

Вариант № 8

1. Найдите натуральное число, которое имеет десять натуральных делителей (включая единицу и само число), два из которых простые, а сумма всех его натуральных делителей равна 186. (12 баллов)

2. Решите неравенство $\cos x - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 1$. (12 баллов)

3. Найдите множество значений функции $y = f^{[2019]}(x)$, где $f(x) = \log_2 \frac{\cos 2x + 2 \sin^2 x}{1 - \sin 3x}$,
 $f^{[n]}(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x)\dots)))}_{n \text{ раз}}$ для любого натурального числа n . (16 баллов)

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD , сторона AC равна $\sqrt{2}$. Описанная около треугольника ABD окружность проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ACD . Найдите площадь треугольника ACD , если $R_1 : R_2 = \sqrt{3}$, где R_1, R_2 - радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD соответственно. (20 баллов)

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$\sqrt[3]{6a \sin x + 4a^2 - 6a} - \sqrt[3]{\cos 2x + 8 \sin x + 9} = \cos 2x + (8 - 6a) \sin x - 4a^2 + 6a + 9$ имеет два различных решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a . (20 баллов)

6. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $TABC$ плоскостью, проходящей через центр сферы описанной около пирамиды, и через середины бокового ребра TA и стороны основания BC и параллельной апофеме TF боковой грани ATB , если радиус сферы равен 3. (20 баллов)

Решение варианта №8

1. Найдите натуральное число, которое имеет десять натуральных делителей (включая единицу и само число), два из которых простые, а сумма всех его натуральных делителей равна 186.

Решение: Искомое натуральное число n представимо в виде $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$, $1 < p_1 < p_2$, p_1, p_2 - простые, причем $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = 10$ (число всех делителей равно 10). Учитывая, что каждый из натуральных сомножителей в последнем равенстве не меньше 2, имеем два возможных случая: 1) $\alpha_1 + 1 = 2, \alpha_2 + 1 = 5$, или $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 4$, 2) $\alpha_1 + 1 = 5, \alpha_2 + 1 = 2$, или $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 1$.

1) $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 4, n = p_1 \cdot p_2^4$. Поскольку сумма всех делителей равна 186, то $(1 + p_1)(1 + p_2 + p_2^2 + p_2^3 + p_2^4) = 186$. Поскольку p_1, p_2 - простые числа, $1 < p_1 < p_2$, то $1 + p_1 \geq 3$, $1 + p_2 + p_2^2 + p_2^3 + p_2^4 \geq 121$, то ни одно разложение числа 186 на произведение двух натуральных сомножителей не подходит.

2) $\alpha_1 = 4, \alpha_2 = 1, n = p_1^4 \cdot p_2$. Поскольку сумма всех делителей равна 186, то $(1 + p_1 + p_1^2 + p_1^3 + p_1^4)(1 + p_2) = 186$. Поскольку $1 < p_1 < p_2$, то $1 + p_2 \geq 4$, $1 + p_1 + p_1^2 + p_1^3 + p_1^4 \geq 31$, то имеем $1 + p_1 + p_1^2 + p_1^3 + p_1^4 = 31, 1 + p_2 = 6$, или $p_1 = 2, p_2 = 5, n = 2^4 \cdot 5 = 80$.

Ответ: 80.

2. Решите неравенство $\cos x - \sqrt{\sin y} - \sqrt{\sin y - \sin^2 x} \geq 1$.

Решение:

Замена: $u = \cos x, v = \sin y$.

$$u - \sqrt{v} \geq \sqrt{u^2 + v - 1} + 1 \Leftrightarrow u - \sqrt{v} \geq 0, \quad u^2 - 2\sqrt{u} + v^2 \geq \sqrt{1v} + 2u^2 - v$$

$$\begin{cases} u \geq \sqrt{v} \geq 0, \\ -u\sqrt{v} \geq \sqrt{u^2 + v - 1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\sqrt{v} = 0, u \geq \sqrt{v} \geq 0, \\ u^2 + v - 1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1, \\ v = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ y = \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad \textbf{Ответ: } (2\pi n, \pi k), n, k \in \mathbb{Z}.$$

3. Найдите множество значений функции $y = f^{[2019]}(x)$, где $f(x) = \log_2 \frac{\cos 2x + 2 \sin^2 x}{1 - \sin 3x}$, $f^{[n]}(x) = \underbrace{f(f(f(\dots(f(x)\dots)))}_{n \text{ раз}}$ для любого натурального числа n .

