Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Олимпиада школьников «Шаг в будущее»

МАТЕМАТИКА (заключительный этап)

2018-2019 учебный год

8 класс

Вариант - 1

1. *(15 баллов)* При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2+(m+1)x+2m-2=0$ будет наименьшей?

2. *(15 баллов)* Решите систему уравнений: $\begin{cases} y^2+x^2=2xy+4 \\ \dfrac{(y+2)\cdot(x-4)}{x^2-6x+8}=x-2 \end{cases}$

3. *(15 баллов)* В треугольнике ABC $\angle BAC=30°$, $\angle BCA=45°$. На стороне AB взята точка M так, что $AM=MB$. Найдите $\angle AMC$.

4. *(15 баллов)* Найдите, при каких значениях a уравнение $f(x)=p(x)$ имеет одно решение:

$$f(x)=\left|\frac{x^3+4x^2-x-4}{(x+2)(x+4)-3x-12}\right|$$

$$p(x)=\sqrt{x^2-8x+16}+a$$

5. *(20 баллов)* У Пети и Маши целое число рублей у каждого. Петя говорит Маше: "Если ты дашь мне 3 рубля, у меня будет в n раз больше рублей, чем у тебя". Маша отвечает: "Если ты дашь мне n рублей, у меня будет в 3 раза больше рублей, чем у тебя".
Какие натуральные значения может принимать n, если ребята говорят правду?

6. *(20 баллов)* В параллелограмме $ABCD$ точки M,K,L,N лежат на сторонах AB,BC,CD,AD соответственно. $AM:MB=CK:KB=CL:LD=AN:ND=1:3$. Точка O лежит внутри $ABCD$ так, что площади четырехугольников $OKCL$, $OLDN$, $ONAM$ равны 6, 24 и 12 соответственно, то есть $S_{OKCL}=6$, $S_{OLDN}=24$, $S_{ONAM}=12$. Найдите площадь четырехугольника $OMBK$.

Решение. 8 класс. Вариант 1

1. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения $x^2+(m+1)x+2m-2=0$ будет наименьшей? **(15 баллов)**
2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y^2+x^2=2xy+4 \\ \dfrac{(y+2)\cdot(x-4)}{x^2-6x+8}=x-2 \end{cases}$ **(15 баллов)**
3. В треугольнике АВС $\angle BAC=30°, \angle BCA=45°$. На стороне АВ взята точка М так, что АМ=МВ. Найти $\angle AMC$. **(15 баллов)**
4. Найдите, при каких a уравнение $f(x)=p(x)$ имеет одно решение:

$$f(x)=\left|\frac{x^3+4x^2-x-4}{(x+2)(x+4)-3x-12}\right|$$

$$p(x)=\sqrt{x^2-8x+16}+a$$

(15 баллов)

5. У Пети и Маши целое число рублей у каждого.
Он говорит ей: "Если ты дашь мне 3 рубля, у меня будет в n раз больше рублей, чем у тебя".
Она отвечает: "Если ты дашь мне n рублей, у меня будет в 3 раза больше рублей, чем у тебя".
Какие натуральные значения может принимать n, если ребята говорят правду? **(20 баллов)**
6. В параллелограмме $ABCD$ точки M, K, L, N лежат на сторонах AB, BC, CD, AD соответственно.
$AM:MB=CK:KB=CL:LD=AN:ND=1:4$. Точка O лежит внутри $ABCD$ так, что площади четырехугольников $OKCL, OLDN, ONAM$ равны 6, 24 и 12 соответственно $S_{OKCL}=6, S_{OLDN}=24, S_{ONAM}=12$. Найти площадь четырехугольника $OMBK$. **(20 баллов)**

Яков.рф

Решения и критерии.

1. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, но, согласно теореме Виета $\begin{cases} D\ge 0 \\ x_1+x_2=-(m+1) \\ x_1x_2=2m-2 \end{cases}$

.Тогда , с учетом того, что $D=(m+3)^2\ge 0$, имеем $x_1^2+x_2^2=$

$$(-(m+1))^2-2(2m-2)=m^2+2m+1-4(m-1)=m^2-2m+5=(m-1)^2+4$$

Откуда $y=(m-1)^2+4$ и $y_{наим}=4$ при $m=1$.

