Вариант № 11

1. В состав автоматической линии по обработке корпусных деталей входило несколько одинаковых станков. Ежедневно линия обрабатывала 38880 деталей. После модернизации производства все станки линии заменили на более производительные, но тоже одинаковые, а их число увеличилось на 3. Автоматическая линия стала обрабатывать в день 44800 деталей. Сколько деталей в день обрабатывал каждый станок первоначально? (12 баллов)

2. Решите неравенство $4\sin x-\sqrt{\cos y}-\sqrt{\cos y-16\cos^2 x+12}\geq 2$. (12 баллов)

3. Найдите множество значений функции $y=f^{[2019]}(x)$, где $f(x)=\log_4\dfrac{\cos 2x-2\cos^2 x}{\cos x-1}$,

$f^{[n]}(x)=\underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n\ раз}(x)\ldots)$ для любого натурального числа n. (16 баллов)

4. В равнобедренном треугольнике ABC с снованием AC, боковая сторона AB равна 2, отрезок AD является биссектрисой. Через точку D проведена касательная DH к окружности, описанной около треугольника ADB, точка H лежит на стороне AC. Найдите площадь треугольника ABC, если $CD=\sqrt{2}\,CH$. (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(\cos 2x+14\cos x-14a)^7-(6a\cos x-4a^2-1)^7=(6a-14)\cos x+2\sin^2 x-4a^2+14a-2$$

имеет два различных решения на отрезке $\left[-\dfrac{2\pi}{3};\pi\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a. (20 баллов)

6. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $TABC$ плоскостью, проходящей через центр сферы описанной около пирамиды, и через середину бокового ребра TA и параллельной медиане AD боковой грани ATC, если стороны основания равны 4, а центр сферы делит высоту пирамиды в отношении 3:1, считая от вершины. (20 баллов)

Решение варианта №11

1. В состав автоматической линии по обработке корпусных деталей входило несколько одинаковых станков. Ежедневно линия обрабатывала 38880 деталей. После модернизации производства все станки линии заменили на более производительные, но тоже одинаковые, а их число увеличилось на 3. Автоматическая линия стала обрабатывать в день 44800 деталей. Сколько деталей в день обрабатывал каждый станок первоначально?

Решение: Пусть x – количество станков до модернизации, y – производительность каждого станка, т.е. количество деталей, обрабатываемых в день, z – производительность новых станков. Тогда имеем $xy = 38880 = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5,\ \ (x+3)z = 44800 = 2^8 \cdot 5^2 \cdot 7,\ \ x > 1,\ y < z,\ x, y, z \in N$. Поскольку $y < z$, то $\dfrac{38880}{x} < \dfrac{44800}{x+3},\ \ 38880(x+3) < 44800x,\ x > \dfrac{38880 \cdot 3}{5920} = \dfrac{2^5 \cdot 3^6 \cdot 5}{2^5 \cdot 5 \cdot 37} = \dfrac{3^6}{37} = 19\dfrac{26}{37},\quad x \ge 20.$

Поскольку $(x+3)z = 2^8 \cdot 5^2 \cdot 7$, то x не делится на 3, и $x = 2^\alpha \cdot 5^\beta$, где $\alpha \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\beta \in \{0, 1\}$.

1) $\beta = 0$, $x = 2^\alpha$, $\alpha \in \{5\}$. При $\alpha = 5$ имеем $x = 32, x+3 = 35,\ y = 3^5 \cdot 5 = 1215,\ z = 2^8 \cdot 5 = 1280$

2) $\beta = 1$, $x = 2^\alpha \cdot 5$, $\alpha \in \{2, 3, 4, 5\}$.

При $\alpha = 2$ имеем $x = 20, x+3 = 23,$ чего быть не может.

При $\alpha = 3$ имеем $x = 40, x+3 = 43,$ чего быть не может.

При $\alpha = 4$ имеем $x = 80, x+3 = 83,$ чего быть не может.

При $\alpha = 5$ имеем $x = 160, x+3 = 163,$ чего быть не может.

Ответ: 1215.