Решение: Найдем сначала множество значений функции $y_1 = f(x)$. Имеем

$$f(x) = \log_2 \frac{\cos 2x + 2 \sin^2 x}{1 - \sin 3x} = \log_2 \frac{1}{1 - \sin 3x}. \text{ Функция } t = \sin 3x \text{ принимает значения } t \in [-1; 1].$$

Рассмотрим функцию $z = \frac{1}{1-t}$, определенную на полуинтервале $[-1; 1)$. Графиком этой

функции является гипербола с асимптотами $t = 1$ и $z = 0$. Функция $z = \frac{1}{1-t}$ на промежутке

$[-1; 1)$ неограниченно возрастает. Таким образом, минимальное значение z равно $\frac{1}{2}$, оно

достигается в точке $t = -1$, и функция $z = \frac{1}{1-t}$ на промежутке $[-1; 1)$ принимает все значения из промежутка $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$. Функция $y_1 = \log_2 z$ на промежутке $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$ возрастает и принимает все значения из промежутка $\left[\log_2 \frac{1}{2}; \infty\right) = [-1; \infty)$. Функция $y_2 = f(f(x))$ будет принимать те же значения, что и функция $y_2 = f(y_1)$, если $y_1 \in [-1; +\infty)$. Поскольку функция $t = \sin y_1$ при $y_1 \in [-1; +\infty)$ принимает все значения из отрезка $[-1; 1]$, то повторяя рассуждения, приведенные выше, получаем, что множеством значений функции $y_2 = f(f(x))$ является промежуток $[-1; +\infty)$. И так далее, следовательно, множеством значений функции $y = f^{[2019]}(x)$ является промежуток $[-1; +\infty)$. **Ответ:** $E(y) = [-1; +\infty)$.

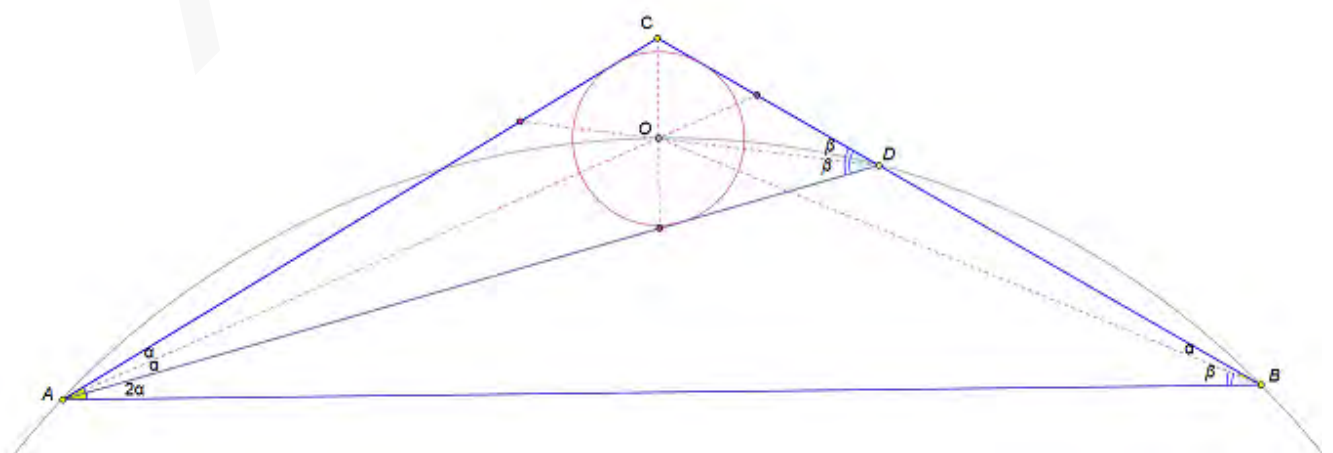
4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD , сторона AC равна $\sqrt{2}$. Описанная около треугольника ABD окружность проходит через центр окружности, вписанной в треугольник ACD . Найдите площадь треугольника ACD , если $R_1 : R_2 = \sqrt{3}$, где R_1, R_2 - радиусы окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD соответственно.

