XXII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2014»

Заключительный тур

6 класс

▷ **1.** Найти максимальное значение суммы двух натуральных чисел, если их наименьшее общее кратное равно 48, а наибольший общий делитель равен 8.

▷ **2.** Вычислить:

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1}{888888 \cdot 888888} - \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1}{999999 \cdot 999999}.$$

▷ **3.** Золушка и гномы установили свои часы на точное время в 10 часов утра и договорились встретиться в 20 часов того же дня. Известно, что часы Золушки спешат на 15 минут в час, а часы гномов отстают на 10 минут. Во сколько (по точным часам) произойдет встреча Золушки с гномами, если каждый придет по своим часам?

▷ **4.** Сколько клеток таблицы 8×8 можно покрасить так, чтобы никакие 3 центра крашенных клеток не лежали на одной прямой?

▷ **5.** В зоомагазине находятся кошки и попугаи. Как известно у кошки 4 лапы, а у попугая -2. Если в магазин войдут покупатели (число покупателей равно числу обитателей зоомагазина, не считая продавцов), то в зоомагазине будет 32 ноги. Сколько в магазине может быть кошек?

▷ **6.** Какое наибольшее число треугольников можно построить так, что все вершины находятся среди данных 6 точек.

$$\begin{array}{ccccc} & & * & & \\ & * & & * & \\ * & & * & & * \end{array}$$

▷ **7.** Три цифры пятизначного числа четверки. Найдите это число, зная, что оно делится без остатка на 315.

▷ **8.** Можно ли нарисовать на плоскости четыре красных и четыре синих точки так, чтобы для любой тройки точек одного цвета нашлась точка другого цвета такая, что эти четыре точки являются вершинами параллелограмма?

▷ **9.** У Незнайки и Знайки есть 100 гирек массами 1 г, 2г, ..., 100 г. Незнайка поспорил со Знайкой, что какие бы две гирьки не положил Знайка, Незнайка всегда сможет уравновесить весы. Так ли это? Если нет, приведите пример.

▷ **10.** Нарисуйте шестиугольник и проведите через две его вершины прямую, которая разбивает его на два пятиугольника.

XXII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2014»

Заключительный тур

7 класс

▷ **1.** Каково наибольшее количество треугольников, все вершины которых находятся среди данных 10 точек?

$$\begin{array}{cccc} & & & * \\ & & * & * \\ & * & * & * \\ * & * & * & * \end{array}$$

▷ **2.** Вупсень попал в Волшебную страну и ползет по ней с постоянной скоростью. Через каждые 15 минут он поворачивает на 90^0. Докажите, что в исходную точку (откуда начал движение) он сможет лишь через целое число часов.

▷ **3.** Дан равнобедренный треугольник с углом в 20^0 при вершине. Докажите, что его боковая сторона больше удвоенного основания.

▷ **4.** Докажите, что значение выражения

$$792 \cdot 793 \cdot 794 \cdot 795 + 1$$

можно представить в виде произведения двух одинаковых множителей.

▷ **5.** На циферблате часов в точках III, VI, IX, XII написано по цифре. Идя по ходу часовой стрелки можно составить из этих цифр две пары двузначных чисел. Произведение одной пары 2795, другой 1944. Найдите написанные цифры.

▷ **6.** Среди 30 олимпиадников школы, 16 принимали участие в САММАТ - 12, 17 принимали участие в САММАТ - 13, а 10 принимали участие и в САММАТ -12 и в САММАТ -13. Есть ли среди олимпиадников школы, ребята не принимавшие участие в САММАТ -12, САММАТ -13 и если есть, то сколько их?

▷ **7.** Нарисуйте шестиугольник и проведите через две его вершины прямую, которая разбивает его на два пятиугольника.

▷ **8.** Расшифруйте ребус: УДАР+УДАР=ДРАКА.

Разным буквам соответствуют разные цифры.

▷ **9.** Разделите угол в 66^0 на 11 равных частей с помощью циркуля и линейки.

▷ **10.** Можно ли расставить числа $1, 2, ..., 8$ в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на всех гранях куба были одинаковыми? Если можно, то покажите как.

XXII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2014»

Заключительный тур

8 класс

▷ **1.** Прямоугольный лист бумаги длины n, ширины m $(m \neq n)$ согнули по диагонали и склеили. Найдите периметр получившийся фигуры.

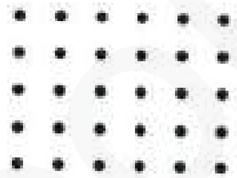
▷ **2.** Сравнить числовые выражения А и В и дать объяснение.

$$A = \frac{1}{2013}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2013}\right), \quad B = \frac{1}{2014}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014}\right)$$

▷ **3.** Слова АКТ, УТРО, КОМАР соответственно означают квадрат, куб, и четвертую степень одного натурального числа. Какое слово соответствует числу 9128931.

▷ **4.** Доказать, что любой треугольник можно разрезать на три части, из которых можно сложить прямоугольный треугольник.

▷ **5.** Каково наибольшее количество прямоугольников, все вершины которых находятся среди данных 30 точек.



▷ **6.** Трое мальчиков имеют по некоторому количеству яблок. Первый из мальчиков дает другим столько яблок, сколько каждый из них имеет. Затем второй мальчик дает двум другим столько яблок, сколько каждый из них теперь имеет, в свою очередь и третий дает каждому из двух других столько, сколько есть у каждого в этот момент. После этого у каждого из мальчиков оказывается по 8 яблок. Сколько яблок было в начале у каждого из мальчиков?

▷ **7.** Какое наименьшее количество различных натуральных чисел нужно взять, чтобы из них наверняка можно было выбрать 3 числа, сумма которых делится на 3.

▷ **8.**Построенная из 16 спичек фигура  не имеет центра симметрии. Переставьте не более 3 спичек так, чтобы получающаяся фигура имела центр симметрии. Найдите способы решения, приводящие к четырем различным центрам симметрии.

▷ **9.** Некоторое число при делении на 1994 и на 2014 дает в остатке 1000. Какой остаток дает это число при делении на 57?

▷ **10.** Два приятеля собрались на охоту. Их дома отстоят от базы на расстоянии 18 км и 33 км, причем первый живет между базой и домом второго. Они отправились одновременно: сначала навстречу дру другу (первый на автомобиле, второй пешком). После того как приятели встретились, они поехали к базе на машине. Всего они добирались до базы 1 час. Если бы второй вышел на 1 час раньше, они встретились бы в 6 км от дома второго. Определите скорость движения автомобиля.

XXII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2014»

Заключительный тур

9 класс

▷ **1.** Сравните числовые выражения

$$\frac{\sqrt{30}}{11}+\frac{\sqrt{56}}{15}+\frac{\sqrt{90}}{19} \text{ и } \frac{\sqrt{42}}{13}+\frac{\sqrt{72}}{17}+\frac{\sqrt{110}}{21}.$$

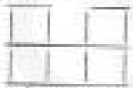
▷ **2.** Пусть p действительное число такое, что $\sqrt[5]{p}+\frac{1}{\sqrt[5]{p}}=\sqrt{5}$. Найдите, не используя калькулятора, чему равно $\left[\frac{S}{2014}\right]$, где $S=p^5+\frac{1}{p^5}$, $[a]$— целая часть числа a.

▷ **3.** Докажите, что при произвольном a существует треугольник со сторонами

$$\sqrt{a^2-a+1}, \sqrt{a^2+a+1}, \sqrt{4a^2+3}$$

и площадь этого треугольника не зависит от a.

▷ **4.** Можно ли разделить числа 1, 2, ..., 2013 на три непересекающиеся группы так, чтобы суммы чисел в этих группах образовывали арифметическую прогрессию?

▷ **5.** Построенная из 16 спичек фигура  не имеет центра симметрии. Переставьте не более 3 спичек так, чтобы получающаяся фигура имела центр симметрии. Найдите способы решения, приводящие к четырем различным центрам симметрии.

▷ **6.** Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} xy+z=2013, \\ x+yz=2014. \end{cases}$$

▷ **7.** Найдите остаток от деления степени 2014^{2014} на 1914.