2. Решите неравенство $4\sin x - \sqrt{\cos y} - \sqrt{\cos y - 16\cos^2 x + 12} \ge 2.$

Решение:

Замена: $u = 4\sin x, \quad v = \cos y.$

$u - \sqrt{v} \ge \sqrt{u^2 + v - 4} + 2 \quad \Leftrightarrow \qquad u - \sqrt{v} \ge 0, \quad u^2 - 2\ \sqrt{\ }\ u \quad + \ v \quad ^2 \ge \ v\,4\sqrt{\quad + u\,4}\ ^2 - \ v \quad + \ 4$

$$\begin{cases} u \ge \sqrt{v} \ge 0, \\ -u\sqrt{v} \ge 2\sqrt{u^2 + v - 4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\sqrt{v} = 0, u \ge \sqrt{v} \ge 0, \\ u^2 + v - 4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2, \\ v = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0,5, \\ \cos y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \pi/6 + 2\pi n, n \in Z \\ y = \pi/2 + \pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Ответ: $((-1)^n \pi/6 + 2\pi n, \pi/2 + \pi k),\ \ n, k \in Z$.

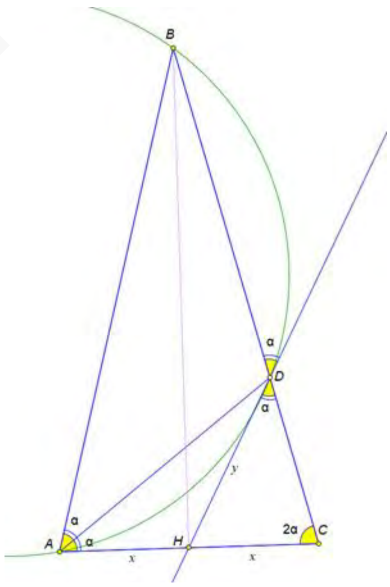
3. Найдите множество значений функции $y = f^{[2019]}(x)$, где $f(x) = \log_4 \dfrac{\cos 2x - 2\cos^2 x}{\cos x - 1}$, $f^{[n]}(x) = \underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n\ раз}(x)\ldots)$ для любого натурального числа n.

Решение: Найдем сначала множество значений функции $y_1 = f(x)$. Имеем

$f(x) = \log_4 \dfrac{\cos 2x - 2\cos^2 x}{\cos x - 1} = \log_4 \dfrac{1}{1 - \cos x}$. Функция $t = \cos x$ принимает значения $t \in [-1; 1]$.

Рассмотрим функцию $z = \dfrac{1}{1-t}$, определенную на полуинтервале $[-1; 1)$. Графиком этой функции является гипербола с асимптотами $t = 1$ и $z = 0$. Функция $z = \dfrac{1}{1-t}$ на промежутке $[-1; 1)$ неограниченно возрастает. Таким образом, минимальное значение z равно $\dfrac{1}{2}$, оно достигается в точке $t=-1$, и функция $z=\dfrac{1}{1-t}$ на промежутке $[-1;1)$ принимает все значения из промежутка $\left[\dfrac{1}{2};\infty\right)$. Функция $y_1=\log_4 z$ на промежутке $\left[\dfrac{1}{2};\infty\right)$ возрастает и принимает все значения из промежутка $\left[\log_4\dfrac{1}{2};\infty\right)=[-0{,}5;\infty)$. Функция $y_2=f(f(x))$ будет принимать те же значения, что и функция $y_2=f(y_1)$, если $y_1\in[-0,5;+\infty)$. Поскольку функция $t=\sin y_1$ при $y_1\in[-0,5;+\infty)$ принимает все значения из отрезка $[-1;1]$, то повторяя рассуждения, приведенные выше, получаем, что множеством значения функции $y_2=f(f(x))$ является промежуток $[-0,5;+\infty)$. И так далее, следовательно, множеством значений функции $y=f^{[2019]}(x)$ является промежуток $[-0,5;+\infty)$. **Ответ:** $E(y)=[-0,5;+\infty)$.