Решение: Пусть O - центр описанной около треугольника ACD окружности, $\angle CAO = \alpha$, $\angle ABO = \beta$. Имеем $\angle CAO = \angle OAD = \alpha$, $\angle DAB = 2\alpha$. По свойствам вписанных углов имеем $\angle DBO = \angle OAD = \alpha$, $\angle ABO = \angle ODA = \beta$, и $\angle ODA = \angle ODC = \beta$.

Для треугольника ACD имеем $2\alpha + 2\beta + \angle C = 180^\circ$. Для треугольника ABC имеем $4\alpha + \beta + \alpha + \angle C = 180^\circ$. Получаем $\beta = 3\alpha$, и $\angle BAC = \angle ABC = 4\alpha$, $\angle ADC = 6\alpha$. Треугольник ABC - равнобедренный, $AC = BC$.

Обозначим $\angle ABC = \varphi$ ($\varphi = 4\alpha$). Тогда $\angle ACB = 180^\circ - 2\varphi$. Согласно теореме синусов, имеем $2R_1 = \frac{AD}{\sin \varphi}$, $2R_2 = \frac{AD}{\sin 2\varphi}$. Поскольку $R_1 : R_2 = \sqrt{3}$, то $\sin 2\varphi = \sqrt{3} \sin \varphi$, $\cos \varphi = \sqrt{3}/2$, $\varphi = 30^\circ$. Итак, $AC = \sqrt{2}$, $\angle ACB = 120^\circ$, $\angle ADC = 45^\circ$, $\angle CAD = 15^\circ$. По теореме синусов имеем $\frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{AD}{\sin 120^\circ}$, $AD = \sqrt{3}$.

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} AC \cdot AD \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{12 - 6\sqrt{3}}}{4}. \quad \text{Ответ: } \frac{\sqrt{12 - 6\sqrt{3}}}{4}.$$



5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$\sqrt[3]{6a \sin x + 4a^2 - 6a} - \sqrt[3]{\cos 2x + 8 \sin x + 9} = \cos 2x + (8 - 6a) \sin x - 4a^2 + 6a + 9$ имеет два различных решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Укажите эти решения для каждого найденного a .

Решение: $\sqrt[3]{6a \sin x + 4a^2 - 6a} - \sqrt[3]{\cos 2x + 8 \sin x + 9} = \cos 2x + (8 - 6a) \sin x - 4a^2 + 6a + 9 \Leftrightarrow$
 $\sqrt[3]{6a \sin x + 4a^2 - 6a} + 6a \sin x + 4a^2 - 6a = \sqrt[3]{\cos 2x + 8 \sin x + 9} + \cos 2x + 8 \sin x + 9 \Leftrightarrow$

Рассмотрим функцию $f(t) = \sqrt[3]{t} + t$. Функция $f(t)$ возрастает на всей числовой оси.

Пусть $u = 6a \sin x + 4a^2 - 6a$, $v = \cos 2x + 8 \sin x + 9$. Тогда имеем уравнение $f(u) = f(v)$, и в силу строгой монотонности функции f приходим к уравнению $u = v$, т.е. $6a \sin x + 4a^2 - 6a = \cos 2x + 8 \sin x + 9$. Последнее уравнение эквивалентно следующему $\sin^2 x + (3a - 4) \sin x + 2a^2 - 3a - 5 = 0$. Необходимо найти все значения параметра a , при которых это уравнение имеет два различных решения на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$. Сделаем замену: $y = \sin x$.

