6 класс. Решение задач.

▷ **1.** Числитель изнаменатель дроби — натуральные числа. Числитель увеличили на 1, а знаменатель на 10. Может ли при этом увеличиться дробь? Если да,то сколько существует таких несократимых дробей со знаменателем 2016.

Ответ : 58.

▷ **2.** Лимонадопровод последовательно проходит через города К, М и Ч в страну Лимонию. Коротышки, жители города К, несанкционированно забирают 10 % сладкого продукта, Малышки из города М - 20%, а Чебурашки из города Ч - 30 %. На сколько процентов производителю нужно увеличить производство, чтобы страна Лимония не испытывала недостатка в этом сладком, хотя и очень неполезном продукте (завод работает только на экспорт в страну Лимонию).

Решение.

$V_0 = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 \cdot V_1$ — объем продукта, который получает страна после несанкционированных действий жителей трех городов, где V_1 — исходный объем.

$V_1 = \frac{V_0}{\frac{9}{10}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{10}}$; $V_0 = \frac{500}{252}V_1 = 1\frac{248}{252}V_1 = 1\frac{62}{63}V_1$;

Получаем,что на $\frac{62}{63} \cdot 100\% \approx 98,4\%$ нужно увеличить производство.

▷ **3.** Часы пробили полночь. Какой угол между часовой и минутной стрелкой будет через 2016 минут?

Решение.

2016 мин.$=$ 33 ч. 36 мин.$=$ 24 ч. $+$ 9 ч. $+$ 36 мин.$=$ 24 ч. $+$ 9 ч. $+\frac{3}{5}$ч.$=$
$=$ 24 ч. $+$ $\frac{48}{5}$ ч.

$\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$ — угол,который проходит часовая стрелка за час.

$\frac{48}{5} \cdot 30^\circ = 48^\circ \cdot 6 = 288^\circ$ — угол через 9 ч. 36 мин.

$\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$ — угол между стрелками через 1 минуту.

$36 \cdot 6^\circ = 216^\circ$ — угол между часовой и минутной стрелкой через 36 мин. Искомый угол $\alpha = 288^\circ - 216^\circ = 72^\circ$.

Ответ: 72°.

▷ **4.** При каких n существует ровно 2016 отрезков, концы которых расположены в целых точках числовой прямой, принадлежащих отрезку $[0, n]$?

Решение.

$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{1+n}{2}n = 32 \cdot 63$, т.е. $n = 63$.

Ответ : 63.

▷ **5.** Корова и лошадь съедают копну сена за 2 суток. Лощадь и овца съедают копну сена за 3 суток. Корова и овца съедают копну сена за 4 суток. Сколько сена надо приготовить на одни сутки для стада из 20 коров, 16 овец и 4 лошадей?

Решение.

Пусть V_1 — количество сена, которое съедает корова за сутки, V_2 — лошадь, а V_3— овца.

$$\begin{cases} V_1 + V_2 = \frac{1}{2}; \\ V_1 + V_3 = \frac{1}{4}; \\ V_2 + V_3 = \frac{1}{3}; \end{cases}$$

Получаем, что

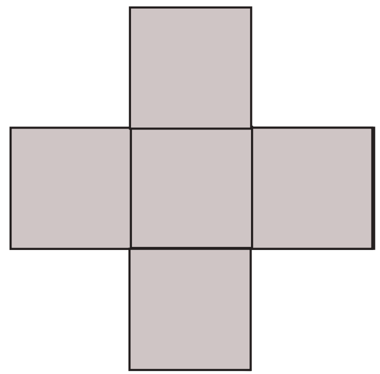
$$\begin{cases} V_2 = \frac{7}{24}; \\ V_3 = \frac{1}{24}; \\ V_1 = \frac{5}{24}; \end{cases}$$

В итоге,

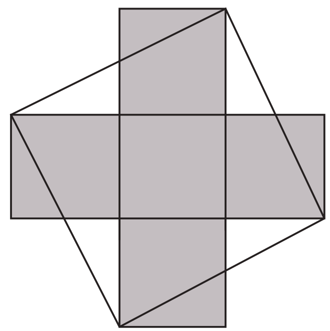
$$26V_3 + 20V_1 + 4V_2 = \frac{16}{24} + \frac{100}{24} + \frac{28}{24} = \frac{144}{24} = 6$$

Ответ : 6.

▷ **6.** Крест составлен из пяти равных квадратов. Разрежьте его на такие части, из которых можно (без дыр и перекрытий) составить квадрат.



Решение.



▷ **7.** Расшифровать равенство

$$tg \times \mathrm{tg} = \mathrm{ctg}$$

Решение.

Ответ : $25 \times 25 = 625$.

▷ **8.** На интеллектуальной викторине было предложено несколько легких, средних и трудных вопросов. За правильный ответ на легкий вопрос участник получал 4 балла, на средний — 5 баллов, а на трудный — 6 баллов. За неправильный ответ на легкий вопрос у участника вычиталось 2 балла. На неправильный ответ на средний вопрос — 1 балл, а за неправильный ответ на трудный вопрос баллы не вычитались. Петя ответил правильно на 10 вопросов и получил на 30 баллов меньше, чем максимально возможное число баллов. Сколько всего вопросов было предложено на викторине?

Решение.

Пусть на викторине было x легких, y средних и z трудных вопросов. Пусть Петя ответил на a легких, b средних и c сложных вопросов. Тогда он неправильно ответил на $x-a$ легких вопросов и $y-b$ средних вопросов. Поэтому он получил $4a-2(x-a)+5b-(y-b)+6c = 6(a+b+c)-2x-y$ баллов. Согласно условию $6(a+b+c)-2x-y = 4x+5y+6z-30$ или $30+6\cdot 10 = 6(x+y+z)$ или $x+y+z=15$.

▷ **9.** Можно ли к числу 999 приписать справа еще четыре цифры так, чтобы полученное семизначное число стало квадратом целого числа?

Ответ : $9998244 = 3162^2$, $9997921 = 3161^2$

▷ **10.** На какое наименьшее число частей надо разрезать круглый торт, чтобы его можно было бы раздать поровну как троим, четверым, таки пятерым?

Решение.

10 кусков :

$$\frac{1}{5};\frac{1}{5};\frac{1}{5};\frac{1}{12};\frac{1}{12};\frac{1}{20};\frac{1}{20};\frac{1}{20};\frac{1}{20};\frac{1}{30}$$

.

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{30}=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$$

1) n = 5

$$\frac{1}{5};\frac{1}{5};\frac{1}{5};\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}=\frac{5+2+5}{60};4\cdot\frac{1}{20}=\frac{1}{5}.$$

2) n = 4

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{12+3}{60}=\frac{1}{4};$$
$$\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{5+5+3+2}{60}=\frac{1}{4};$$

3) n = 3

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{1}{3};$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{1}{3}.$$

7 класс. Решение задач.

$\triangleright$ **1.** Числитель и знаменатель дроби — натуральные числа. Числитель увеличили на 1, а знаменатель на 10. Может ли при этом увеличиться дробь? Если да, то сколько существует таких несократимых дробей со знаменателем 2016.

Решение.

$\triangleright$ **2.** Часы пробили ровно 3 часа. Какой угол между часовой и минутной стрелкой будет через 20 часов 16 минут?

Ответ :$143°$.

$\triangleright$ **3.** В координатной плоскости дан квадрат $n \times n$ с вершинами в целочисленных точках, стороны параллельны осям координат. Оказалось,что можно составить 2016^2 различных прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат, а вершины — целочисленные точки, принадлежащие этому квадрату. Чему равно n?

