, получив 40%, 60%, $q\%$ растворы сахара. После этого смешали все три раствора сахара в один объем и получили $p\%$ раствор сахара. Скольки процентный раствор сахара был в третьей банке, если $23 \le p \le 25$ и q — целое число?

Решение: Пусть в первой банке было x л воды, тогда $\frac{1}{x+1} = 0,4$, откуда $x = \frac{3}{2}$. Пусть во второй банке было y л воды, тогда $\frac{1}{y+1} = 0,6$, откуда $y = \frac{2}{3}$. Пусть в третьей банке было z л воды, тогда $\frac{1}{z+1} = \frac{q}{100}$, $z = \frac{100}{q} - 1$. После смешивания получим $\frac{3}{x+y+z+3} = \frac{p}{100}$

$$0,23 \le \frac{3}{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}+\frac{100}{q}-1+3} \le 0,25$$

$$0,23 \le \frac{18}{25+6\frac{100}{q}} \le 0,25$$

Решая оба неравенства, получаем

$$\frac{23 \cdot 24}{49} \le q \le \frac{24 \cdot 25}{49}$$

Единственное целое число, удовлетворяющее этим условиям — 12.

Ответ: 12%

▷ **7.** Найдите наибольшее значение величины $\sqrt{x_1-1}+\sqrt{x_2-1}+\dots+\sqrt{x_{2017}-1}$, если $x_1, x_2, \dots, x_{2017} \ge 1$ и $x_1 + x_2 + \dots + x_{2017} = 4034$.

Решение: $\sqrt{x-1} \ge \frac{x}{2}$ $\forall x$, равенство при $x=2$, следовательно $\sqrt{x_1-1} + \sqrt{x_2-1} + \sqrt{x_3-1} + \dots + \sqrt{x_{2017}-1} \ge \frac{1}{2}(x_1 + \dots + x_{2017}) = \frac{4034}{2} = 2017$.

Ответ: 2017

▷ **8.** Дан квадратный стол размера 20×20, на котором проведена диагональ. В одном из рассматриваемых треугольников дана окружность радиуса 1, центр которой удален от границ этого треугольника не менее чем на 3. В другом треугольнике случайным образом, не видя другой половины квадрата, проводится такая же окружность. Доказать, что вероятность того, что существует квадрат, два противоположных угла которого лежат на окружностях, а два других на общей границе этих треугольников не превосходит 10%.

Ответ: Чтобы такой квадрат существовал, окружности должны иметь хотя бы одну общую точку, значит, если отобразить окружность в противоположную часть стола, то центр второй окружности должен находиться на окружности R $= 2$, когда S благоприятных центров для второй окружности 4π, а вся $S = 8 \cdot 18$.

▷ **9.** При каком a уравнение

$$\max_{x \le t \le x+1}(t^3 - 4t) = a$$

имеет ровно два решения или больше трех решений?

Решение: Рассмотрим функцию $y = t^3 - 4t$. Производная $y\prime = 3t^2 - 4$ обращается в ноль при $t = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \approx \pm 1,17$. Максимум — в точке $x_0 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Далее, рассмотрим уравнение $y(x+1) = y(x)$, $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 4x - 4 = x^3 - 4x$, $3x^2 + 3x - 3 = 0$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Вычислим значения y:

$y\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{16}{3\sqrt{3}}$

$y\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{5}$

$y\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = -\sqrt{5}$

Обозначим $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Тогда

$$y = \max_{x \le t \le x+1}(t^3 - 4t) = \left[\begin{array}{ll} y(x+1), & x \le x_0 - 1 \\ y(x_0), & x_0 - 1 \le x \le x_0 \\ y(x), & x_0 \le x \le x_2 \\ y(x+1), & x \ge x_2 \end{array}\right.$$

Ответ: $-\sqrt{5}, \frac{16}{9}\sqrt{3}$

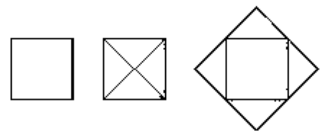
▷ **10.** Способом разрезания составьте квадрат из:

а) двух равных квадратов;

б) трех равных квадратов.

Ответ:

а)



б)