▷ **8.** Дан отрезок длиной $20\sqrt{3}$. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длиной $10\sqrt{2}$.

▷ **9.** Число n^3+6n^2+12n оканчивается цифрой 2. Найдите еще две цифры предшествующие этой двойки.

▷ **10.** Дан треугольник ABC с углами 75^0, 75^0, 30^0. Каждую его вершину отразили симметрично относительно противоположной стороны и получили три точки M, N, K. Докажите, что треугольник MNK - правильный.

XXII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2014»

Заключительный тур

10 класс

▷ **1.** При каких натуральных n уравнение

$$8\cos 6x\cos 2x + 4\sin^2 4x = 3$$

имеет на отрезке $[1, n]$ ровно 2014 решений?

▷ **2.** Какое наименьшее количество различных натуральных чисел нужно взять, чтобы из них наверняка можно было выбрать 4 числа, сумма которых делится на 4?

▷ **3.** Найдите при каком a существует многочлен 100 степени, который удовлетворяет соотношению

$$P(x) - P(2014 - x) = 1914x + a.$$

▷ **4.** Дан остроугольный равнобедренный (но не равносторонний) треугольник ABC. Каждую его вершину отразили симметрично относительно противоположной стороны и получили точки, являющиеся вершинами правильного треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

▷ **5.** Дан отрезок длина которого равна диагонали некоторого куба. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок равный диагонали грани этого куба.

▷ **6.** Найдите наименьшее трехзначное число n, при котором число

$$M = n^{12} + 4n^8 + 6n^6 + 24n^2 + 2014n + 2013$$

делится на 35.

▷ **7.** На листе в клетку (размер клетки 1×1 см) нарисовали прямоугольник, стороны которого проходят по линиям клеток, вершины находятся в узлах клеток. Сколько можно нарисовать прямоугольников площадью 20 см^2 вершины которых находятся в узлах клеток, если на горизонтальной стороне прямоугольника находится 19 узлов, а на вертикальной 14 узлов.

▷ **8.**Найдите сумму всех значений параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (|x|+1)|y+1||x+y+a| = 27, \\ |x| + |y+1| + |x+y+a| = 8. \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений

▷ **9.** Сумма десяти натуральных чисел равна 2014. Какое наименьшее значение может принимать НОК?

▷ **10.**В произвольном треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB отметили точки M, N, P такие, что $BM : MC = CN : NA = AP : PB = 1 : 3$. Три прямые AM, BN, CP образуют треугольник $A_1B_1C_1$. Найдите восколько раз площадь исходного треугольника больше площади построенного треугольника.

XXII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2014»

Заключительный тур

11 класс

▷ **1.** Найдите сумму всех решений уравнения

$$13cosec2x = ctg2x + ctg3x$$

удовлетворяющих неравенству $1914^\circ \leq x \leq 2014^\circ$.

▷ **2.** Положительные числа a, b, c таковы, что $a^b = b^c = c^a$. Докажите, что $a = b = c$.

▷ **3.** Укажите по крайней мере 2 многочлена степени 99, которые удовлетворяют данному соотношению $P(x) + P(2014 - x) = 1914$.

▷ **4.** Можно ли разделить 2014 чисел: $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{2013}$ на три непересекающиеся группы так, чтобы суммы чисел в этих группах образовывали арифметическую прогрессию?

▷ **5.** При каком наименьшем натуральном n наверняка найдутся попарно различные натуральные числа a, b, c такие, что все три квадратных трехчлена

$$ax^2 + nbx + c, bx^2 + nax + c, ax^2 + ncx + b$$

имеют корни. При этом n укажите возможные значения a, b, c.

▷ **6.** Найдите радиус вписанного в пирамиду $SABC$ шара, если известно, что вершина S проецируется в ортоцентр треугольника ABC, боковые ребра равны корням уравнения $\frac{t(t^2+14)}{t^2+1} = 4\sqrt{3}$ и один из углов при вершине S прямой.

▷ **7.** Найдите по крайней мере два трехзначных n при котором число

$$M = n^{72} + 18n^{54} + 52n^{20} + 937n^2 + 15n + 56$$

делится на 2014.

▷ **8.** Вдоль стены в ряд стоят 16 урн. В них находятся в общей сложности 71 красный и синий шар, причем красных шаров больше, чем синих. В любых трех рядом стоящих урнах находится одинаковое количество как красных, так и синих шаров, при этом красных шаров меньше, чем синих. Сколько красных и синих шаров находится в 10 урне.

▷ **9.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x[y] + \{y\} = 3, \\ (x^2+1)([y]^2 + \{y\}^2) = 9. \end{cases}$

▷ **10.** Дана последовательность треугольников $\triangle_n, n = 1, 2, \ldots$ с вершинами в точках A_n, B_n, C_n. M_n—центр тяжести треугольника $\triangle_n$. Треугольник $\triangle_{n+1}$ с вершинами A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} получается из треугольника $\triangle_n$ следующим образом: A_nA_{n+1}, B_nB_{n+1}, C_nC_{n+1} — отрезки высот треугольника $\triangle_n$ такие, что

$$\frac{A_nA_{n+1}}{B_nC_n} = \frac{B_nB_{n+1}}{C_nA_n} = \frac{C_nC_{n+1}}{A_nB_n} = \frac{1}{100}.$$

Найти $\rho(M_{1914}, M_{2014})$— расстояние между центрами тяжести треугольников $\triangle_{1914}$ и $\triangle_{2014}$, если стороны треугольника $\triangle_1$ равны 19, 20 и 14.

Условия задач,
решения и указания к решениям задач

Заключительный тур

XXII Межрегиональной олимпиады

школьников по математике

«САММАТ-2014»

6 - 11 класс

Самара, 2014

XXII Межрегиональная олимпиада
школьников по математике
«САММАТ-2014»
6 класс

▷ 1.Найти максимальное значение суммы двух натуральных чисел, если их наименьшее общее кратное равно 48, а наибольший общий делитель равен 8.

Решение. Заметим, что произведение натуральных чисел равно произведению их наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя. Следовательно,

$$48 \cdot 8 = 384 = 2^7 \cdot 3,$$

$$384 = 1 \cdot 384, 384 = 2 \cdot 192, 384 = 3 \cdot 128, 384 = 4 \cdot 96, 384 = 6 \cdot 64,$$

$$384 = 8 \cdot 48, 384 = 12 \cdot 32, 384 = 24 \cdot 16.$$

Отберем пары для которых наибольший общий делитель равен 8. Это пары

$$8 \cdot 48, 24 \cdot 16.$$

Очевидно, что максимальное значение суммы равно 56.

Ответ. 56.

▷ **2. Вычислить:**

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1}{888888 \cdot 888888} - \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1}{999999 \cdot 999999}.$$

Решение.

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1}{888888 \cdot 888888} - \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1}{999999 \cdot 999999} =$$

$$= \frac{32+32}{888888 \cdot 888888} - \frac{81}{999999 \cdot 999999} =$$

$$\frac{1}{111111 \cdot 111111} - \frac{1}{111111 \cdot 111111} = 0.$$

Ответ. 0.

▷ **3.** Золушка и гномы установили свои часы на точное время в 10 часов утра и договорились встретиться в 20 часов того же дня. Известно, что часы Золушки спешат на 15 минут в час, а часы гномов отстают на 10 минут. Во сколько (по точным часам) произойдет встреча Золушки с гномами, если каждый придет по своим часам?

Ответ. Через 1ч 40 мин при условии, что Золушка будет ждать.

▷ **4.** Сколько клеток таблицы 8×8 можно покрасить так, чтобы никакие 3 центра крашенных клеток не лежали на одной прямой?

Решение.

Покрасить больше 16 клеток нельзя, тогда на какой-то горизонтали появится 3-я клетка.

Ответ. 16 клеток.

▷ **5.** В зоомагазине находятся кошки и попугаи. Как известно у кошки 4 лапы, а у попугая -2. Если в магазин войдут покупатели (число покупателей равно числу обитателей зоомагазина, не считая продавцов), то в зоомагазине будет 32 ноги. Сколько в магазине может быть кошек?