Ответ: 63

$\triangleright$ **4.** Если от некоторого двузначного числа отнять 2, то результат нацело разделится на 3, а если отнять не 2, а 3, то разделится не на 3, а на 2. Если к числу прибавить 4, то результат разделится нацело на 5, а если от него отнять 5, то разделится на 4. Более того, если от этого числа отнять 5, то разделится нацело на 6, а если же от нашего числа отнять 6, то разделится на 5. И это еще не все : если к этому замечательному числу прибавить 7, то результат разделится на 8, а если прибавить 8, то разделится на 7. Что же это за число?

Ответ : 41.

$\triangleright$ **5.** На какое наименьшее число частей надо разрезать торт, чтобы его можно было раздать поровну как троим, так и четверым?

Предупреждение. Части не обязательно одинаковые. Ответ 12 (=НОК[3,4]) неверен.

Указание. Если торт разрезан на 5 частей и эти части розданы поровну троим, то хотя бы одному из троих досталась всего лишь одна часть. В таком случае эта часть составляет $\frac{1}{3}$ торта. Поскольку $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, то в рассматриваемом случае торт нельзя поровну раздать четверым.

Решение.

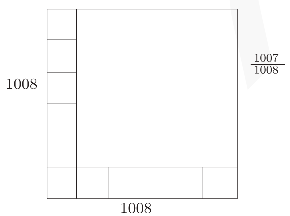
Ответ : 6 частей : $\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}$.

$\triangleright$ **6.** Можно ли квадрат разрезать: а) на 2016 квадратов; б) на 2012 квадратов.

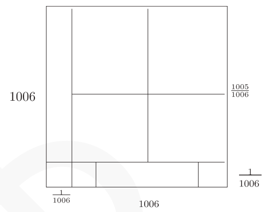
Решение.

Можно.

а) $2016 = 1 + 2015 = 1 + (2 \cdot 1008 - 1)$.



б) $2012 = 1 + 2011 = 1 + (2 \cdot 1006 - 1)$.



$\triangleright$ **7.** На интеллектуальной викторине было предложено несколько легких, средних и трудных вопросов, всех из названных поровну. За правильный ответ на легкий вопрос участник получал 3 балла, на средний — 4 баллов, а на трудный — 6 баллов. За неправильный ответ на легкий вопрос у участника вычиталось 3 балла. На неправильный ответ на средний вопрос — 2 балл, а за неправильный ответ на трудный вопрос баллы не вычитались. Вася ответил более, чем на половину вопросов правильно и получил 30 баллов.

На сколько всего вопросов Вася ответил правильно, и сколько всего вопросов было предложено на викторине?

Решение.

Пусть на викторине было n легких, n средних и n трудных вопросов. Пусть Вася ответил на a легких, b средних и c трудныъ вопросов. Поэтому он получил $3a - 3(n-a) + 4b - 2(n-b) + 6c = 6(a+b+c) - 5n$ баллов. Согласно условию $6(a+b+c) - 5n = 30$, или $6(a+b+c) = 30 + 5n$. Из полученного равенства получаем, что $n \vdots 6$. Тогда, очевидно, $n \geq 6$. При $n = 6$ общее число вопросов на викторине $3n = 18$. Из них Вася ответил правильно на

$$a + b + c = (5 \cdot 6 + 30) : 6 = 10$$

вопросов, что составляет более половины от 18. Легко проверить, что все условия выполняются, например, при $a = 5, b = 3, c = 2$.

Докажем, что при $n > 6$ не удовлетворяет условию задачи. Действительно, при $n > 6$ и, значит, с учетом делимости на 6, при $n \geq 12$, отношение числа правильно данных Васей ответов к числу вопросов равно

$$\frac{a+b+c}{3n} = \frac{5+5n:6}{3n} = \frac{5}{3n} + \frac{5}{18} < [n \geq 12] < \frac{5}{36} + \frac{5}{18} = \frac{15}{36} < \frac{1}{2},$$

что противоречит условию задачи о том, что Вася правильно ответил более чем на половину вопросов. Таким образом, Вася правильно ответил на 10 вопросов из 18, предложенных на викторине.

$\triangleright$ **8.** Придумайте 2016 натуральных чисел. укоторых и сумма, и произведение равны.

Решение.

$\underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{2014} \cdot 6 \cdot 404 = 2424.$

$2014 + 6 + 404 = 2424.$

Ответ : $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{2014}, 6, 404.$

▷ **9.** Сумму двух дробей

$$\frac{2017}{99999} + \frac{2015}{9999}$$

обратили в десятичную дробь. Какая цифра стоит на 2016 месте после запятой?

Ответ : 5.

▷ **10.** Можно ли к числу 9999 приписать справа еще четыре цифры так, чтобы полученное восьмизначное число стало квадратом целого числа?

Решение.

$9999^2 = 99980001.$

Ответ : нет.

8 класс. Решение задач.

▷ **1.** Однажды первый вторник месяца я провел в Самаре, а первый вторник после первого понедельника — в Белгороде. В следующем месяце я первый вторник провел в Саранске, а первый вторник после первого понедельника — в Тольятти. Какого числа и какого месяца я был в каждом из городов?

Решение.

Получается, что в Самаре 1 числа месяца, в Белгороде — 8 числа, следовательно, чтобы в следующем месяце 1 число было вторником, надо чтобы прошло ровно по семь дней недели 4 раза, а значит первый месяц был февралем простого, не високосного года. В итоге, 1 февраля — Самара, 8 февраля — Белгород, 1 марта — Саранск, 8 марта — Тольятти.

▷ **2.** Найдите четырехзначное число, являющееся полным квадратом, у которого первые две цифры одинаковы и последние две цифры одинаковы.

Ответ : 7744.

▷ **3.** С поезда сошли два пассажира и направились в один и тот же пункт. Первый половину времени шел со скоростью a, а вторую половину со скоростью b. Второй шел первую половину пути со скоростью a, а вторую со скоростью b. Который из них скорее пришел к месту назначения?

Решение.

Пусть первый пассажир пришел в конечный пункт через t_1 часов, а второй через t_2 часов. Расстояние до места назначения обозначим через d. Тогда первый пассажир за первую половину времени $\frac{t_1}{2}$ прошел расстояние $\frac{at_1}{2}$, за вторую $\frac{bt_1}{2}$. Отсюда :

$$\frac{at_1}{2} + \frac{bt_1}{2} = d, t_1 = \frac{2d}{a+b}.$$

Вторую половину расстояния, т.е. $\frac{d}{2}$, шел со скоростью a. вторую половину со скоростью b. Отсюда:

$$t_2 = \frac{d}{2a} + \frac{d}{2b} = \frac{d(a+b)}{2b}.$$

Возьмем разность

$$t_2 - t_1 = \frac{d(a+b)}{2ab} - \frac{2d}{a+b} = \frac{d((a+b)^2 - 4ab)}{2ab(a+b)} = \frac{d(a-b)^2}{2ab(a+b)}.$$

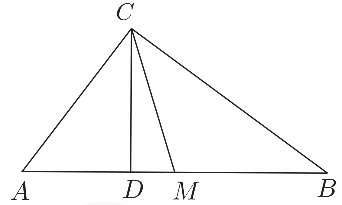
Так как все множители в правой части положительны, то $t_2 - t_1 > 0$, т. е. $t_2 > t_1$ и, следовательно, первый пришел раньше второго (при $a = b$ будет $t_1 = t_2$).