Ответ: для уравнения $x^2+(m+1)x+2m-2=0$ наименьшая сумма квадратов его корней равна 4 при $m=1$

Критерии проверки.

15 баллов	Верное обоснованное решение.
10 баллов	С учётом теоремы Виета верно выписано выражение для суммы квадратов корней, но допущена ошибка преобразования выражения
5 баллов	Верно выписана теорема Виета (с учетом D)
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

2. $\begin{cases} y^2-2xy+x^2=4 \\ \dfrac{(y+2)\cdot(x-4)}{(x-2)\cdot(x-4)}=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-x)^2-4=0 \\ y+2=(x-2)^2 \\ x\ne 2 \\ x\ne 4 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (y-x-2)\cdot(y-x+2)=0 \\ y+2=x^2-4x+4 \\ x\ne 2 \\ x\ne 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y = x+2 \\ x+2+2 = x^2-4x+4 \end{cases} \\ \begin{cases} y = x-2 \\ x-2+2 = x^2-4x+4 \end{cases}\end{array}\right. \\ x \neq 2 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y = x+2 \\ x^2-5x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = x-2 \\ x^2-5x+4 = 0 \end{cases}\end{array}\right. \\ x \neq 2 \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow .$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases} \boldsymbol{x = 0} \\ \boldsymbol{y = 2} \end{cases} \\ \begin{cases} \boldsymbol{x = 5} \\ \boldsymbol{y = 7} \end{cases} \\ \begin{cases} \boldsymbol{x = 1} \\ \boldsymbol{y = -1} \end{cases} \\ \begin{cases} \boldsymbol{x = 4} \\ \boldsymbol{y = 2} \end{cases}\end{array}\right. \\ \boldsymbol{x \neq 2} \\ \boldsymbol{x \neq 4} \end{cases}$$

Ответ: $\{(0;2);(5;7);(1;-1)\}$.

3. Проведем высоту BH. $\angle BCH = \angle CBH = 45°, \angle ABH = 60°$. Пусть BH=HC=$x$, тогда BC=$x\sqrt{2}$, AB=2$x$.
   $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{MB} = \sqrt{2}$, $\angle ABC$ – общий. Значит, $\Delta MBC \sim \Delta CBA$ по второму признаку. Из подобия следует, что $\angle BMC = 45°$. Тогда $\angle AMC = 135°$.

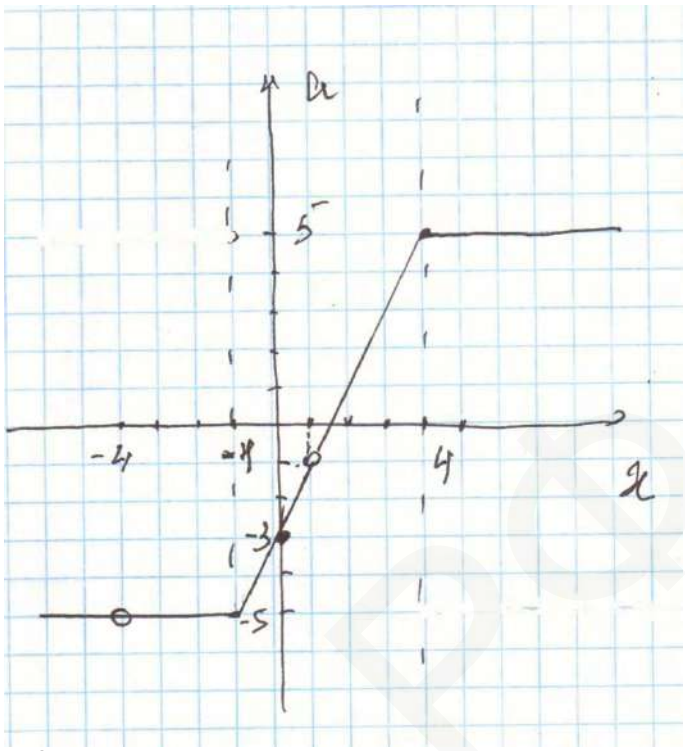
Ответ: $135°$.