Решение. Пусть в магазине x кошек, y попугаев. Тогда по условию задачи:

$$4x + 2y + 2(x+y) = 32,$$

$$3x + 2y = 16.$$

Выполнив не очень сложный перебор получаем, что в магазине может быть 4 кошки, 2 кошки или вовсе не быть кошек.

Ответ. 4, 2, 0.

▷ **6.** Какое наибольшее число треугольников можно построить так, что все вершины находятся среди данных 6 точек.

Решение. Количество троек точек, которое можно выбрать из данных точек определяется $C_6^3 = 20$. Из этого числа троек точек необходимо исключить те которые не образуют треугольников. Таких троек очевидно - 3. Следовательно, наибольшее число треугольников, которые удовлетворяют условию задачи равно 17.

Ответ. 17.

▷ **7.** Три цифры пятизначного числа четверки. Найдите это число, зная, что оно делится без остатка на 315.

Решение. $315 = 5 \cdot 63 = 5 \cdot 9 \cdot 7$. Следовательно, сумма цифр искомого числа должна делиться на 9 и оканчиваться на 0 или 5. Очевидно, что условию задачи удовлетворяет число 44415.

Ответ. 44415.

▷ **8.** Можно ли нарисовать на плоскости четыре красных и четыре синих точки так, чтобы для любой тройки точек одного цвета нашлась точка другого цвета такая, что эти четыре точки являются вершинами параллелограмма?

Решение. Приведем одно из решений. Рассмотри куб. Обозначим красные точки 1, а синие 2. Покрасим вершины одного ребра верхнего основания покрасить в красный цвет, вершины противоположного ему ребра верхнего основания в синий. Рассмотрим нижнее основания и возьмем ребра не параллельные ребрам верхнего основания и проделаем те же действия. Тогда получим, что для любой тройки точек одного цвета нашлась точка другого цвета такая, что эти 4 точки являются вершинами параллелограмма.

Ответ. Можно.

▷ **9.** У Незнайки и Знайки есть 100 гирек массами 1 г, 2г, ..., 100 г. Незнайка поспорил со Знайкой, что какие бы две гирьки не положил Знайка, Незнайка всегда сможет уравновесить весы. Так ли это? Если нет, приведите пример.

Решение. Допустим, Знайка взял гирьки веса x и y, $x < y$. Если $y - x > 2$, то Незнайка сможет взять гирьки веса $x + 1$ и $y - 1$. Значит,$y - x \leq 2$.

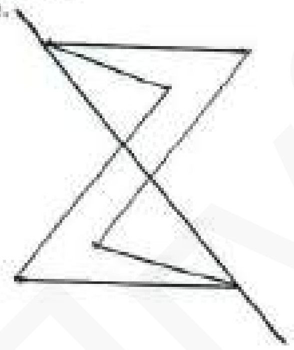
Если $x > 1$ и $y < 99$, то Незнайка может взять гирька с весами $x - 1$ и $y + 1$. Значит, $n = 1$ либо $m \geq 99$.

Остались пары (1;2), (1;3), (98;100), (99;100).

Ответ.(1;2), (1;3), (98;100), (99;100).

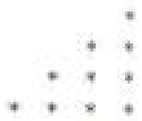
▷ **10.**Нарисуйте шестиугольник и проведите через две его вершины прямую, которая разбивает его на два пятиугольника.

Решение.



XXII Межрегиональная олимпиада
школьников по математике
«САММАТ-2014»
7 класс

⊳ 1.Каково наибольшее количество треугольников, все вершины которых находятся среди данных 10 точек?



Решение. Определим общее число троек точек, которое можно построить из данных 10 точек. $C_{10}^3 = 120$. Исключим из этого числа тройки точек, которые лежат на одной прямой. Очевидно, что число троек точек лежащих на одной прямой равно 15. Значит, наибольшее число треугольников, удовлетворяющих условию задачи равно $120 - 15 = 105$.

Ответ. 105.

⊳ **2.** Вупсень попал в Волшебную страну и ползет по ней с постоянной скоростью. Через каждые 15 минут он поворачивает на 90°. Докажите, что в исходную точку (откуда начал движение) он сможет лишь через целое число часов.

Доказательство.

⊳ **3.** Дан равнобедренный треугольник с углом в 20^0 при вершине. Докажите, что его боковая сторона больше удвоенного основания.

Доказательство. Рассмотри равнобедренный треугольник с углом $\angle A = 20^\circ$. Отложим на стороне AB отрезок $BE = BC$. $AE > CE$, как стороны лежащие против углов в 30° и 20° соответственно. Аналогично, $CE > CB$.

$$AB = AE + BE > 2CB.$$

⊳ **4.** Докажите, что значение выражения

$$792 \cdot 793 \cdot 794 \cdot 795 + 1$$

можно представить в виде произведения двух одинаковых множителей.

Доказательство. Введем обозначения $792 = x - 1$, $793 = x$, $794 = x + 1$, $795 = x + 2$, тогда

$$792 \cdot 793 \cdot 794 \cdot 795 + 1 = (x-1)x(x+1)(x+2) + 1 =$$
$$= x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x^2 - 2x + 1 =$$
$$= x^2(x+1)^2 - 2x(x+1) + 1 = (x(x+1) - 1)^2.$$

⊳ **5.** На циферблате часов в точках III, VI, IX, XII написано по цифре. Идя по ходу часовой стрелки можно составить из этих цифр две пары двузначных чисел. Произведение одной пары 2795, другой 1944. Найдите написанные цифры.

Решение. $2795 = 65 \cdot 43$, $1944 = 36 \cdot 54$, следовательно, цифры: 3, 4, 5, 6.

Ответ. 3, 4, 5, 6.

⊳ **6.** Среди 30 олимпиадников школы, 16 принимали участие в САММАТ - 12, 17 принимали участие в САММАТ - 13, а 10 принимали участие и в САММАТ -12 и в САММАТ -13. Есть ли среди олимпиадников школы, ребята не принимавшие участие в САММАТ -12, САММАТ -13 и если есть, то сколько их?

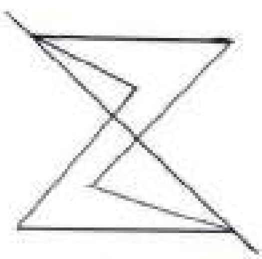
Решение. Пусть A — это множество участников САММАТ-12, B — это множество участников САММАТ -13. X - множество, которое состоит из ребят не участвовавших в САММАТ-12, САММАТ-13. По условию задачи $n(A) = 16, n(B) = 17, n(A \bigcap B) = 10$.

$$30 = n(A) + n(B) - n(A \bigcap B) + n(X),$$
$$n(X) = 7.$$

Ответ. 7.

⊳ **7.** Нарисуйте шестиугольник и проведите через две его вершины прямую, которая разбивает его на два пятиугольника.

Решение.



⊳ **8.** Расшифруйте ребус: УДАР+УДАР=ДРАКА.

Разным буквам соответствуют разные цифры.

Решение. Д=1, т.к. складываются два четырехзначных числа.

А - четное. 2Д=А, следовательно, А=2.

Р≠ 1 т.к. Д=1.

Р=6, следовательно, К=2А+1, К=5, У=8.

$8126 + 8126 = 16252$.

Ответ. $8126 + 8126 = 16252$.

▷ **9.** Разделите угол в 66° на 11 равных частей с помощью циркуля и линейки.

Решение. До 90° дополняют 24°. Делим угол в 24° пополам и еще раз пополам, получим угол в 6°. Можно построить угол в 60°.

▷ **10.** Можно ли расставить числа 1, 2, ..., 8 в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на всех гранях куба были одинаковыми? Если можно, то покажите как.

Решение. Вставить рисунок. Сумма чисел на каждой грани равна 18. Число 18 находим из условия:

$$6 \cdot x = 3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8),$$

$$6x = 3 \cdot 36,$$

$$x = 18.$$

Далее подбор. Ключ - четные числа по диагоналям, и на каждой грани 2 четных и 2 нечетных числа.

Ответ. Можно.

XXII Межрегиональная олимпиада
школьников по математике
«САММАТ-2014»
8 класс

⊳ **1.** Прямоугольный лист бумаги длины n, ширины m $(m \neq n)$ согнули по диагонали и склеили. Найдите периметр получившейся фигуры.