4. В равнобедренном треугольнике ABC с снованием AC, боковая сторона AB равна 2, отрезок AD является биссектрисой. Через точку D проведена касательная DH к окружности, описанной около треугольника ADB, точка H лежит на стороне AC. Найдите площадь треугольника ABC, если $CD=\sqrt{2}\,CH$.



Решение: Пусть $\angle CAD=\angle BAD=\alpha$, тогда по свойствам касательной $\angle CDP=\alpha$. Треугольники CDH и ACD подобны по двум углам. Имеем $\dfrac{CH}{CD}=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $CH=\dfrac{CD}{\sqrt{2}}, AC=CD\sqrt{2}, CH=\dfrac{AC}{2}$.

Обозначим $CH=AH=x, DH=y.$ Угол $\angle ADH=180^\circ-4\alpha$. Применим теорему синусов для треугольников ADH и HCD: $\dfrac{x}{\sin 4\alpha}=\dfrac{y}{\sin\alpha}$, $\dfrac{x}{\sin\alpha}=\dfrac{y}{\sin 2\alpha}$. Приходим к уравнению $\sin^2\alpha=\sin 2\alpha\sin 4\alpha$, $1-\cos 2\alpha=4\sin^2 2\alpha\cos 2\alpha$, $1-\cos 2\alpha=4(1-\cos^2 2\alpha)\cos 2\alpha$. Поскольку $2\alpha<90^\circ$, то $\cos 2\alpha\neq 1$. Имеем $4\cos^2 2\alpha+4\cos 2\alpha-1=0, \cos 2\alpha=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$. Тогда получаем

$$AH=AB\cos 2\alpha=\sqrt{2}-1,\quad BH=\sqrt{4-(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{1+2\sqrt{2}},$$

$$S_{ABC}=AH\cdot BH=\sqrt{(1+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=\sqrt{4\sqrt{2}-5}.$$

Ответ: $\sqrt{4\sqrt{2}-5}$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $(\cos 2x + 14\cos x - 14a)^7 - (6a\cos x - 4a^2 - 1)^7 = (6a-14)\cos x + 2\sin^2 x - 4a^2 + 14a - 2$ имеет два различных решения на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a.

Решение: $(\cos 2x + 14\cos x - 14a)^7 - (6a\cos x - 4a^2 - 1)^7 = (6a-14)\cos x + 2\sin^2 x - 4a^2 + 14a - 2$ $\Leftrightarrow$ $(\cos 2x + 14\cos x - 14a)^7 + \cos 2x + 14\cos x - 14a = (6a\cos x - 4a^2 - 1)^7 + 6a\cos x - 4a^2 - 1 \Leftrightarrow$

Рассмотрим функцию $f(t) = t^7 + t$. Функция $f(t)$ возрастает на всей числовой оси.

Пусть $u = \cos 2x + 14\cos x - 14a$, $v = 6a\cos x - 4a^2 - 1$. Тогда имеем уравнение $f(u) = f(v)$, и в силу строгой монотонности функции f приходим к уравнению $u = v$, т.е. $\cos 2x + 14\cos x - 14a = 6a\cos x - 4a^2 - 1$. Последнее уравнение эквивалентно следующему $\cos^2 x - (3a-7)\cos x + 2a^2 - 7a = 0$. Необходимо найти все значения параметра a, при которых это уравнение имеет два различных решения на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. Сделаем замену: $y = \cos x$.

Приходим к уравнению $y^2 - (3a-7)y + 2a^2 - 7a = 0$. Для выполнения условия задачи нужно, чтобы один корень этого уравнения принадлежал промежутку $[-0,5;1)$, а второй, если такой имеется, не принадлежал отрезку $[-1;1]$, или это уравнение должно иметь два различных решения, принадлежащих множеству $[-1;-0,5)\cup\{1\}$. Дискриминант уравнения $D = (3a-7)^2 - 8a^2 + 28a = (a-7)^2$. Единственное решение будет при $a = 7$, это решение $y = 7$. В остальных случаях имеем два различных решения $y_1 = 2a - 7$ и $y_2 = a$.