15 баллов	Верное и обоснованное решение.
10 баллов	Проведена высота, правильно выражены стороны, найдены подобные треугольники, в использовании подобия ошибка в соответствующих углах.
5 баллов	Проведена высота, но подобные треугольники не найдены или найдены неверно
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

4. Решение:

Преобразуем выражение:

9класс.рф



$$\frac{x^3+4x^2-x-4}{(x+2)(x+4)-3x-12}=\frac{x^2*(x+4)-(x+4)}{(x+2)(x+4)-3(x+4)}==\frac{(x+4)(x-1)(x+1)}{(x+4)(x-1)}=x+1$$

$$f(x)=\left|\frac{x^3+4x^2-x-4}{(x+2)(x+4)-3x-12}\right|=|x+1|$$

$$D(f): x\neq -4, x\neq 1;$$

$p(x)=\sqrt{x^2-8x+16}+a=|x-4|+a$,

получим уравнение: $\boxed{|x+1|=|x-4|+a}$

решим его графически системе координат XOA:

$$\begin{cases} x<-1 \\ -x-1=-x+4+a \end{cases} <=> \begin{cases} x<-1 \\ a=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1\leq x<4 \\ x+1=-x+4+a \end{cases} <=> \begin{cases} 1\leq x<4 \\ a=2x-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 4 \\ x+1=x+4+a \end{cases} <=> \begin{cases} x\geq 4 \\ a=5 \end{cases}$$

Уравнение имеет 1 решение при

$a\in(-5;-1)\cup(-1;5)$;

Ответ: $a\in(-5;-1)\cup(-1;5)$;

15 баллов	Верное обоснованное решение
12 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при его аналитическом решение решении допущена вычислительная ошибка, не связанная с областью определения функции.

10 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение, но оно не решено или решено неверно.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

5. Решение: Пусть у Маши *x* рублей, у Пети *y* рублей , тогда

$n(x-3)=y+3$
$x+n=3(y-n)$

Выразим *x* из второго уравнения и подставим в первое:
$n(3y-4n-3)=y+3,$
$3ny-y=4n^2+3n+3$,
$y=(4n^2+3n+3):(3n-1)$

чтобы *y* было целым, $(4n^2+3n+3)$ должно делиться нацело на $(3n-1)$

$(4n^2+3n+3)\vdots(3n-1)$
$3(4n^2+3n+3)-4n(3n-1)\vdots(3n-1)$
$13n+9\vdots(3n-1)$
$3(13n+9)-13(3n-1)\vdots(3n-1)$
$40\vdots(3n-1)$

$(3n-1)$ является делителем 40 только при $n=1;2;3;7$
Проверим, являются ли *x* и *y* натуральными.
$n=1, y=5, x=11$
$n=2, y=5, x=7$
$n=3, y=6, x=6$
$n=7, y=11, x=5$

Ответ: 1;2;3;7.

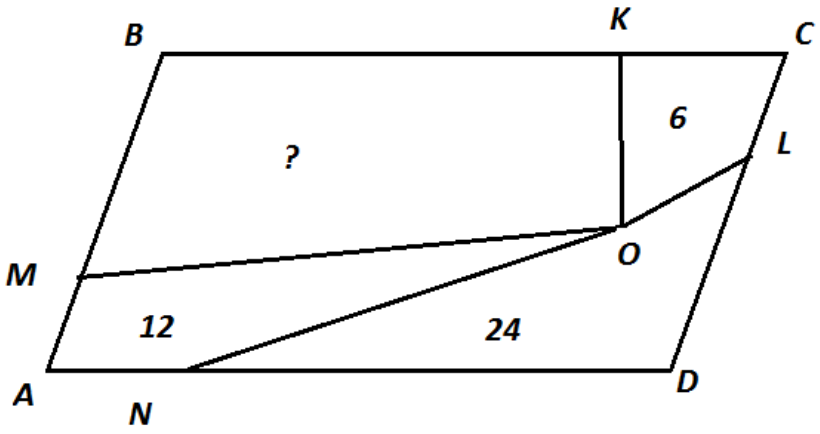
20 баллов	Полное обоснованное решение
15 баллов	Найдены значения n, доказано, что других значений нет, но не показано, почему эти значения соответствуют условию задачи.
12 баллов	Верный ход решения, потеряно одно значение n.
10 баллов	Верный ход решения, есть существенные продвижения, но значения n не найдены или найдены неверно.
5 баллов	Найдены верные решения, но не показано, что других значений n нет.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