▷ **4.** По высоте, опущенной из вершины прямого угла и разности острых углов построить прямоугольный треугольник.

Решение.

Пусть треугольник ABC — искомый. Проведем высоту CD и медиану CM. Известно, что

$$\angle DCM = \angle CAB - \angle CBA.$$



Известно также, что $CM = \frac{1}{2}AB$.

Таким образом, построив треугольник CDM, можно будет легко построить и треугольник ABC.

▷ **5.** Пусть $\mathrm{S}(n)$ — сумма цифр натурального числа n. Найдите наименьшее n такое, что

$$\mathrm{S}(n) + \mathrm{S}(n+1) = 2016.$$

Ответ : $5\underbrace{9\ldots9}_{110}89$

▷ **6.** Вершины куба находятся в целочисленных точках, а ребра куба параллельны осям координат. Оказалось, что можно указать 2016^3 различных прямоугольных параллелепипедов, грани которых параллельны граням куба и находятся целочисленных точках. Чему равно ребро куба?

Решение.

$\underbrace{0\ldots n}_{n+1}$;

$(\frac{(n+1)n}{2})^3 = 2016^3$;

$63 \cdot 62 = \frac{63 \cdot 64}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$, отсюда $n = 63$.

▷ **7.** Вычислить

$$\sqrt[3]{N},$$

где

$$N = 10\ldots030\ldots030\ldots01,$$

где в каждой группе 2016 нулей.

Решение.

Это число имеет $3 \cdot 2016 + 4$ цифры и может быть записано так

$$N = 1 \cdot 10^{3 \cdot 2017} + 3 \cdot 10^{2 \cdot 2017} + 3 \cdot 10^{2017} + 1 = (10^{2017} + 1)^3 = 1\underbrace{00\ldots0}_{2016}1$$

$$\sqrt[3]{N} = 10^{2017} + 1.$$

▷ **8.** Числитель дроби увеличили на 26%. На сколько процентов надо уменьшить знаменатель, чтобы дробь возросла в 2016 раз?

Решение.

$\frac{m}{n}$ — исходная дробь.

$$\frac{m\left(1+\frac{p}{100}\right)}{n\left(1-\frac{q}{100}\right)} = 2016\frac{m}{n};$$

$$1+\frac{p}{100} = 2016\left(1-\frac{q}{100}\right);$$

$$100+p = 2016-100-q\cdot 2016;$$

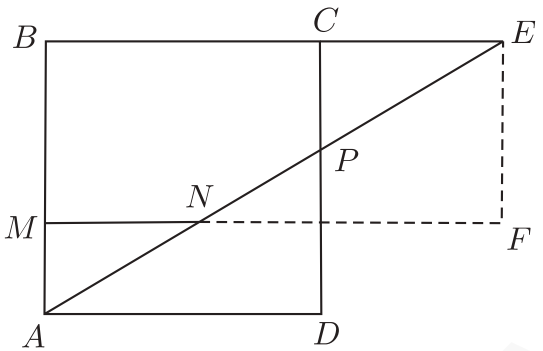
$$q = \frac{2015}{2016}\cdot 100 - \frac{p}{2016};$$

$p = 26$ по условию, т.е.

$$q = \frac{201474}{2016} = \left(100-\frac{1}{16}\right)\% = 99,9375\%.$$

$\triangleright$ **9.** Квадрат со стороной a превратить в прямоугольник, разрезая его на наименьшее число частей притом так, чтобы стороны прямоугольника относились как $3:1$

Решение.



Пусть сторона квадрата равна a, меньшая сторона прямоугольника x.

Тогда :

$$3x^2 = a^2,$$

откуда:

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Большая сторона

$$3x = a\sqrt{3} = a\operatorname{tg}60^\circ.$$

Строим $\angle BAN = 60^\circ$ и продолжаем AN до пересечения с продолжением BC в точке E. Из треугольника ABE имеем:

$$BE = AB\cdot\operatorname{tg}60^\circ = a\operatorname{tg}60^\circ = 3x,$$

т. е. BE — большая сторона искомого прямоугольника. От вершины B по BA отложим меньшую сторону $BM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ и проведем $MN \parallel BC$ до пересечения с AE.

Тогда имеем:

$$CE = BE - BC = a\sqrt{3} - a = a(\sqrt{3}-1).$$

С другой стороны, из подобия треугольников AMN и ABE заключаем :

$$\frac{MN}{BE} = \frac{AM}{AB}.$$

Отсюда :

$$MN = \frac{AM\cdot BE}{AB} = \frac{\left(a-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)\cdot a\sqrt{3}}{a} = a(\sqrt{3}-1).$$

Получаем, что

$$CE = MN,$$

значит, $\Delta AMN = \Delta PCE$.

Так же легко показать, что

$$\Delta ADP = \Delta NFE.$$

Итак, для превращения квадрата $ABCD$ в требуемый прямоугольник достаточно разбить его на три части : $MBCPN$, AMN и APD.

$\triangleright$ **10.** Разгадайте ребус

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & * & * & 2 \\
\times & & & & \\
 & & & * & 2 \\
\hline
 & & & & \\
 & * & 0 & 0 & * \\
* & * & * & * & \\
\hline
* & * & * & 1 & 1
\end{array}$$

Решение.

Троичная система счисления

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 1 & 1 & 2 \\
\times & & & & \\
 & & & 2 & 2 \\
\hline
 & & & & \\
 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

Таблица умножения

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

9 класс. Решение задач.

$\triangleright$ **1.** Назовем хромой ладьей фигуру, которая бьет как обычная ладья, но не далее, чем на 2 клетки. Какое наибольшее число хромых ладей можно поставить на шахматной доске 8×8?

Решение.

22. В каждой горизонтали может быть не более трех хромых ладей, на соседней горизонтали тоже не более 3-х, а на третьей — не более двух, т.е. $8-6=2$. Получаем не более : $3+3+2+3+3+2+3+3=22$ или $24-2=22$ (две горизонтали не по 3, а по 2).

$\triangleright$ **2.** При каком наименьшем n квадрат можно разделить на n треугольников, площади которых относятся как $1:3:5:\ldots:(2n-1)$?

Решение.

При $n=1$ и $n=2$ — нет.

Если $n=3$, то площадь самого большого треугольника больше половины площади квадрата: $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$, что невозможно.

При $n=4$ — можно,так как $1+7=3+5$.

$\triangleright$ **3.** Даны 2016 натуральных чисел $a_k = k!$, $k=\overline{1,2016}$. Можно ли из этой последовательности выбрать 2015 членов, произведение которых будет точным квадратом?

Решение.

$S=(a_1 \cdot a_2)(a_3 \cdot a_4)\ldots(a_{2015} \cdot a_{2016}) = (1!)^2 \cdot 2 \cdot (3!)^2 \ldots (2015!)^2 \cdot 2016.$

Так как $a_{k+1} = a_k(k+1)$, то

$S=(1!)^2 \cdot (3!)^2 \ldots (2015!)^2 \cdot (2 \cdot 4 \ldots 2016) = (1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot \ldots (2015!)^2 \cdot 2^{1008} \cdot 1 \cdot 2 \ldots 1008 = (2^{504} \cdot 1! \cdot 3! \ldots 2015!)^2 \cdot 1008!$, т. е.