Решение. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$. Согнем его по диагонали AC и склеим. Получим фигуру $ABKD'C$. Очевидно, что периметр получившейся фигуры:

$$P = 2n + \frac{m^2 - n^2}{m} + \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Ответ. $P = 2n + \frac{m^2-n^2}{m} + \sqrt{m^2 + n^2}$.

⊳ **2.** Сравнить числовые выражения A и B и дать объяснение.

$$A = \frac{1}{2013}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2013}\right), \quad B = \frac{1}{2014}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2014}\right)$$

Решение. Пусть $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2013}\right) = a, a > 2$, тогда $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2014}\right) = a + \frac{1}{2014}$, следовательно, $A = \frac{a}{2013}$, $B = \frac{a+\frac{1}{2014}}{2014}$.

$$A - B = \frac{a}{2013} - \frac{a}{2014} - \frac{1}{2014^2} = \frac{a}{2013 \cdot 2014} - \frac{1}{2014^2} > 0.$$
$$A > B.$$

Ответ. $A > B$.

⊳ **3.** Слова АКТ, УТРО, КОМАР соответственно означают квадрат, куб, и четвертую степень одного натурального числа. Какое слово соответствует числу 9128931.

Решение. Т.к. $1000 \leq x \leq 10000$, следовательно, $10 \leq x \leq 22$. Последние цифры x^2, x^3, x^4 различны (Т, О, Р), следовательно, последняя цифра x не равна 0, 1, 4, 5, 6, 9. Значит, x может быть равно 12, 13, 17, 18. Проверяем: 12 не подходит, т.к. $12^2 = 144$, а К≠Т, 18 не подходит, т.к. 18^4 состоит более чем из 5 цифр, 13 не подходит, т.к. у 13^2 и 13^4 1 соответствуют разные буквы. Следовательно, остается 17.

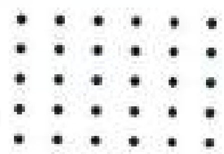
$17^2 = 289$ — АКТ, $17^3 = 4913$ — УТРО, значит, 9128931 = — ТРАКТОР.

Ответ. ТРАКТОР.

⊳ **4.** Доказать, что любой треугольник можно разрезать на три части, из которых можно сложить прямоугольный треугольник.

Доказательство. Рассмотрим остроугольный $\triangle ABC$. Пусть M — середина AB, N — середина BC. Проведем через точку M прямую a перпендикулярную AC. Через точку B проведем прямую b параллельную AC. Пусть $Q = a \cap b$, $P = a \cap AC$. Проведем прямую c через точки P и N до пересечения с прямой b. $R = b \cap c$. Получим, что $\triangle AMP = \triangle BMQ$, $\triangle RBN = \triangle PCN$. Что и требовалось доказать.

⊳ **5.** Каково наибольшее количество прямоугольников, все вершины которых находятся среди данных 30 точек.



Указание. 150 - число «ровных» прямоугольников. 48 - диагональных прямоугольников.

Ответ. 198.

⊳ **6.** Трое мальчиков имеют по некоторому количеству яблок. Первый из мальчиков дает другим столько яблок, сколько каждый из них имеет. Затем второй мальчик дает двум другим столько яблок, сколько каждый из них теперь имеет, в свою очередь и третий дает каждому из двух других столько, сколько есть у каждого в этот момент. После этого у каждого из мальчиков оказывается по 8 яблок. Сколько яблок было в начале у каждого из мальчиков?

Ответ. У первого мальчика 13 яблок, у второго 7 и у третьего 4 яблока.

⊳ **7.** Какое наименьшее количество различных натуральных чисел нужно взять, чтобы из них наверняка можно было выбрать 3 числа, сумма которых делится на 3.

Решение. 1) Покажем, что 4 чисел недостаточно. Пусть их остатки от деления на 3 суть: 0, 0, 1, 1. Тогда сумма любых трех из них имеет остаток равный либо 1, либо 2, следовательно, не делится на 3.

2) Покажем, что 5 достаточно. Пусть их остатки от деления на 3:

а) 0, 0, 0, ∀, ∀ или 1, 1, 1, ∀, ∀ или 2, 2, 2, ∀, ∀, тогда берем первые три.

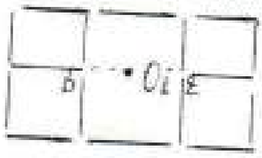
б) 0,0,1, 1, 2 или 0, 0, 2, 2, 1 или 0, 1, 1, 2, 2 обязательно есть три различных остатка, их берем.

Ответ. 5.

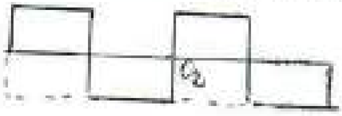
⊳ **8.** Построенная из 16 спичек фигура  не имеет центра симметрии. Переставьте не более 3 спичек так, чтобы получающаяся фигура имела центр симметрии. Найдите способы решения, приводящие к четырем различным центрам симметрии.

Решение.

1 случай. Двигаем 1 спичку. Центр симметрии - точка O_1 - середина BE.



2 случай. Двигаем 3 спички. Центр симметрии точка O_2.



3 случай. Аналогичен случаю 2 только двигаем вправо.

4 случай. Двигаем 3 спички. Центр симметрии точка O_4 - центр квадрата.

⊳ **9.** Некоторое число при делении на 1994 и на 2014 дает в остатке 1000. Какой остаток даст это число при делении на 57?

Решение.

Ответ. 31.

⊳ **10.** Два приятеля собрались на охоту. Их дома отстоят от базы на расстоянии 18 км и 33 км, причем первый живет между базой и домом второго. Они отправились одновременно: сначала навстречу друг другу (первый на автомобиле, второй пешком). После того как приятели встретились, они поехали к базе на машине. Всего они добирались до базы 1 час. Если бы второй вышел на 1 час раньше, они встретились бы в 6 км от дома второго. Определите скорость движения автомобиля.

Ответ. 45 км/ч.

XXII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2014»

9 класс

$\triangleright$ **1.** Сравните числовые выражения

$$\frac{\sqrt{30}}{11}+\frac{\sqrt{56}}{15}+\frac{\sqrt{90}}{19} \text{ и } \frac{\sqrt{42}}{13}+\frac{\sqrt{72}}{17}+\frac{\sqrt{110}}{21}.$$

Указание. Введем обозначение $A=\frac{\sqrt{30}}{11}+\frac{\sqrt{56}}{15}+\frac{\sqrt{90}}{19}$, $B=\frac{\sqrt{42}}{13}+\frac{\sqrt{72}}{17}+\frac{\sqrt{110}}{21}$. Заметим, что каждую дробь можно представить

$$\frac{\sqrt{x(x+1)}}{2x+1}=\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4(2x+1)^2}}.$$

Получаем, что при увеличении x дробь увеличивается. Следовательно, $B>A$.

Ответ. $B>A$.

$\triangleright$ **2.** Пусть p действительное число такое, что $\sqrt[5]{p}+\frac{1}{\sqrt[5]{p}}=\sqrt{5}$. Найдите, не используя калькулятора, чему равно $\left[\frac{S}{2014}\right]$, где $S=p^5+\frac{1}{p^5}$, $[a]$— целая часть числа a.

Решение. Введем обозначение $\sqrt[5]{p}=x$, тогда $x+\frac{1}{x}=\sqrt{5}$.

$$x^3+\frac{1}{x^3}+3(x+\frac{1}{x})=5\sqrt{5},$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=2\sqrt{5},$$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=(x+\frac{1}{x})^5-5(x^3+\frac{1}{x^3})-10(x+\frac{1}{x})=5\sqrt{5}=p+\frac{1}{p},$$

$$p^3+\frac{1}{p^3}=(5\sqrt{5})^3-3(p+\frac{1}{p})=610\sqrt{5},$$

$$p^5+\frac{1}{p^5}=(p+\frac{1}{p})^5-5(p^3+\frac{1}{p^3})-10(p+\frac{1}{p})=5^5(\sqrt{5})^5-5\cdot 610\sqrt{5}-50\sqrt{5}=25\cdot 501\sqrt{5},$$

$$\left[\frac{S}{2014}\right]=8.$$

Ответ. 8.