Приходим к уравнению $y^2 + (3a - 4)y + 2a^2 - 3a - 5 = 0$. Для выполнения условия задачи нужно, чтобы один корень этого уравнения принадлежал промежутку $[-0,5; 1)$, а второй, если такой имеется, не принадлежал отрезку $[-1; 1]$, или это уравнение должно иметь два различных решения, принадлежащих множеству $[-1; -0,5) \cup \{1\}$. Дискриминант уравнения $D = (3a - 4)^2 - 8a^2 + 12a + 20 = (a - 6)^2$. Единственное решение будет при $a = 6$, это решение $y = -7$. В остальных случаях имеем два различных решения $y_1 = -2a + 5$ и $y_2 = -a - 1$.

1) $-0,5 \leq -2a + 5 < 1$, $-a - 1 < -1$ или $-a - 1 > 1 \Rightarrow a \in (2; 2,75]$, $\sin x = -2a + 5$, $x_1 = \arcsin(-2a + 5)$, $x_2 = \pi + \arcsin(2a - 5)$.

2) $-0,5 \leq -a - 1 < 1$, $-2a + 5 < -1$ или $-2a + 5 > 1 \Rightarrow a \in (-2; -0,5]$, $\sin x = -a - 1$, $x_1 = -\arcsin(a + 1)$, $x_2 = \pi + \arcsin(a + 1)$.

Два различных решения, принадлежащих множеству $[-1; -0,5) \cup \{1\}$, уравнение иметь не может.

Ответ: $a \in (2; 2,75]$, $x_1 = \arcsin(-2a + 5)$, $x_2 = \pi + \arcsin(2a - 5)$.

$a \in (-2; -0,5]$, $x_1 = -\arcsin(a + 1)$, $x_2 = \pi + \arcsin(a + 1)$.

6. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды $TABC$ плоскостью, проходящей через центр сферы описанной около пирамиды, и через середины бокового ребра TA и стороны основания BC и параллельной апофеме TF боковой грани ATB , если радиус сферы равен 3.

Решение: Центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания H ; M - середина TA , D - середина BC . Точки M , O , D принадлежат плоскости ATD и лежат на одной прямой. Высота $AD = h$ основания ABC точкой H делится в отношении 2:1, считая от вершины A , причем $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Пусть R - радиус описанной около пирамиды сферы.

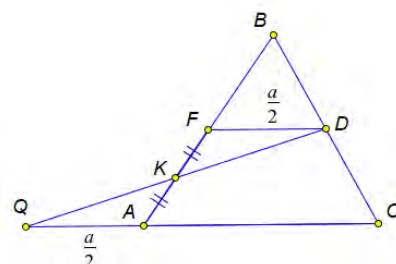
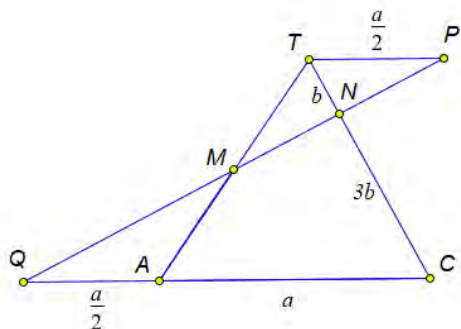
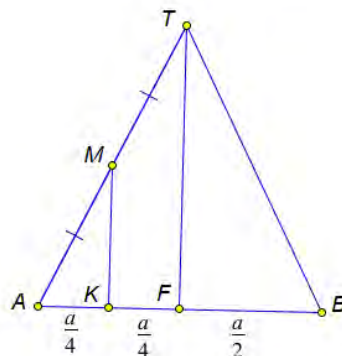
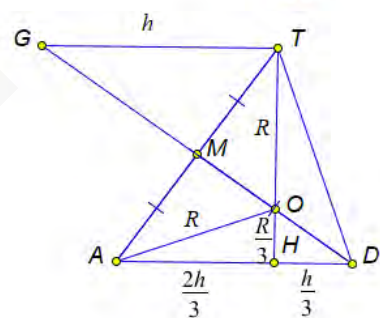
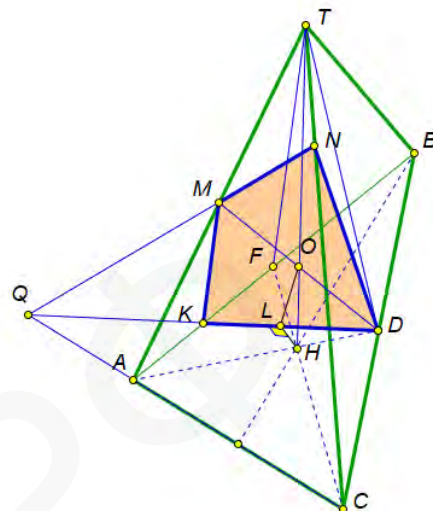
Проведем в плоскости ATD прямую $TG \parallel AD$, причем G принадлежит прямой MD . Треугольники GTM и DAM равны, $GT = AD = h$, треугольники GTO и DHO подобны, и $\frac{TO}{OH} = \frac{3}{1}$, $TO = R$, $OH = \frac{R}{3}$. По теореме Пифагора для треугольника AOH имеем $R^2 = R^2/9 + a^2/3$, $a^2 = 8R^2/3$, $R = 3$, $a = 2\sqrt{6}$.