$a_1 \cdot a_2 \ldots a_{1007} \cdot a_{1009} \ldots a_{2016} = N^2$

$\triangleright$ **4.** Найти все простые p и целые x такие,что

$x(x+1)(x^4-x+1) = 13p-1.$

Решение.

Перепишем в виде

$$(x^2+x)(x^4-x+1)+1=13p;$$

$$x^6+x^5-x^3-x^2+x^2+x+1=13p;$$

$$(x^6+x^5+x^4)-(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1)=13p;$$

$$(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)=13p;$$

Возможны случаи:

1)

$$\begin{cases} x^2+x+1=1; \\ x^4-x^2+1=13p \end{cases}$$

$x^2+x=0$, т.е. $x_1=0$, $x_2=-1$, следовательно, $13p=1, p \notin Z$

2)

$$\begin{cases} x^2+x+1=13; \\ x^4-x^2+1=p \end{cases}$$

$x^2+x-12=0$, отсюда $x_1=3$, $x_2=4$ и $p_1=73$, $p_2=241$.

3)

$$\begin{cases} x^2+x+1=1; \\ x^4-x^2+1=13p \end{cases}$$

$x^4-x^2=0$, т. е. $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$, получаем, что $13p_1=1$, $13p_2=3$, $13p_3=1$, $p_1,p_2,p_3 \notin Z$

3)

$$\begin{cases} x^2+x+1=13; \\ x^4-x^2+1=p \end{cases}$$

$x^2=4$, получаем $x_1=2$, $x_2=-2$,т. е. $p_1=7$, $p_2=3$.

Итак, при $x_1=-2$ $p_1=3$, $x_2=2$ $p_2=7$, $x_3=3$ $p_3=73$, $x_4=-4$ $p_4=241$.

Ответ: $x_1=-2$ $p_1=3$, $x_2=2$ $p_2=7$, $x_3=3$ $p_3=73$, $x_4=-4$ $p_4=241$.

$\triangleright$ **5.** Пусть $f(x)=ax^2+bx+c, c \neq 0$. Известно, что уравнение $f(x)=2016x+1$ не имеет действительных корней.

Доказать, что уравнение

$$f(f(x))=2016^2x+2017.$$

также не имеет корней.

Решение.

1) a >0, тогда

$$f(x) > 2016x+1, \forall x,$$

в частности

$$f(f(x)) > 2016f(x)+1 > 2016(2016x+1)+1 = 2016^2x+2017, \forall x.$$

2) a <0, тогда

$$f(x) < 2016x+1,$$

следовательно,

$$f(f(x)) < 2016f(x)+1 < 2016(2016x+1)+1 = 2016^2x+2017, \forall x$$

$\triangleright$ **6.** В треугольнике ABC точка M — точка пересечения медианы AA_1 и биссектрисы BB_1, а $\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1}$. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный.

Решение.

Пусть $\frac{AM}{MA_1} = \frac{BM}{MB_1} = k$.

Положим $B_1M=d$, $MA_1=e$, $AB=c$, $BC=a$.

Тогда по формулам длин биссектрис BB_1 в треугольнике ABC и BM в треугольнике ABA_1:

$$\begin{cases} (k+1)d = \frac{2cd}{c+a}\cos\frac{B}{2}; \\ kd = \frac{2c\frac{a}{2}}{c+\frac{a}{2}}\cos\frac{B}{2}. \end{cases}$$

$$\frac{k+1}{k}=\frac{2}{c+a}(c+\frac{a}{2}),\frac{a}{c}=k-1.$$

По свойству биссектрисы в треугольнике AA_1B

$$\frac{ke}{e}=\frac{c}{\frac{a}{2}}=\frac{2c}{a}=\frac{2c}{c(k-1)},$$

$k=\frac{2}{k-1}$,
$k^2-k-2=0$, $k=2$.
Значит, $a=c(2-1)=c$. Что и требовалось доказать.

$\triangleright$ **7.** На какое наибольшее число выпуклых частей могут разрезать плоскость продолжения сторон выпуклого n-угольника?

Решение.

Воспользуемся математической индукцией. Пусть верно при $n-1$. Шаг индукции: n. n-я прямая может пересечься со всеми $n-1$ прямыми (продолжениями сторон), так же добавится еще и n кусков, следовательно,

$$\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n^2-n+2n}{2}=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$$

$\triangleright$ **8.** У некоторой арифметической прогрессии сумма S_n удовлетворяет условию $S_{1007}=S_{1009}$. Чему равна S_{2016}?

Решение.

$$S_{1007}=a_1+\dots+a_{1007};$$

$$S_{1009}=a_1+\dots+a_{1009};$$

$$a_{1008}+a_{1009}=2a_1+2015d=0;$$

$$S_{2016}=\frac{a_1+a_{2016}}{2}\cdot 2016=\frac{2a_1+2015d}{2}\cdot 2016=0.$$

$\triangleright$ **9.** Дана возрастающая последовательность чисел, не делящихся ни на одно из чисел 2, 3, 5, 7. Каким по счету будет число 3377, если первый член ряда равен 11?

Решение.

$11,13,17,\dots,3377$
$U_n=3n+1+\frac{1-(-1)^n}{2}$
$3377=3n+1+\frac{1-(-1)^n}{2}$
$U_{1123}=3377$
Выпишем члены последовательности, кратные 5
$5\cdot 5,5\cdot 7,5\cdot 11,5\cdot 13,\dots,5\cdot 673.$
Их $673=3n+1+\frac{1-(-1)^n}{2}$, $n=226$.
$5=3n+1+\frac{1-(-1)^n}{2}$, $n=1$.
Всего их будет 224, так как

$$673=3n+1+\frac{1-(-1)^n}{2},n=224.$$

Следовательно, в данной последовательность 889 чисел, не кратных 30.

Выпишем числа, кратные 7 :

$$7\cdot 5,7\cdot 7,7\cdot 11,7\cdot 13,\dots,7\cdot 481.$$

Таких чисел будет 160. Но среди них есть и числа, кратные 5 :

$$5,5\cdot 5,5\cdot 7,\dots,5\cdot 95.$$

Этих чисел 32.

Итак, число 3377 имеет номер, равный

$$899-160+32=771.$$

$\triangleright$ **10.** В племени древних шумеров считалось, что параллелепипед «красивый» , если из его трех ребер, которые измерялись целыми числами, можно сложить прямоугольный треугольник. Какой наименьший объем кратный 2016 можно было бы отмерить с помощью «красивого» параллелепипеда?

Решение.

Пусть a,b,c — стороны «красивого» параллелепипеда, тогда $a^2+b^2=c^2$ и произведение измерений параллелепипеда должно делиться на 60.

При делении a,b,c на 5 остаток равен ±1, т.е. $a,b,c=3m\pm1\Rightarrow a^2+b^2\neq c^2$;

При делении a,b,c на 3 остаток равен ±1, т.е. $a,b,c=5m\pm21\Rightarrow a^2+b^2=$ $=5N+\binom{2}{5}$; $c^2=5N+\binom{1}{4}$, т.е. $abc:60$.

$2016=4\cdot 8\cdot 63=12\cdot 8\cdot 21$;

$5V=60\cdot 168$, т.е. наименьший объем — $60\cdot 168$.

10 класс. Решение задач.

▷ **1.** Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = 2^{\sin x} + 2^{\cos x}.$$

Решение.