$\triangleright$ **3.** Докажите, что при произвольном a существует треугольник со сторонами

$$\sqrt{a^2-a+1}, \sqrt{a^2+a+1}, \sqrt{4a^2+3}$$

и площадь этого треугольника не зависит от a.

Доказательство. Сравним $\sqrt{4a^2+3}$ с $\sqrt{a^2-a+1}$ и $\sqrt{4a^2+3}$ с $\sqrt{a^2+a+1}$. Получим, что $\sqrt{4a^2+3}$ наибольшая величина. Покажем выполнение неравенства треугольника:

$$\sqrt{4a^2+3}<\sqrt{a^2+a+1}+\sqrt{a^2-a+1},$$

$$4a^2+3<2a^2+2+2\sqrt{a^4+a^2+1}.$$

Это верно т.к.

$$2a^2+1<2\sqrt{a^4+a^2+1},$$

$$4a^4+4a^2+1<4a^4+4a^2+4,$$

$$1<4.$$

Следовательно, существует треугольник с представленными данными. Покажем, что площадь такого треугольника не зависит от a. Найдем косинус наибольшего угла

$$\cos\varphi=-\frac{2a^2+1}{2\sqrt{a^4+a^2+1}} \Rightarrow \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a^4+a^2+1}}.$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+a+1}\sqrt{a^2-a+1}\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{a^4+a^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

▷ **4.** Можно ли разделить числа $1, 2, \ldots, 2013$ на три непересекающиеся группы так, чтобы суммы чисел в этих группах образовывали арифметическую прогрессию?

Решение. Если a, b, c - арифметическая прогрессия, то $2b = a+c$, значит, $a+b+c \vdots 3$. Рассмотрим следующие непересекающиеся группы:

$$a = 1, 4, \ldots, 2011, 3k+1;$$

$$b = 2, 5, \ldots, 2012, 3k+2;$$

$$c = 3, 6, \ldots, 2013, 3k.$$

Очевидно, что $2b = a + c$.

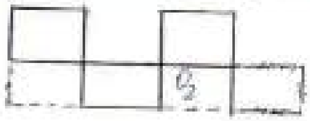
Ответ. Да.

▷ **5.** Построенная из 16 спичек фигура  не имеет центра симметрии. Переставьте не более 3 спичек так, чтобы получающаяся фигура имела центр симметрии. Найдите способы решения, приводящие к четырем различным центрам симметрии.

Решение.

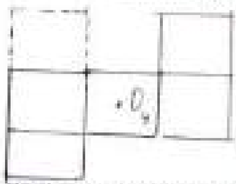
1 случай. Двигаем 1 спичку. Центр симметрии - точка O_1 - середина BE.

2 случай. Двигаем 3 спички. Центр симметрии точка O_2.



3 случай. Аналогичен случаю 2 только двигаем вправо.

4 случай. Двигаем 3 спички. Центр симметрии точка O_4 - центр квадрата.



▷ **6.** Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} xy + z = 2013, \\ x + yz = 2014. \end{cases}$$

Решение. (2)-(1), получим:

$$x - xy + yz - z = 1,$$

$$(1-y)(x-z) = 1.$$

По условию задачи x, y, z целые, следовательно, возможно два случая: $\begin{cases} 1-y=1, \\ x-z=1, \end{cases}$ $\begin{cases} 1-y=-1, \\ x-z=-1. \end{cases}$

Ответ. $(2014; 0; 2013)$.

▷ **7.** Найдите остаток от деления степени 2014^{2014} на 1914.

Решение.

$$2014^{2014} = (1914+100)^{2014} = 1914N + 100^{2014},$$

$$100^{2014} \vdots 2;\ 100^{2014} = (3 \cdot 33 + 1)^{2014} = 33M + 1 = 66M_1 + 34,$$

где $M = 2M_1 + 1$, следовательно при делении на 66 получаем остаток 34.

$100^{2014} = (3\cdot29+13)^{2014} = 29N+13^{2014} = 29N+169^{1007} = 29N+(29\cdot5+24)^{1007} = 29N_1+(29-5)^{1007} = 29N_2-5^{1007} = 29N_2-5(29-5)^{503} = 29N_3+5\cdot4^{503} = 29N_3+20\cdot16^{251} = 29N_3+320\cdot256^{125} = 29N_2+(29\cdot11+1)(29\cdot9-5)^{125} = 29N_4-5^{125} = 29N_4-5\cdot(29-4)^{62} = 29N_4-5\cdot4^{62} = 29N_4-5\cdot16(2\cdot29+6)^{20} = 29N_5-5\cdot16\cdot6^{20} = 29N_5-(29\cdot3-7)6^{20} = 29N_6+7\cdot6^{20} = 29N_6+7\cdot36(29\cdot7+13)^6 = 29N_7-9\cdot13^6 = 29N_7-9(29\cdot6-5)^3 = 29N_8+9\cdot5^3 = 29N_9+\mathbf{23}.$

Получили

$$100^{2014} = 66M_1 + 34. \; 100^{2014} = 29N_9 + 23.$$

Обозначим $100^{2014} = y$, получим $\begin{cases} y - 23 = 29M, \\ y - 34 = 66N. \end{cases}$ $29M - 66N = 11$, обозначим $M = 11M_1$, получим: $29M_1 - 6N = 1$, обозначим $M_1 = 2M_2 - 1$, тогда $29M_2 - 3N = 15$. Пусть $M_2 = 3M_3$, тогда $29M_3 = 5 + N$.

$y = 23 + 29 \cdot 11(6M_3 - 1) = 1914M_3 - 296$.

Ответ. 1618, (-296).

▷ **8.** Дан отрезок длиной $20\sqrt{3}$. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длиной $10\sqrt{2}$.

Решение. Строим прямоугольный треугольник с катетами $20\sqrt{3}$. Гипотенуза данного треугольника равна $20\sqrt{6}$. Строим прямоугольный треугольник с катетами $20\sqrt{3}$ и $20\sqrt{6}$. Гипотенуза второго треугольника равна 60. Строим третий прямоугольный треугольник с катетами 60, получаем, что его гипотенуза равна $60\sqrt{2}$. Делим этот отрезок на равные части, получим искомый отрезок $10\sqrt{2}$.

▷ **9.** Число $n^3 + 6n^2 + 12n$ оканчивается цифрой 2. Найдите еще две цифры предшествующие этой двойки.

Решение. $n^3 + 6n^2 + 12n = 10a + 2$, введем обозначение $n + 2 = p$, тогда $10^3p^3 = 10(a + 1)$, $(a + 1) = 10^2p^3$, $a = 10^2p^3 - 1 = (p^3 - 1) \cdot 100 + 99$. $10a + 2 = (p^3 - 1) \cdot 10^3 + 992$.

Ответ. 99.

▷ **10.** Дан треугольник ABC с углами 75^0, 75^0, 30^0. Каждую его вершину отразили симметрично относительно противоположной стороны и получили три точки M, N, K. Докажите, что треугольник MNK - правильный.

XXII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2014»
10 класс

⊳ **1.** При каких натуральных n уравнение

$$8\cos 6x\cos 2x + 4\sin^2 4x = 3$$

имеет на отрезке $[1, n]$ ровно 2014 решений?

Решение. Исходное уравнение перепишем:

$$4(\cos 8x + \cos 4x) + 4 - 4\cos^2 4x = 3,$$

$$4\cos^2 4x + 4\cos 4x - 3 = 0,$$

$$\cos 4x = \frac{1}{2},$$

$$x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},$$

Следовательно, чтобы исходное уравнение имело 2014 на отрезке $[1, n]$ n должно принимать значение 1583.

Ответ. 1583.

⊳ **2.** Какое наименьшее количество различных натуральных чисел нужно взять, чтобы из них наверняка можно было выбрать 4 числа, сумма которых делится на 4?

Решение. Покажем, что 6 чисел взять недостаточно. Остатки: 0, 0, 0, 1, 1, 1, тогда сумма любых четырех имеет остаток 1, 2 или 3, следовательно не $\vdots$ 4. Покажем, что 7 чисел достаточно.