Поскольку плоскость сечения параллельна апофеме TF боковой грани ATB , то через точку M проведем прямую $MK \parallel TF$, $K \in AB$, $AK = KF = a/4$.

Прямая DK принадлежит плоскости сечения. Точка Q - точка пересечения прямых DK и AC . Треугольники QAK и DFK равны, $FD = QA = a/2$.

В плоскости боковой грани ATC проведем прямую $TP \parallel AC$, причем P принадлежит прямой QM . Треугольники QMA и PMT равны, $TP = QA = a/2$. Пусть прямая QM пересекает ребро TC в точке N .

Треугольники TPN и CQN подобны, и $\frac{TN}{NC} = \frac{1}{3}$.



Найдем угол наклона плоскости сечения к плоскости основания. Эти плоскости пересекаются по прямой QD .

Из точек H и A проведем перпендикуляры HL и AE к прямой QD . $\frac{HD}{AD} = \frac{HL}{AE} = \frac{1}{3}$. Обозначим $HL = x$. Тогда

$$AE = 3x.$$

Рассмотрим треугольник QKA . Имеем $QA = a/2$, $AK = a/4$, $\angle QAK = 120^\circ$. По теореме

косинусов получаем $QK^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{8} = \frac{7a^2}{16}$, $QK = \frac{a\sqrt{7}}{4}$. Вычисляя площадь треугольника

$$QKA, \text{ имеем } S_{QKA} = \frac{1}{2} QK \cdot 3x, S_{QKA} = \frac{1}{2} QA \cdot AK \sin 60^\circ, QK \cdot 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} QA \cdot AK, \frac{3\sqrt{7}}{4} x = \frac{a\sqrt{3}}{16}, x = \frac{a}{4\sqrt{21}}.$$

Пусть φ - угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

Тогда из треугольника OHL имеем $\operatorname{tg} \varphi = \frac{OH}{HL} = \frac{R}{3x} = \frac{4R\sqrt{21}}{3a} = \sqrt{14}$,

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Найдем площадь проекции сечения на плоскость основания.

$$S_{np} = S_{ABC} - S_{KBD} - S_{AKM_1} - S_{DCN_1} - S_{AM_1N_1C} =$$

$$= S_{ABC} \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{8} \right) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{24}.$$

$$S_{сеч} = \frac{S_{np}}{\cos \varphi} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{24 \cos \varphi} = \frac{24\sqrt{5}}{8} = 3\sqrt{5}.$$

Ответ: $3\sqrt{5}$.