В силу неравенства $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ имеем

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geqslant 2\sqrt{2^{\sin x} 2^{\cos x}} = 2\sqrt{2^{\sin x + \cos x}} =$$
$$= 2\sqrt{2^{\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x)}} = 2\sqrt{2^{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}} \geq 2\sqrt{2^{\sqrt{2}(-1)}} =$$
$$= 2 \cdot 2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Достигается при

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = -1;$$

$$x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n;$$

$$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ : $2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

▷ **2.** У Сережи больше 50 черных и белых шаров, причем белых больше, чем черных. Оказалось,что он может выложить шары 2016 способами в ряд так, что никакие два черных не лежали рядом. Сколько шаров было у Сергея?

Решение.

Пусть p — количество белых, а q — черных. $N = C_{p+1}^{q}$ — количество мест, на которые можно выложить черные шары.

$p > q$;

$p + q > 2q$;

$2p > p + q > 50$;

$$C_{n+1}^{m} = \frac{(n+1)!}{m!(m-n+1)!};$$

$$C_{n}^{m} = \frac{n!}{m!(m-n)!};$$

$$\frac{(n+1)!}{m!(m-n+1)!} > \frac{n!}{m!(m-n)!};$$

$n + 1 > m - n + 1$;

$2n > m$;

$$C_{n}^{m+1} = \frac{n!}{(m+1)!(m-n+1)!};$$

$$C_{n}^{m} = \frac{n!}{m!(m-n)!}$$

$$\frac{n!}{(m+1)!(m-n+1)!} > \frac{n!}{m!(m-n)!};$$

$m - n > m$, т. е. $2m > n$;

$$C_N^2 = \frac{N(N+1)}{2} = \frac{64 \cdot 63}{2};$$

$$\frac{p(p+1)}{2} = 2016 = 32 \cdot 63;$$

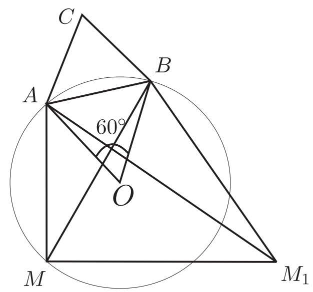
$p(p+1) = 64 \cdot 63$;

Получаем, что $p = 63$; $q = 62$, всего $62 + 63 = 125$ шаров.

Ответ : 125 шаров.

▷ **3.** Дан равносторонний треугольник ABC. Найти геометрическое место точек M, для которых $MC^2 = MA^2 + MB^2$.

Решение.



Пусть точка M взята в плоскости треугольника ABC так, что

$$MC^2 = MA^2 + MD^2$$

На отрезке MB построим равносторонний треугольник BMM_1.

Треугольник MBC равен треугольника M_1BA так как $BC = BA$, $BM = BM_1$ и $\angle MBC = \angle M_1BA$. Следовательно. $M_1A = MC$. Так как $MM_1 = MB$, то $MC^2 = MA^2 + MB^2 = MA^2 + MM_1^2$ и треугольник AMM_1 — прямоугольный. Отсюда следует, что $\angle AMB = 30°$.

Итак, если точка обладает указанным в условии задачи свойством и находится вне треугольника ABC, то она лежит на дуге сегмента, опирающегося на сторону AB и вмещающего угол в $30°$.

Совершенно таким же путем доказывается, что если точка M лежит внутри треугольника и обладает указанным свойством, то она лежит на дуге сегмента, опирающегося на сторону AB и имеющего угол в $150°$.

Допустим теперь, что точка M принадлежит одной из упомянутых дуг, например внешней по отношению к треугольнику ABC. Надо доказать, что

$$MC^2 = MA^2 + MD^2$$

Произведя то же построение, что и выше, мы получим треугольник AMM_1б у которого угол AMM_1 — прямой, ибо

$$\angle AMM_1 = \angle AMB + \angle BMM_1 = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

Так как

$$MM_1 = MB$$

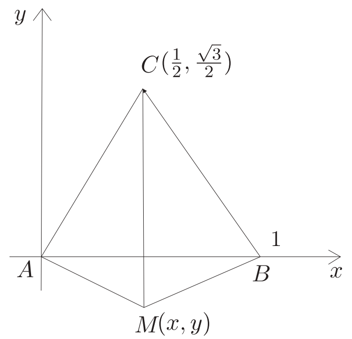
и

$$AM_1 = CM,$$

то

$$CM = AM_1^2 = AM + MM_1^2 = AM^2 + MB^2.$$

Итак, искомым геометрическим местом является окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC, причем ее центром служит точка , симметричная вершине относительно прямой AB (концы также принадлежат искомому геометрическом месту).



Совсем просто задача решается с помощью метода координат. Примем вершину A за начало прямоугольной системы координат, а вершину B — за единичную точку оси OX. направление оси OY выберем так, чтобы вершина C находилась в первом квадранте. Тогда ее координатами будут служить числа $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Пусть точка $M(x, y)$ j,обладает указанным в задаче свойством.

$$MC = \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2},$$

$MA = \sqrt{x^2 + y^2}, MB = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$ и $MC^3 = MA^2 + MB^2$.

Следовательно, $x^2 + y^3 - x + \sqrt{3} \cdot y + \frac{1}{4} = 0$, или $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$.

Таким образом, мы получили ту же окружность, о которой шла речь выше.

▷ **4.** Внутренние углы A_1, A_2, …, A_{2016} выпуклого 2016-угольника A_1, $A_2, \ldots, A_{2016}$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Можно ли описать окружность вокруг этого многоугольника?

Решение.

Нельзя. Допустим,что можно. Обозначим через α_1, α_2, …,α_{2n-1} — хорды,соединяющие соседние вершины, тогда

$$\angle A_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-1}),$$

$$\angle A_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n})$$

$$\ldots$$

$$\angle A_{2n} = \frac{1}{2}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-2}).$$

Сложим все четные и все нечетные

$$A_1 + A_3 + \cdots + A_{2n-1} = \frac{1}{2}((n-2)\alpha_1 + (n-2)\alpha_3 + \cdots + (n-2)\alpha_{2n-1})$$

$$A_2 + A_4 + \cdots + A_{2n} = \frac{1}{2}((n-2)\alpha_1 + (n-2)\alpha_3 + \cdots + (n-2)\alpha_{2n-1}),$$

следовательно, равны, но так как возрастающая арифметическая прогрессия, то $A_1 + A_3 + \cdots + A_{2n-1} < A_2 + A_4 + \cdots + A_{2n}$ — противоречие.

▷ **5.** Пусть $\mathrm{P}(N)$ — произведение цифр натурального числа N. Сколько существует семерок последовательных четырехзначных натуральных чисел $(M, M+1, M+2, M+3, \ldots, M+6)$, в записи которых нет ни одного нуля таких, что $\mathrm{P}(M) + \mathrm{P}(M+1) + \cdots + \mathrm{P}(M+6) = 2016$.

Решение.

$M_k = \overline{xyzn_k}$; $n_{k+1} = n_k + 1$;

$\mathrm{P}(M_k) = x \cdot y \cdot z \cdot n_k$;

$2016 = xyz(n_1 + n_2 + \cdots + n_7) = x \cdot y \cdot z \cdot S$;

1)

$$\begin{cases} n_1 = 1; \\ n_7 = 7; \end{cases}$$

S= 28.

$2016 = 28 \cdot xyz$;

$xyz = 2^3 \cdot 3^2$;

$x = \overline{1,9}$; $y = \overline{1,9}$; $z = \overline{1,9}$

x	1	2	2	3	4
y	8	4	6	8	6
z	9	9	6	3	3
n	6	6	3	3	6

$n = 24$;

2)

$$\begin{cases} n_1 = 2; \\ n_7 = 8; \end{cases}$$

$S = 35$, 2016 не делится на 35, следовательно решений нет.