6. Решение:

$$S\square ABCD = 4(S_{OKCL} + S_{ONAM}) = 4(6+12) = 72 \Rightarrow S_{OMBK} = 72-6-24-12 = 30$$

Ответ: 30.

ЕГЭ-Репетитор.рф



20 баллов	Полное обоснованное решение
15 баллов	При правильном ходе решения допущена вычислительная ошибка
10 баллов	Сделано дополнительное построение, проведены отрезки АО и ОС, доказано, что площадь параллелограмма равна сумме площадей четырехугольников. Дальнейшее решение неверно или отсутствует.
5 баллов	Получен верный ответ, но решение не обосновано.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

ЯГУ6ОВ.РФ

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Олимпиада школьников «Шаг в будущее»

МАТЕМАТИКА (заключительный этап)

2018-2019 учебный год

8 класс

Вариант - 3

1. **(15 баллов)** При каких значениях a системе уравнений
$$\begin{cases} 3x+2y=15a \\ \dfrac{1}{a}x+y=9 \end{cases}$$
удовлетворяет пара равных чисел? Для каждого такого a найдите решение системы.

2. **(15 баллов)** Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{y-x+1}{x^2-3x}=1 \\ y^2+5+2xy=6y+6x-x^2 \end{cases}$

3. **(15 баллов)** Произвольная точка M, лежащая внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$, площадь которого равна 36, соединена с его вершинами. Площади двух из шести образовавшихся треугольников AMB и CMD равны 3 и 9 соответственно. Найти площади оставшихся четырех треугольников.

4. **(15 баллов)** Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x)=p(x)$ имеет одно решение, если
$$f(x)=\left|\frac{x^3+x^2-4x-4}{(x-1)(x-3)+3x-5}\right|,$$
$$p(x)=\sqrt{x^2}+a.$$

5. **(20 баллов)** На стороне BC треугольника ABC выбрана точка K. Через вершину C и середину M отрезка AK проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке N так, что $AM^2=CM\cdot MN$. Найдите $\angle BKN$, если $\angle ABC=47°, \angle BCA=64°$.

6. **(20 баллов)** Ученик записал на доске целое число. Затем он в уме умножил его на 5/4, прибавил к результату 5/4 и записал ответ на доске. Потом он повторил эти два действия со вторым числом и записал на доске результат. Те же операции он выполнил с третьим, четвёртым и пятым числами. Могли ли все шесть чисел получиться целыми? Ответ обоснуйте.

Решение. 8 класс. Вариант 3

При каких значениях a системе уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y=15a \\ \dfrac{1}{a}x+y=9 \end{cases}$$

удовлетворяет пара равных чисел? Для каждого такого a найдите решение системы.(15 баллов)

1. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{y-x+1}{x^2-3x}=1 \\ y^2+5+2xy=6y+6x-x^2 \end{cases}$ (15 баллов)
2. Произвольная точка M, лежащая внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$, площадь которого равна 36, соединена с его вершинами. Площади двух из шести образовавшихся треугольников AMB и CMD равны 3 и 9 соответственно. Найти площади оставшихся четырех треугольников.(15 баллов)
3. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x)=p(x)$ имеет одно решение.

$$f(x)=\left|\frac{x^3+x^2-4x-4}{(x-1)(x-3)+3x-5}\right|$$

$$p(x)=\sqrt{x^2}+a \quad \text{(15 баллов)}$$

4. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка K. Через вершину C и середину M отрезка AK проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке N так, что $AM^2=CM\cdot MN$. Найдите $\angle BKN$, если $\angle ABC=47°, \angle BCA=64°$.(20 баллов)
5. Ученик записал на доске целое число. Затем он в уме умножил его на 5/4, прибавил к результату 5/4 и записал ответ на доске. Потом он повторил эти два действия со вторым числом и записал на доске результат. Те же операции он выполнил с третьим, четвёртым и пятым числами. Могли ли все шесть чисел получиться целыми? Ответ обоснуйте.(20 баллов)