1 случай: есть 4 одинаковых остатка;

2 случай: есть две тройки остатков 0, 0, 0, 1, 1, 1 или 0,0,0,2,2,2 или 0, 0, 0, 3, 3, 3 или 1, 1, 1, 2, 2,2 или 1, 1, 1, 3, 3,3 или 2, 2, 2, 3,3,3.

⊳ **3.** Найдите при каком a существует многочлен 100 степени, который удовлетворяет соотношению

$$P(x) - P(2014 - x) = 1914x + a.$$

Указание. Использовать четность и нечетность относительно точки 1007.

⊳ **4.** Дан остроугольный равнобедренный (но не равносторонний) треугольник ABC. Каждую его вершину отразили симметрично относительно противоположной стороны и получили точки, являющиеся вершинами правильного треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

⊳ **5.** Дан отрезок длина которого равна диагонали некоторого куба. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок равный диагонали грани этого куба.

Решение. Рассмотри куб со стороной a. Значит, нам дан отрезок длины $a\sqrt{3}$. Построим прямоугольный треугольник с катетами $a\sqrt{3}$. Гипотенуза данного треугольника имеет длину $a\sqrt{6}$. Построим прямоугольный треугольник с катетами $a\sqrt{3}$ и $a\sqrt{6}$, его гипотенуза имеет длину $3a$. Построим прямоугольный треугольник с катетами $3a$, его гипотенуза равна $3a\sqrt{2}$. Получившийся отрезок легко разделить, используя теорему Фалеса на три равные части и тем самым построить искомый отрезок $a\sqrt{2}$.

⊳ **6.** Найдите наименьшее трехзначное число n, при котором число

$$M = n^{12} + 4n^8 + 6n^6 + 24n^2 + 2014n + 2013$$

делится на 35.

Решение.

$$2013 = 35 \cdot 57 + 18,$$

$$M = n^8(n^4 + 4) + 6n^2(n^4 + 4) + 35 \cdot 57n + 19n + 35 \cdot 57 + 18 =$$
$$= n^2(n^4 + 4)(n^6 + 6) + 35(57n + 57) + 19n + 18 =$$

$$= (n^5 + 4n)(n^7 + 6n)) + 35(57n + 57) + 19n + 18, n^5 + 4n \vdots 5, \forall n, n^7 + 6n \vdots 7, \forall n.$$

Пусть $19n + 18 = 35k$, тогда $n = \dfrac{35k - 18}{19}$.

Ответ.

⊳ **7.** На листе в клетку (размер клетки 1×1 см) нарисовали прямоугольник, стороны которого проходят по линиям клеток, вершины находятся в узлах клеток. Сколько можно нарисовать прямоугольников площадью 20 см^2 вершины которых находятся в узлах клеток, если на горизонтальной стороне прямоугольника находится 19 узлов, а на вертикальной 14 узлов.

Решение. Рассмотрим прямоугольники типа $1\cdot 20; 20\cdot 1,\ 2\cdot 10; 10\cdot 2,\ 4\cdot 5; 5\cdot 4$ - таких прямоугольников 451.

Прямоугольников вида: $\sqrt{2}\times 10\sqrt{2}; 10\sqrt{2}\times\sqrt{2}$ — 48 штук.

Прямоугольников вида: $\sqrt{5}\times 4\sqrt{5}; 4\sqrt{5}\times\sqrt{5}$ — 290 штук.

Прямоугольников вида: $\sqrt{10}\times 2\sqrt{10}; 2\sqrt{10}\times\sqrt{10}$ — 412 штук.

Прямоугольников вида: $\sqrt{20}\times\sqrt{20}$ — 208 штуки.

Всего получаем, что прямоугольников удовлетворяющих условию задачи - 1409.

Ответ. 1409.

▷ **8.**Найдите сумму всех значений параметра a, при которых система

$$\begin{cases} (|x|+1)|y+1||x+y+a| = 27, \\ |x|+|y+1|+|x+y+a| = 8 \end{cases}$$

имеет наибольшее число решений.

Указание. Воспользуемся свойством $\frac{a+b+c}{3} = \sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow a=b=c$.

Введем обозначение $a=|x|+1,\ b=|y+1|, c=|x+y+a|$, тогда очевидно, что при $a_1=-1$ существует два решения $(2,2);(2,-4)$ и при $a_2=3$ тоже два решения $(-2,2);(-2,-4)$. Получаем, что $a_1+a_2=2$.

Ответ. 2.

▷ **9.** Сумма десяти натуральных чисел равна 2014. Какое наименьшее значение может принимать НОК?

Решение. Пусть $a_1,\dots,a_{10}$ — данные числа, причем $a_1\le a_2\le\dots\le a_{10}$, $a_1+a_2+\dots+a_{10}=2014$. Все числа равными быть не могут т.к. 2014 не делится на 10. Иначе НОК кратно меньшему из них - a_1. Наименьший коэффициент кратности - это 2, поэтому пусть $2a_1\le HOK$, $a_1\le\frac{1}{2}HOK$. Т.к. $a_2,\dots,a_{10}\le HOK$, значит, $2014=a_1+\dots+a_{10}\le\frac{1}{2}HOK+9HOK=\frac{19}{2}HOK$. $HOK\ge\frac{2\cdot 2014}{19}=212$. Наименьшее значение НОК= 212 достигается: $106, 212, 212, 212, 212, 212, 212, 212, 212, 212$.

Ответ. 212.

▷ **10.**В произвольном треугольнике ABC на сторонах BC, CA и AB отметили точки M, N, P такие, что $BM:MC=CN:NA=AP:PB=1:3$. Три прямые AM, BN, CP образуют треугольник $A_1B_1C_1$. Найдите восколько раз площадь исходного треугольника больше площади построенного треугольника.

Ответ. 3,25.

XXII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2014»
11 класс

▷ **1.** Найдите сумму всех решений уравнения

$$13cosec2x = ctg2x + ctg3x$$

удовлетворяющих неравенству $1914^0 \leq x \leq 2014^0$.

Решение.

$$x \neq \frac{\pi n}{2}, x \neq \frac{\pi n}{3}, n \in Z$$

$$\frac{13}{\sin 2x} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$$

$$13 \sin 3x = \cos 2x \sin 3x + \cos 3x \sin 2x$$

$$13 \sin 3x - \sin 5x = 0$$

$$13(3 \sin x - 4 \sin^3 x) - (16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x) = 0$$

$$\sin x(16 \sin^4 x + 32 \sin^2 x - 34) = 0$$

$$8 \sin^4 x + 16 \sin^2 x - 17 = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{5\sqrt{2} - 4}{4}$$

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{5\sqrt{2} - 4}}{2}$$

$$1914^\circ \leq x \leq 2014^\circ$$

$$360^\circ * 5 + 114^\circ \leq x \leq 360^\circ * 5 + 214^\circ$$

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}, \quad \sin 36^\circ = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\cos 24^\circ = \cos(60^\circ - 36^\circ) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{5} + 1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{1}{8}\left(\sqrt{5} + 1 + \sqrt{30 - 6\sqrt{5}}\right) >$$

$$> \frac{1}{8}\left(2,2 + 1 + \sqrt{30 - 6 * 2,2}\right) = \frac{1}{8}\left(3,2 + \sqrt{16,8}\right) > \frac{1}{8}(3,2 + 4,1) > 0,9$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{5\sqrt{2} - 4}}{2} = \cos(x - 90^\circ)$$

угол входит в интервал, если

$$x - 90^\circ > 24^\circ, \quad \cos(x - 90^\circ) < \cos 24^\circ$$

$$\frac{\sqrt{5\sqrt{2} - 4}}{2} < \frac{\sqrt{5 * 1,42 - 4}}{2} = \frac{\sqrt{3,1}}{2} < \frac{1,78}{2} = 0,89$$

$$\Rightarrow \quad \cos(x - 90^\circ) < 0,89 < 0,9 < \cos 24^\circ \Rightarrow \quad \cos(x - 90^\circ) < \cos 24^\circ$$

Тогда первый корень входит в интервал и

$$x = arcsin\left(\frac{\sqrt{5\sqrt{2} - 4}}{2}\right) + 5 * 360^\circ = arcsin\left(\frac{\sqrt{5\sqrt{2} - 4}}{2}\right) + 10\pi$$

Второй корень входит в интервал, если

$$x - 90^\circ > 34^\circ, \quad \cos(x - 90^\circ) < \cos 34^\circ$$

$$\frac{\sqrt{5\sqrt{2} - 4}}{2} > \frac{\sqrt{5 * 1,41 - 4}}{2} = \frac{\sqrt{3,05}}{2} > \frac{1,74}{2} = 0,87$$

$$\cos 34^\circ < \cos 30^\circ < 0,866$$

$$\cos(x - 90^\circ) > 0,87 > 0,866 > \cos 34^\circ$$

и второй корень не входит в интервал. Сумма корней $arcsin\left(\frac{\sqrt{5\sqrt{2}-4}}{2}\right)+10\pi$.