3)

$$\begin{cases} n_1 = 3; \\ n_7 = 9; \end{cases}$$

S$= 42$;
$xyz = 24$;

x	1	1	2	2
y	3	4	2	4
z	8	6	6	3
n	6	6	3	6

$n = 21$;
Всего : $21 + 24 = 45$ различных семерок натуральных чисел.
Ответ : 45.

▷ **6.** На отрезке [0,4] числовой оси расположены 63 различные точки a_k $k = \overline{1,63}$. Докажите,что на этом отрезке найдется такая точка x, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{|x-a_1|} + \frac{1}{|x-a_2|} + \cdots + \frac{1}{|x-a_{63}|} < 2016.$$

Решение.

Пусть $a_k < a_{k+1}$ (без ограничения общности). Найдется, по крайней мере, один отрезок $[a_m; a_{m+1}]$, длина которого больше $\frac{4}{64} = \frac{1}{16}$ (количество отрезков 64). Не трудно доказать методом от противного. В качестве x возьмем середину этого отрезка

$$x = \frac{a_m + a_{m+1}}{2}.$$

$$|x - a_m| = \frac{1}{2}|a_{m+1} - a_m| \geq \frac{1}{32}$$

$$|x - a_{m+1}| = \frac{1}{2}|a_{m+1} - a_m| \geq \frac{1}{32}$$

$$|x - a_k| = \frac{1}{2}|a_m + a_{m+1} - 2a_k| = \frac{1}{2}(a_k - a_{m+1}) + \frac{1}{2}(a_k - a_m) > \frac{1}{32};$$

$$\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \cdots + \frac{1}{x-a_63} < 32 \cdot 64 = 2016.$$

▷ **7.** Пусть

$$f_1(x) = f(x), f_k(x) = f[f_{k-1}(x)].$$

Существует ли функция $f(x)$, отличная от нуля, такая, что выполняется тождество

$$f_1() + f_2(x) + \cdots + f_{2015}(x) = f_{2016}(x).$$

Решение.

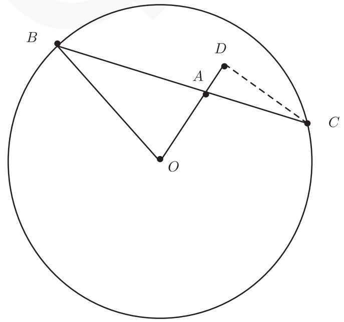
Пусть $f(x) : f(x) = kx, f_2(x) = kf(x) = k^2x \Longrightarrow f_n(x) = k^n x$.
$kx + k^2x + \cdots + k^{2015}x = k^{2016}x$.

Пусть $g(0) = -1$, тогда $g(k) = k^{2015} - \frac{k^{2015}-1}{k-1}$, f $g(2) = 1$, следовательно существует $k_0 \in (0;1) : g(k_0) = 0$.

$$f(x) = k_0 x.$$

▷ **8.** Через точку , лежащую внутри данного круга, провести хорду так, чтобы она разделилась в точке A в данном отношении $m : n$.

Решение.



Пусть BC — искомая хорда. Проведем из точки C прямую, параллельную радиусу OB, до пересечения в точке D с продолжением отрезка OA. Из подобия треугольников BAO и DAC имеем:

$$\frac{AD}{OA} = \frac{DC}{OB} = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}.$$

Отсюда:

$$AD = \frac{OA \cdot m}{n}, DC = \frac{OB \cdot m}{n}.$$

Но OA и OB — данные отрезки. Следовательно, отрезки AD и DC мы можем построить. Отсюда вытекает решение задачи.

1) Находим отрезок AD и откладываем его на продолжении OA.

2) Находим отрезок DC и из точки D описываем радиус DC окружность, вообще говоря, в двух точках C_1 и C_3.

3) Соединив C_1 и C_2 с A и продолжив C_1A и C_2A до пересечения с окружностью в точках B_1 и B_2 получим две хорды: B_1C_1 и B_2C_2, дающие решение задачи.

▷ **9.** Найдите все значения m, при которых уравнение

$$2\sin x + m = \cos x + 2m \operatorname{tg} x$$

имеет два решения, таких,что $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Решение.

$\cos x \neq 0;$

$$\cos x(2\operatorname{tg} x-1)=m(2\operatorname{tg} x-1);$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{1}{2};$$

$$x=\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{2};$$

$$\cos x=m,-1\leq m\leq 0;$$

$$x=\pm\operatorname{arctg} m+2\pi n,|x|\geq\frac{\pi}{2};$$

$$\cos x=m,1>m>0;$$

$$x=\pm\arccos m;$$

Если $m=1$б то $x=0$ и $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$;
Пусть $\alpha=\operatorname{arctg} m=\arccos m$, тогда

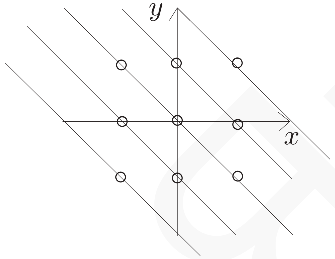
$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Ответ: $m=1,\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$\triangleright$ **10.** Пусть [a]— целая часть числа (наибольшее целое число,не превосходящее), $\{a\}$— дробная часть числа , где $\{a\}=a-[a]$.Выяснить, сколько решений имеет система:

$$\begin{cases}([|x|]+|y|)([|y-2|]+|x|)(|x^2-4|+|y-3|)(x^2+y^2-2y-15)=0;\\ \{x\}+\{y\}=1.\end{cases}$$

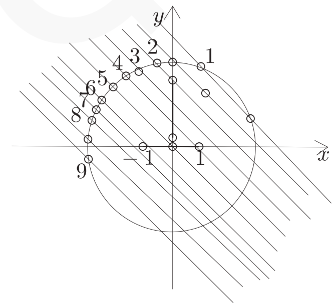
Решение.
$\{x\}+\{y\}=1$



1) $[|x|]+|y|=0$
$y=0,-1<x<1$
2) $[|y-2|]+|x|=0$
$x=0,1<y<3$
3)

$$\begin{cases}x=\pm 2;\\ y=3;\end{cases}$$

4) $x^2+y^2-2y-15=0$
$x+y=m$
$x^2+y^2-2y-15=0$
$m^2-2my+2y^2-2y-15=0$
$2y^2-2(m+1)y+m^2-15=0$
$(m+1)^2-2m^2+30<0$
$-m^2+2m+31<0$
$m^2-2m-31>0$
$m>1+\sqrt{1+31}=1+4\sqrt{2}$
$m<1-\sqrt{32}$



11 класс. Решение задач.

$\triangleright$ **1.** Два одинаковых куба с ребром a имеют диагонали на одной и той же прямой, вершина второго куба лежит в центре первого, и второй куб повернут вокруг диагонали на 60° по отношению к первому. Найти объем их общей части и радиус вписанного шара.

Решение.

Общая часть этих двух кубов представляет собой пару правильных треугольных пирамид, сложенных вместе основаниями, причем плоские углы при вершинах этих пирамид все прямые, так что каждая из них представляет собой $\frac{1}{6}$ куба с ребром $b = AB$. Искомый объем V общей части кубов равен, следовательно,

$$2\frac{b^3}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

Остается найти ребро b. Для этого заметим, что высота каждой из пирамид равна $\frac{b\sqrt{3}}{3}$, как треть диагонали куба с ребром b. Но удвоенная высота пирамиды равна половине OB диагонали заданного куба с ребром a, т. е.

$$\frac{2}{3}b\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

т. е.

$$b = \frac{3}{4}a.$$

Объем равен $\frac{9a^3}{64}$.