1. Заметим, что при $a=0$, система не определена. Пусть решение системы имеет вид $(x_0;x_0)$. Тогда получим $\begin{cases}3x_0+2x_0=15a\\ \frac{1}{a}x_0+x_0=9\end{cases}$, то есть $\begin{cases}5x_0=15a\\ \frac{1+a}{a}\cdot x_0=9\end{cases}$, откуда $x_0=3a$. Преобразуем подстановкой второе уравнение системы. Получим $\frac{1+a}{a}\cdot 3a=9$. Решая уравнение с ограничением a не равно 0, получим что $a=2$. При этом решением системы будет точка $(6;6)$

Ответ: при $a=2$ решение системы $(6;6)$.

Баллы	**Условия выставления**
15 баллов	Полностью правильно решенная задача.
10 баллов	Верно найдено значение параметра, но допущена ошибка при вычислении координат точки – решения системы.
5 баллов	Верно найдена область определения параметра.
0 баллов	Во всех остальных случаях.

2. Преобразуем второе уравнение: $y^2+2xy+x^2-6y-6x+5=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (y+x)^2-6(y+x)+5=0\Leftrightarrow (y+x)^2-(y+x)-5(y+x)+5=0\Leftrightarrow$
$(y+x)\cdot(y+x-1)-5(y+x-1)=0\Leftrightarrow (y+x-1)\cdot(y+x-5)=0\Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{l}y=1-x\\ y=5-x\end{array}\right.$

Преобразуем первое уравнение: $\begin{cases}y-x+1=x^2-3x\\ x\neq 0\\ x\neq 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x^2-2x-1\\ x\neq 0\\ x\neq 3\end{cases}$.

Ягубов.рф

Решаем систему: $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 - x \\ 1 - x = x^2 - 2x - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 5 - x \\ 5 - x = x^2 - 2x - 1 \end{cases} \end{array}\right. \\ x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1 - x \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 5 - x \\ x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ x \neq 0 \\ x \neq 3 \end{cases}$. Получаем

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$. Последняя пара не удовлетворяет условию $x \neq 3$

Ответ: $\{(-1;2);(2;-1);(-2;7)\}$

Баллы	**Условия выставления**
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	Полностью решены все системы, но из ответа не исключено решение, не входящее в ОДЗ.
8	Второе уравнение верно преобразовано в два линейных уравнения, получены две системы, одна из которых решена верно (включая ОДЗ), а вторая – неверно из-за арифметической или алгебраической ошибки.
5	Второе уравнение верно преобразовано в два линейных уравнения, далее ни одна из двух получившихся систем не была доведена до верного ответа.
0	Решение не удовлетворяет ни одному из вышеперечисленных условий

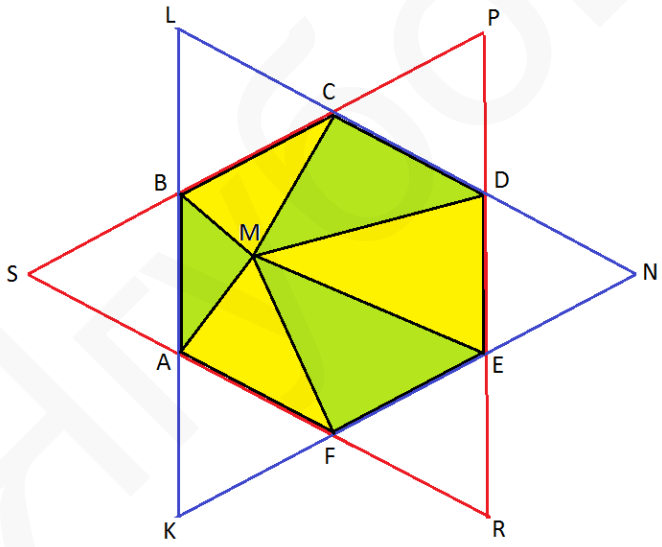
3. Сделаем дополнительное построение: $BC \cap ED = P$; $ED \cap AF = R$; $AF \cap DC = S$; $AB \cap CD = L$; $CD \cap EF = N$; $EF \cap AB = K$. Тогда равносторонний $\Delta KLN = \Delta SRP$. А, значит, сумма расстояний от точки M до прямых BC, ED и AF равна сумме расстояний от этой точки до прямых AB, CD и AF, а следовательно и $S_{\Delta AMB} + S_{\Delta CMD} + S_{\Delta FME} + S_{\Delta BMC} + S_{\Delta DME} + S_{\Delta AME} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF}$.