Ответ. $arcsin\left(\frac{\sqrt{5\sqrt{2}-4}}{2}\right)+10\pi$.

▷ **2.** Положительные числа a, b, c таковы, что $a^b = b^c = c^a$. Докажите, что $a = b = c$.

Доказательство. Прологарифмируем равенства: $b\ln a = c\ln b = a\ln c$.

1) Пусть $a = 1$. Тогда $b = c = 1$ и все числа равны.

2) Пусть $0 < a < 1$. Тогда $\ln a < 0$, следовательно $\ln b < 0$, $\ln c < 0$ и $0 < b < 1$, $0 < c < 1$. Положим $a \geq b \geq c$, $-b\ln b \leq -b\ln a \leq -a\ln a$, $-c\ln c \leq -c\ln b \leq -b\ln b$. Но $b\ln a = c\ln b$, поэтому $-b\ln a = -b\ln b = -c\ln b$ и $a = b = c$.

3) Пусть $a > 1$. Тогда $\ln a > 0$, следовательно $\ln b > 0$, $\ln c > 0$ и $b > 1$, $c > 1$.

Положим $a \geq b \geq c$, $b\ln b \leq b\ln a \leq a\ln a$, $c\ln c \leq c\ln b \leq b\ln b$. Но $b\ln a = c\ln b$, поэтому $b\ln a = b\ln b = c\ln b$ и $a = b = c$.

▷ **3.** Укажите по крайней мере 2 многочлена степени 99, которые удовлетворяют данному соотношению $P(x) + P(2014 - x) = 1914$.

Решение. Воспользуемся четностью/нечетностью функции относительно точки $x = 1007$. Чтобы равенство выполнялось, четная часть многочлена должна быть равна 957, а нечетная $(x-1007)^{99}$ или $(1007-x)^{99}$. Тогда искомые многочлены имеют вид: $P(x) = (x - 1007)^{99} + 957$, $\quad P(x) = (1007 - x)^{99} + 957$.

Ответ. $P(x) = (x - 1007)^{99} + 957$, $\quad P(x) = (1007 - x)^{99} + 957$.

▷ **4.** Можно ли разделить 2014 чисел: $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{2013}$ на три непересекающиеся группы так, чтобы суммы чисел в этих группах образовывали арифметическую прогрессию?

Решение. Разделим числа на три группы:

1) $2^{2k+1}, k = \overline{0, 1005}$

$$\sum_{k=0}^{1005} 2^{2k+1} = 2\sum_{k=0}^{1005} 4^k = 2\frac{4^{1006}-1}{3} = s_1$$

2) $2^{2k}, k = \overline{0, 1006}$

$$\sum_{k=0}^{1006} 2^{2k} = \sum_{k=0}^{1006} 4^k = \frac{4^{1007}-1}{3} = s_2$$

3) $2^{2013} = s_3$

$$s_3 + s_1 = 2 * s_2, \quad s_3 = 2s_2 - s_1$$

Действительно,

$$2s_2 - s_1 = 2\frac{4^{1007}-1}{3} - 2\frac{4^{1006}-1}{3} = \frac{2}{3}\left[4^{1007} - 1 - 4^{1006} + 1\right] = 2 * 4^{1006} = 2^{2013} = s_3$$

▷ **5.** При каком наименьшем натуральном n наверняка найдутся попарно различные натуральные числа a, b, c такие, что все три квадратных трехчлена

$$ax^2 + nbx + c, bx^2 + nax + c, ax^2 + ncx + b$$

имеют корни. При этом n укажите возможные значения a, b, c.

Решение. Пусть $a < b < c$, тогда $b \geq a + 1$, $c \geq a + 2$. Рассмотрим уравнение

$$cx^2 + nax + b = 0. \qquad (1)$$

Т.к. a меньше, чем b и c, то если это уравнение имеет решение, то тем более и остальные имеют решения.

Дискриминант уравнения (1) оценим при $b = a + 1$, $c = a + 2$,

$$D = n^2a^2 - 4bc = n^2a^2 - 4(a+1)(a+2)) = n^2a^2 - 4a^2 - 12a - 8 \geq 0$$

при

$$n^2 \geq \frac{4a_2 + 12a + 8}{a^2} = 4 + \frac{12}{a} + \frac{8}{a^2} > 4,$$
$$n^2 > 4, n > 2,$$

значит, $n = 3$.

Найдем при $n = 3$ a, b, c:

$$9 \geq 4 + \frac{12}{a} + \frac{8}{a^2},$$
$$5a^2 - 12a - 8 \geq 0, D_1 = 76, a_1 \approx 2,9, a_2 < 0.$$

Можно взять $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Действительно, уравнение $5x^2 + 3 \cdot 3x + 4 = 0$ имеет решения. Уменьшить $n = 3$ нельзя. Покажем это. При $n = 2$ имеем $cx^2 + 2ax + b = 0$, $D_1 = a^2 - bc < 0$ т.к. $a < b < c$.

Ответ. $n = 3 : a = 3, b = 4, c = 5$.

$\triangleright$ **6.** Найдите радиус вписанного в пирамиду $SABC$ шара, если известно, что вершина S проецируется в ортоцентр треугольника ABC, боковые ребра равны корням уравнения $\frac{t(t^2+14)}{t^2+1} = 4\sqrt{3}$ и один из углов при вершине S прямой.

Решение. Легко показать, что все углы при вершине S прямые. Обозначим ребра выходящие из вершины S через x, y, z, тогда $V_{SABC} = \frac{1}{6}xyz$, $S_{bok} = \frac{1}{2}(xy + xz + yz)$.

Перепишем уравнение $\frac{t(t^2+14)}{t^2+1} - 4\sqrt{3}$ в виде:

$$t^3 - 4\sqrt{3}t^2 + 14t - 4\sqrt{3} = 0.$$

Данное уравнение имеет три корня и по теореме Виетта получаем: $\begin{cases} x + y + z = 4\sqrt{3}, \\ xy + yz + zx = 14, \\ xyz = 4\sqrt{3}. \end{cases}$

$$r = \frac{3V_{SABC}}{S_{bok}} = \frac{2\sqrt{3}}{7 + S_{oc}} = \frac{2\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

$\triangleright$ **7.** Найдите по крайней мере два трехзначных n при котором число

$$M = n^{72} + 18n^{54} + 52n^{20} + 937n^2 + 15n + 56$$

делится на 2014.

Решение. Представим M в виде

$$M = (n^{19} + 18n)(n^{53} + 52n) + (n + 7)(n + 8).$$

$2014 = 2*19*53$, n должно быть четным, выражение $(n^{19} + 18n)(n^{53} + 52n)$ делится на 2014 нацело, для трехчлена $(n + 7)(n + 8)$ подбираем n так, чтобы он делился на 19 и на 53 одновременно, т.е. $n + 7 = 19p$, $n + 8 = 53q$ или $n + 7 = 53p$, $n + 8 = 19q$. Это выполняется при $n = 734$ и $n = 258$ соответственно.

Ответ. $n = 734$ и $n = 258$.

$\triangleright$ **8.** Вдоль стены в ряд стоят 16 урн. В них находятся в общей сложности 71 красный и синий шар, причем красных шаров больше, чем синих. В любых трех рядом стоящих урнах находится одинаковое количество как красных, так и синих шаров, при этом красных шаров меньше, чем синих. Сколько красных и синих шаров находится в 10 урне.