$\triangleright$ **2.** Найти сумму действительных корней уравнения

$$|x^3 - 3x^2 + 5x + 3| = 14.$$

Решение.

Данное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 11 = 0, x^3 - 3x^2 + 5x + 17 = 0,$$

которые после подстановки $x = y + 1$ преобразуются в уравнения

$$y^3 + 2y - 8 = 0, y^3 + 2y + 20 = 0.$$

Легко увидеть, что в левых частях стоят монотонно возрастающие функции, принимающие как положительные, так и отрицательные значения.

$y = x^3 - 3x^2 + 5x \uparrow y(x) = const$ — единственное решение.

$y' = 3x^2 - 6x + 5$, $D < 0$, следовательно, $y' > 0$ для любого x.

$x^3 - 3x^2 + 5x - c = 0$, $x = y + 1$, $c_1 = 11$, $c_2 = -17$.

$y^3 = 2Y = 3 - c = 0$

$y = u + v$;

$u^3 + 3uv(u + v) + v^3 + 2(u + v) + 3 - c = 0$;

$$\begin{cases} uv = -\frac{2}{3}; \\ u^3 + v^3 = -q; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^3v^3 = -\frac{8}{27}; \\ u^3 + v^3 = -q; \end{cases}$$

$t^2 + qt - \frac{8}{27} = 0$, $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{8}{27} = \frac{(3-c)^2}{4} + \frac{8}{27} > 0$

$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$

Уравнения имеют, следовательно, ровно по одному действительному корню, которые, согласно формуле Кардано, равны

$$y_1 = \sqrt[3]{4 + \sqrt{\frac{8}{27} + 16}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{\frac{8}{27} + 16}}$$

и

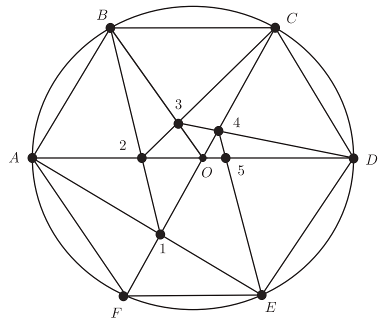
$$y_2 = \sqrt[3]{-10 + \sqrt{\frac{8}{27} + 100}} + \sqrt[3]{-10 - \sqrt{\frac{8}{27} + 100}}$$

соответственно. Искомая сумма поэтому равна

$y_1 + 1 + y_2 + 1 = 2 + \sqrt[3]{4 + \sqrt{\frac{8}{27} + 16}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{\frac{8}{27} + 16}} + \sqrt[3]{-10 + \sqrt{\frac{8}{27} + 100}} +$
$+ \sqrt[3]{-10 - \sqrt{\frac{8}{27} + 100}}$

$\triangleright$ **3.** В круг вписан правильный шестиугольник. Пользуясь только линейкой, построить $\frac{1}{n}$ часть радиуса, где $n = 2, 3, 4, 5 \ldots$.

Решение.



Для правильного шестиугольника $ABCDEF$

1. Проводим AD.
2. Проводим CF.
3. Проводим AE. Отрезок $O1 = \frac{1}{2}R$.
4. Проводим $B1$. Отрезок $O2 = \frac{1}{3}R$; это следует из подобия треугольников $B1C$ и $21O$

$$\frac{O2}{R} = \frac{O1}{C1} = \frac{1}{3}.$$

5. Проводим BO.

6. Проводим $C2$. Отрезок $O3 = \frac{1}{4}R$.

Из подобия треугольников $23O$ и $2CD$:

$$\frac{O3}{R} = \frac{O2}{D2} = \frac{1}{4}$$

7. Проводим $D3$. Отрезок $O4 = \frac{1}{5}R$.

8. Проводим $E4$. Отрезок $O5 = \frac{1}{6}R$; и т. д.

$\triangleright$ **4.** Пусть $\mathrm{P}(N)$ — произведение цифр натурального числа N. Сколько существует последовательных натуральных трехзначных чисел N_1, N_2, N_3, $N_4 \ldots N_7$, в записи которых нет нулей,таких,что $\mathrm{P}(N_1) + \mathrm{P}(N_2) + \ldots + \mathrm{P}(N_7) = 2016$?

Решение.

$x = \overline{1,9}$, $y = \overline{0,9}$, $z \neq 0$, $z + 6 \neq 0$.

$\mathrm{P}(N_1) = xyz$

$\mathrm{P}(N_2) = xy(z+1)$

$\ldots$

$\mathrm{P}(N_7) = xy(z+6)$

$\mathrm{P}(N_1)+\mathrm{P}(N_2)+\cdots+\mathrm{P}(N_7) = xy(z+z+1+\cdots+z+6) = xy(7z+21) = 7xy(z+3)$.

$xy(z+3) = 32 \cdot 9$

1) $z = 1, xy = 8 \cdot 9$

(8,9,1); (9, 8, 1)

2) $z = 2, xy \cdot 5 = 32 \cdot 9$,

$(x, y) \notin \varnothing$

3) $z = 3, xy = 48$

(6,8,3); (8,6,3)

Ответ : 4.

$\triangleright$ **5.** Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{2\arccos x - \arccos y} \cdot (|x| + |y| - 1) = 0; \\ \sqrt{2\arccos y - \arccos x} \cdot (|x+y| + |x-y| - 1) = 0 \end{cases}$$

Решение.

Построив графики функций, находим точки пересечения, которые являются решениями системы : $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})(1), (-1; 0)(2), (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})(3), (0; -1)(4), (\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})(5), (\frac{1}{2}; \frac{1}{2})(6), (1; 1)(7)$.

Составим систему :

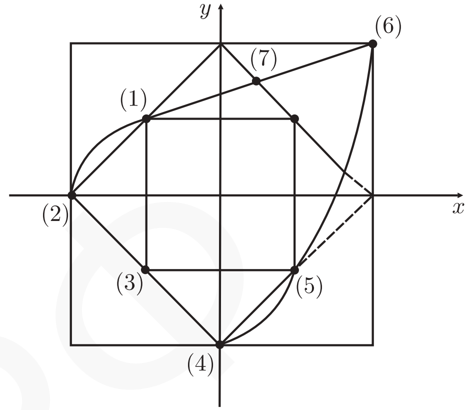
$$\begin{cases} x = 2y^2 - 1; \\ x = 1 - y \end{cases}$$

Получаем, $2y^2 + y - 2 = 0$

$$y = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4};$$

$$x = \frac{5 - \sqrt{17}}{4};$$

Ответ : $(\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{2}), (-1; 0), (0; -1), (1; 1), (\frac{5-\sqrt{17}}{4}; \frac{-1+\sqrt{17}}{4})$.



$\triangleright$ **6.** Найдите две последние цифры числа

$$[(\sqrt{29} + \sqrt{21})^{2016}],$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Решение.

$\alpha = \sqrt{29} + \sqrt{21}$, $\beta = \sqrt{29} - \sqrt{21} \in (0; 1), \beta^n \in (0; 1)$.