1) $-0,5 \le 2a - 7 < 1$, $a < -1$ или $a > 1$ $\Rightarrow$ $a \in [3,25;4)$, $\cos x = 2a - 7$, $x_1 = \arccos(2a-7)$, $x_2 = -\arccos(2a-7)$.

2) $-0,5 \le a < 1$, $2a - 7 < -1$ или $2a - 7 > 1$ $\Rightarrow$ $a \in [-0,5;1)$, $\cos x = a$, $x_1 = \arccos(a)$, $x_2 = -\arccos(a)$.

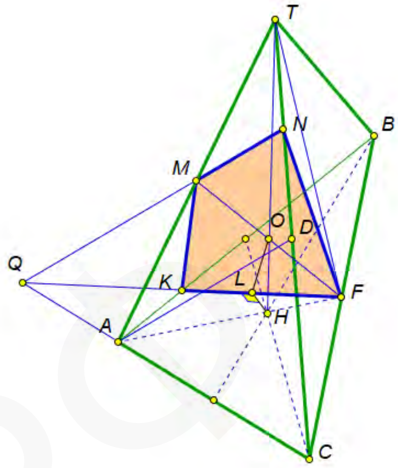
Два различных решения, принадлежащих множеству $[-1;-0,5)\cup\{1\}$, уравнение иметь не может.

Ответ: $a \in [3,25;4)$, $x_1 = \arccos(2a-7)$, $x_2 = -\arccos(2a-7)$;

$a \in [-0,5;1)$, $x_1 = \arccos(a)$, $x_2 = -\arccos(a)$.

6 Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $TABC$ плоскостью, проходящей через центр сферы описанной около пирамиды, и через середину бокового ребра TA и параллельной медиане AD боковой грани ATC, если стороны основания равны 4, а центр сферы делит высоту пирамиды в отношении 3:1, считая от вершины.

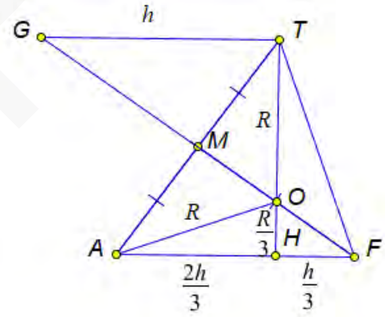
Решение: Центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания H; M - середина TA, F - середина BC. Точки M, O, F принадлежат плоскости ATF. Докажем, что они лежат на одной прямой. Высота $AF = h$ основания ABC точкой H делится в отношении 2:1, считая от вершины A, причем $AF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Проведем в плоскости ATF прямую $TG \parallel AF$, причем G принадлежит прямой MF. Треугольники GTM и FAM равны, $GT = AF = h.$ Пусть точка O_1 - точка пересечения GF и TH.

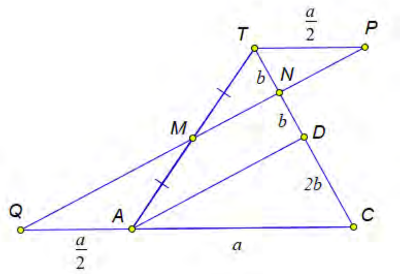
Треугольники GTO_1 и FHO_1 подобны, и $\frac{TO_1}{O_1H} = \frac{3}{1}$, и $O_1 = O.$

Пусть R - радиус описанной около пирамиды сферы.



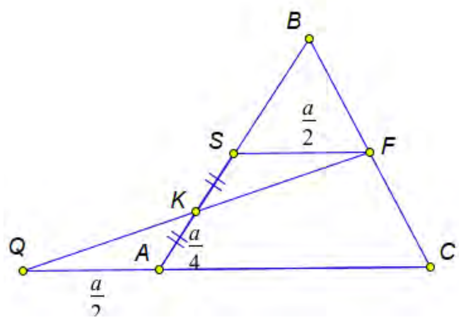
$\frac{TO}{OH} = \frac{3}{1}, TO = R, OH = \frac{R}{3}.$ По теореме Пифагора для треугольника AOH имеем $R^2 = R^2/9 + a^2/3,\ a^2 = 8R^2/3,\ a = 2,\ R = \sqrt{6}$.