Решение. Пусть в первых трех урнах x_1, x_2, x_3 красных и y_1, y_2, y_3 синих шаров, соответственно. Тогда из условия следует, что в четвертой урне x_1 красных и y_1 синих шаров и т.д. с периодом 3. Значит, в 10-й урне x_1 красных шаров и y_1 синих шаров, т.е.

№1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	№8	№9	№10	№11	№12	№13	№14	№15	№16
x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1
y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1

Приходим к системе

$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 6y_1 + 5y_2 + 5y_3 = 71, \\ 6x_1 + 5x_2 + 5x_3 > 6y_1 + 5y_2 + 5y_3, \\ x_1 + x_2 + x_3 < y_1 + y_2 + y_3. \end{cases}$ Возможны следующие варианты:

1) $6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 36, 6y_1 + 5y_2 + 5y_3 = 35$.

x_1 может быть равно 1 или 6 (чтобы $5(x_2 + x_3)\vdots 5$. При $x_1 = 1$, $x_2 + x_3 = 6$. Всего красных шаров в первых трех урнах - 7. При $x_1 = 6$, $x_2 + x_3 = 0$, тогда всего красных шаров в первых трех урнах - 6.

y_1 может быть равно 0 или 5. При $y_1 = 0$, $y_2 + y_3 = 7$. Всего синих шаров в первых трех урнах - 7. При $y_1 = 5$, $y_2 + y_3 = 1$, тогда всего cbyb[шаров в первых трех урнах - 6.

В силу условия последнего условия системы подходит единственное: $x_1 = 6$, $x_2 = x_3 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 + y_3 = 7$, (сколько конкретно синих шаров во 2-ой и 3-й урнах неважно.)

2) $6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 37$, $6y_1 + 5y_2 + 5y_3 = 34$, тогда $x_1 = 2$, $x_2 + x_3 = 5$, всего красных шаров в первых трех урнах - 7; $y_1 = 4$, $y_2 + y_3 = 2$, всего синих шаров - 6. Т.к. 7 не меньше 6, то этот вариант не подходит.

3) $6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 38$, $6y_1 + 5y_2 + 5y_3 = 33$, тогда $x_1 = 3$, $x_2 + x_3 = 4$, всего красных шаров в первых трех урнах - 7; $y_1 = 3$, $y_2 + y_3 = 3$, всего синих шаров - 6. Т.к. 7 не меньше 6, то этот вариант не подходит.

4) $6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 39$, $6y_1 + 5y_2 + 5y_3 = 32$, тогда $x_1 = 4$, $x_2 + x_3 = 3$, всего красных шаров в первых трех урнах - 7; $y_1 = 2$, $y_2 + y_3 = 4$, всего синих шаров - 6. Т.к. 7 не меньше 6, то этот вариант не подходит.

5) $6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 40$, $6y_1 + 5y_2 + 5y_3 = 31$, тогда $x_1 = 0$, $x_2 + x_3 = 8$, всего красных шаров в первых трех урнах - 8 или $x_1 = 5$, $x_2 + x_3 = 2$, всего красных шаров в первых трех урнах - 7; $y_1 = 1$, $y_2 + y_3 = 5$, всего синих шаров - 6. Т.к. (7 или 8) не меньше 6, то этот вариант не подходит.

6) $6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 41$, $6y_1 + 5y_2 + 5y_3 = 30$, тогда $x_1 = 1$, $x_2 + x_3 = 7$, всего красных шаров в первых трех урнах - 8 или $x_1 = 6$, $x_2 + x_3 = 1$, всего красных шаров в первых трех урнах - 7; $y_1 = 0$, $y_2 + y_3 = 6$, всего синих шаров - 6 или $y_1 = 5$, $y_2 + y_3 = 0$, всего синих шаров - 5. Т.к. (7 или 8) не меньше (6 или 5), то этот вариант не подходит.

7) $6x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 42$, $6y_1 + 5y_2 + 5y_3 = 29$, тогда $x_1 = 2$, $x_2 + x_3 = 6$, всего красных шаров в первых трех урнах - 8 или $x_1 = 7$, $x_2 + x_3 = 0$, всего красных шаров в первых трех урнах - 7; $y_1 = 4$, $y_2 + y_3 = 1$, всего синих шаров - 5. Т.к. (7 или 8) не меньше 5, то этот вариант не подходит.

Далее:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{6(x_1 + x_2 + x_3)}{6} > \frac{6x_1 + 5x_2 + 5x_3}{6} > \frac{42}{6} = 7,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{5(y_1 + y_2 + y_3)}{5} < \frac{6y_1 + 5y_2 + 5y_3}{5} < \frac{30}{5} = 6,$$

следовательно, все остальные случаи не подходит. Эта оценка верна уже для шага 6).

Ответ. в 10 урне 6 красных шаров и 0 синих шаров.

▷ **9.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x[y] + \{y\} = 3, \\ (x^2+1)([y]^2 + \{y\}^2) = 9. \end{cases}$

Решение.

$$y = [y] + \{y\}, \quad 0 \le \{y\} < 1$$

$$[y] = a, \quad \{y\} = b$$

$$ax + b = 3, (x^2+1)(a^2+b^2) = 9, 0 \le b < 1$$

$$a^2x^2 + b^2 + 2abx = 9, a^2x^2 + b^2x^2 + a^2 + b^2 = 9, 0 \le b < 1$$

$$a^2 + b^2x^2 - 2abx = (a - bx)^2 = 0$$

$$b = \frac{a}{x}$$

$$ax + \frac{a}{x} = 3$$

$$ax^2 - 3x + a = 0$$

$$D = 9 - 4a^2 \ge 0$$

$$-1{,}5 \le a \le 1{,}5$$

a — целое, $a = 1$, -1 или 0. $a = 0$ не подходит, $a = 1$ дает $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $y = a + b = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $a = -1$ дает $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $y = a + b =$.

Ответ. $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{5-\sqrt{5}}{2})$; $(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$.

▷ **10.** Дана последовательность треугольников $\triangle_n$, $n = 1, 2, \ldots$ с вершинами в точках A_n, B_n, C_n. M_n— центр тяжести треугольника $\triangle_n$. Треугольник $\triangle_{n+1}$ с вершинами A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} получается из треугольника $\triangle_n$ следующим образом: A_nA_{n+1}, B_nB_{n+1}, C_nC_{n+1} — отрезки высот треугольника $\triangle_n$ такие, что

$$\frac{A_nA_{n+1}}{B_nC_n} = \frac{B_nB_{n+1}}{C_nA_n} = \frac{C_nC_{n+1}}{A_nB_n} = \frac{1}{100}.$$

Найти $\rho(M_{1914}, M_{2014})$— расстояние между центрами тяжести треугольников $\triangle_{1914}$ и $\triangle_{2014}$, если стороны треугольника $\triangle_1$ равны 19, 20 и 14.

Решение. Лемма. Пусть вершины $\triangle ABC$ имеют координаты $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, C_{x_3, y_3}, тогда точка M центр тяжести треугольника (точка пересечения медиан треугольника) имеет координаты $M(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$.

Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$ с вершинами $A_1(c\cos\beta, c\sin\beta)$, $B_1(0,0)$, $C_1(a,0)$, тогда $M_1(\frac{a+c\cos\beta}{3}, \frac{c\sin\beta}{3})$ и треугольник $A_2B_2C_2$ с вершинами $A_2(c\cos\beta, c\sin\beta - ka)$, $B_2(kb\sin\gamma, kb\cos\gamma)$, $C(a - kc\sin\beta, kc\cos\beta)$, тогда $M_2(\frac{a+c\cos\beta}{3}, \frac{c\sin\beta}{3})$. Причем $A_1A_2 = B_1C_1k = ak$, $B_1B_2 = A_1C_1k = bk$, $C_1C_2 = B_1A_1k = ck$. $\rho(M_1, M_2) = 0$, следовательно, $\forall a, b, c$ $\rho(M_{1914}, M_{2014}) = 0$.

Ответ. 0.