Корни:

$a = \alpha^2 = 50 + 2\sqrt{609}$

$b = \beta^2 = 50 - 2\sqrt{609}$

$x^2 - 100x + 64 = 0$

$S_n : S_n = a^n + b^n : S_n - 100S_{n-1} + 64S_n = 0, S_0 = 2.$

$a^n + b^n = \underbrace{(a+b)}_{100}(a^{n-1} + b^{n-1}) - \underbrace{ab}_{64}(a^{n-2} + b^{n-2}).$

$S_n - 100(S_{n-1} - S_{n-2}) = 36S_{n-2}$

$S_n = 36S_{n-2}(mod100) = 6^2S_{n-2} = 6^4S_{n-4}6^6S_{n-6} = 6^{100}S_{n-1008},$

$S_{1008} = 6^{1008}S_0 = 6^{1008} \cdot 2 = 2^{253}(mod100)$

$6^4 = 1296 \equiv -4(mod100), 2^{22} \equiv 2^2(mod100), 2^{12} \equiv -4(mod100)$

$2^{253}(2^{22})^{11} \cdot 2^{11} \equiv 2^{22} \cdot 2^{11} = 2^{33} = (2^{12})^2 \cdot 2^9 \equiv 2^4 \cdot 2^9 = 2^{12} \cdot 2 = -8 \equiv 92$

$[\alpha^{2016}] = [a^{1008}] = [S_{1008} - b^{1008}] = S_{1008} - 1 \equiv 92 - 1 = 91(mod100).$

$\triangleright$ **7.** Построить такой треугольник ABC с целочисленными сторонами, углы которого удовлетворяют соотношению:

$$3\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} + \sin\frac{3A}{2} \cdot \sin\frac{3B}{2} \cdot \cos\frac{3C}{2} = 0.$$

Решение.

Имеем:

$$\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)$$

и

$$\sin\frac{3A}{2}\cdot\sin\frac{3B}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3}{2}(A-B)-\cos\frac{3}{2}(A+B)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{3}{2}(A-B)-\sin\frac{3}{2}C\right)$$

Будем теперь преобразовывать левую часть данного в условии задачи равенства :

$3\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{3A}{2}\cdot\sin\frac{3B}{2}\cdot\cos\frac{3C}{2}=\frac{3}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}-\frac{3}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}+$ $+\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{3}{2}(A-B)\cdot\cos\frac{3C}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}C\cdot\cos\frac{3}{2}C=\frac{3}{2}\cos\frac{A-B}{2}\cdot\sin\frac{(A+B)}{2}-\frac{3}{4}\sin C-$ $\frac{1}{2}\cos\frac{3}{2}(A-B)\cdot\sin\frac{3}{2}(A+B)+\frac{1}{4}\sin 3C=\frac{3}{4}(\sin A+\sin B)-\frac{3}{4}\sin C-\frac{1}{4}(\sin 3A+$ $\sin 3B)+\frac{1}{4}\sin 3C.$

Итак, углы треугольника связаны зависимостью

$$3\sin A+3\sin B-3\sin C-\sin 3A-\sin 3B+\sin 3C=0.$$

Преобразуем это равенство следующим образом :

$$3(\sin A+\sin B-\sin C)+(\sin A-\sin 3A)+(\sin B-\sin 3B)-(\sin C-\sin 3C).$$

Далее:

$$2(\sin A+\sin B-\sin C)-2\cos 2A\cdot\sin A-2cos2B\cdot\sin B+2\cos 2C\cdot\sin C=0$$

и

$$\sin A(1-\cos 2A)+\sin B(1-\cos 2B)=\sin C(1-\cos 2C).$$

Это дает нам:

$$\sin^3 A+\sin^3 B=\sin^3 C.$$

Так как

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

то искомое соотношение между сторонами треугольника имеет вид :

$$a^3+b^3=c^3,$$

т. е. по теореме Ферма таких треугольников не существует.

▷ **8.** Сколько существует натуральных пар чисел $(m;k)$, таких, что последовательность чисел, заданных рекурсивным соотношением

$$x_{n+2}+\frac{1}{x_{n+1}}=x_n, x_1=m, x_2=k$$

состоит ровно из 100 чисел.

Решение.

$x_{n+1}\neq 0$

$x_{n+2}x_{n+1}-x_{n+1}x_n=-1$, где $x_{n+2}x_{n+1}=a_{n+1}$ и $x_{n+1}x_n=a_n$

$a_1=x_1\cdot x_2=m\cdot k$;

$a_{n+1}=a_1+dn=mk-n$

$a_{n+1}=x_{n+2}\cdot x_{n+1}=0\Rightarrow x_{n+2}=0$

$n=mk\Rightarrow x_{n+2}=0$ и $\exists x_k:\forall k>n+2$

$x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{mk+2}$.

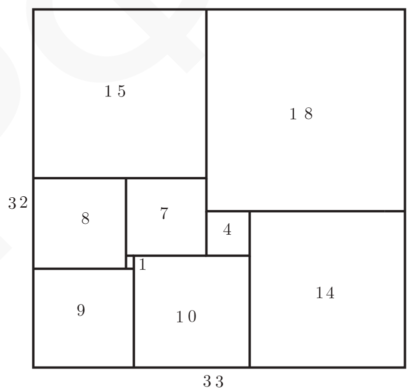
$m\cdot k+2=100$, т.е. $m\cdot k=98$.

m	1	2	7	14	49	98
k	98	49	14	7	2	1

Ответ : 6 пар.

▷ **9.** Существует ли прямоугольник, который можно разрезать на конечное число попарно неравных квадратов?

Решение.



▷ **10.** Найдите все натуральные a, при которых неравенство

$$\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}\leq\frac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2}$$

имеет ровно а) 2016 целых решений, б) 2017 целых решений.

Решение.

$a\neq 1, a\geq 2, a\in N$. Многочлен 6 степени. следовательно, 6 корней.

Если $x=a$ —корень, то корни $x_2=1-a$, $x_3=\frac{1}{a}$, $,x_5=\frac{1}{1-a}$, $x_6=\frac{a}{a-1}$.

1) $a=2$.

$x_1=2, x_2=-1, x_3=\frac{1}{2}, x_4=\frac{1}{2}, x_5=-1, x_6=2.$

$(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x-x_3)^2\leq 0$

3 решения {-1 ; $\frac{1}{2}$ 2}.

2) $a\geq 3$

$\frac{a}{a-1}=x_6\leq x\leq x_1=a,$

$\frac{1}{a}=x_3\leq x\leq x_4=1-\frac{1}{a},$

$1-a=x_2\leq x\leq x_5=\frac{1}{1-a},$

$a\geq 3, \frac{1}{a}\leq\frac{1}{3}$

$-a\leq -3, 1-a\leq -2$

$0>-\frac{1}{a}\geq -\frac{1}{3}, 1>x_4\geq\frac{2}{3}$

$-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{1-a}<0$

$\frac{a}{a-1}=1+\frac{1}{a-1}=1-\frac{1}{1-a}$

$x_1\geq 3, x_2\leq -2, x_3\in(0;\frac{1}{3}]$

$x_4 \in [\frac{2}{3}; 1)$
$x_5 \in [-\frac{1}{2}; 0)$
$x_6 \in (1; \frac{3}{2}]$
$\{2, 3, \ldots, a\}$ $(a-1)$ решение
$\{-1 - 2 \ldots a - (a-1)\}$ $(a-1)$ решение
Всего целых решений $2a - 2$:
а)$2a - 2 = 2016$, $a = 1009$.
б)$2a - 2 = 2017$, $a \notin \varnothing$.