Поскольку плоскость сечения параллельна медиане AD боковой грани ATC, то через точку M проведем прямую $MN \parallel AD,\ N \in TC,\ TN = ND = TC/4.$



Прямая MN принадлежит плоскости сечения. Точка Q - точка пересечения прямых MN и AC. В плоскости боковой грани ATC проведем прямую $TP \parallel AC,$ причем P принадлежит прямой $MN.$

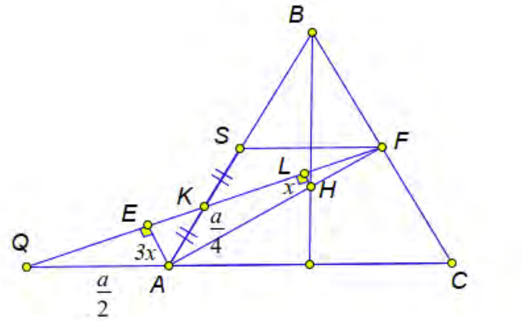
Треугольники TPN и CQN подобны, и $\frac{TP}{QC} = \frac{TN}{NC} = \frac{1}{3},$ треугольники QMA и PMT равны, $TP = QA = a/2.$



В плоскости основания ABC соединим точки Q и F, точка K - точка пересечения прямых QD и $AB.$ В треугольнике ABC проведем среднюю линию $FS.$ Треугольники QAK и FSK равны, $SK = KA = a/4.$

Четырехугольник $MNFK$ - искомое сечение.

Найдем угол наклона плоскости сечения к плоскости основания. Эти плоскости пересекаются по прямой QF. Из точек H и A проведем перпендикуляры HL и AE к прямой QF. $\frac{HD}{AD}=\frac{HL}{AE}=\frac{1}{3}$. Обозначим $HL=x$. Тогда $AE=3x$.



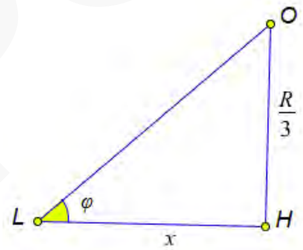
Рассмотрим треугольник QKA. Имеем $QA=a/2,\ AK=a/4,\ \angle QAK=120°$. По теореме косинусов получаем $QK^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{16}+\frac{a^2}{8}=\frac{7a^2}{16}$, $QK=\frac{a\sqrt{7}}{4}$. Вычисляя площадь треугольника QKA, имеем

$$S_{QKA}=\frac{1}{2}QK\cdot 3x,\ S_{QKA}=\frac{1}{2}QA\cdot AK\sin 60°,\ QK\cdot 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}QA\cdot AK,\ \frac{3\sqrt{7}}{4}x=\frac{a\sqrt{3}}{16},\ x=\frac{a}{4\sqrt{21}}.$$

Пусть φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

Тогда из треугольника OHL имеем $\operatorname{tg}\varphi=\frac{OH}{HL}=\frac{R}{3x}=\frac{4R\sqrt{21}}{3a}=\sqrt{14}$,

$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{15}}$.

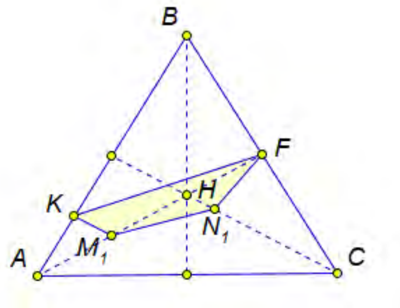


Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания.

$$S_{пр}=S_{ABC}-S_{KBF}-S_{AKM_1}-S_{DCN_1}-S_{AM_1N_1C}=$$

$$=S_{ABC}\left(1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{8}\right)=\frac{a^2\sqrt{3}}{24}.$$

$$S_{сеч}=\frac{S_{пр}}{\cos\varphi}=\frac{a^2\sqrt{3}}{24\cos\varphi}=\frac{16\sqrt{5}}{8}=2\sqrt{5}.$$



Ответ: $2\sqrt{5}$.