Кроме того, сумма расстояний от точки M до прямых AB и ED равна сумме расстояний до прямых BC и EF и равна сумме расстояний до прямых CD и AF, а, следовательно, и $S_{\Delta AMB} + S_{\Delta EMD} = S_{\Delta BMC} + S_{\Delta MEF} = S_{\Delta CMD} + S_{\Delta AMF} = \frac{1}{3} S_{ABCDEF}$.

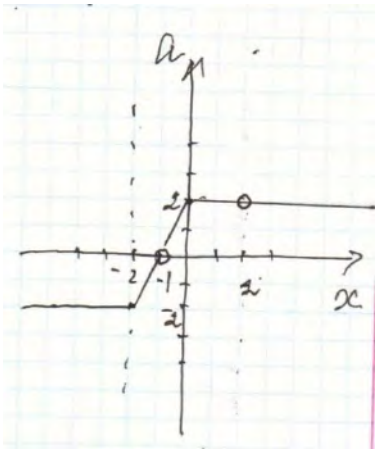
Получаем: $S_{\Delta MFE} = 36:2 - 3 - 9 = 6$, $S_{\Delta BMC} = 36:3 - S_{\Delta MFE} = 6$, $S_{\Delta DME} = 36:3 - S_{\Delta ABM} = 9$ и, аналогично, $S_{\Delta AMF} = 3$.

Ответ: 3, 6, 9, 6.

Баллы	**Условия выставления**
15 баллов	Полное, обоснованное решение
12 баллов	Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Доказано, что расстояние от точки M до прямых AB, CD и EF, равно расстоянию до прямых BC, DE и AF
5 баллов	Доказано, что расстояние от точки M до прямых AB и ED равно расстоянию до прямых BCи EF и равно расстоянию до прямых AF и CD
0 баллов	Решение не соответствует перечисленным выше критериям



4. Преобразуем выражение:



$$\frac{x^3+x^2-4x-4}{(x-1)(x-3)+3x-5}=\frac{(x+1)(x^2-4)}{x^2-x-2}$$
$$=\frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$f(x)=\left|\frac{x^3+x^2-4x-4}{(x-1)(x-3)+3x-5}\right|=|x+2|$$

$$D(f): x\neq 2, x\neq -1;$$

$p(x)=\sqrt{x^2}+a=|x|+a$, получим уравнение: $\boxed{|x+2|=|x|+a}$
решим его графически системе координат XOA:

$$\begin{cases} x<-2 \\ -x-2=-x+a \end{cases} <=> \begin{cases} x<-2 \\ a=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2\le x<0 \\ x+2=-x+a \end{cases} <=> \begin{cases} -2\le x<0 \\ a=2x+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x+2=x+a \end{cases} <=> \begin{cases} x\ge 0 \\ a=2x+2 \end{cases}$$

Уравнение имеет 1 решение при
$a\in(-2;0)\cup(0;2)$;

Ответ: $\boldsymbol{a\in(-2;0)\cup(0;2)}$.

Баллы	**Условия выставления**
15 баллов	Верное обоснованное решение
12 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при его аналитическом решение решении допущена вычислительная ошибка, не связанная с областью определения функции.
10 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение, но оно не решено или решено неверно.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

5. $AM^2=CM\cdot MN$ или $\frac{AM}{MN}=\frac{CM}{AM}$, *так как* $AM=MK$, *то* $\frac{AM}{MN}=\frac{CM}{MK}$.
Рассмотрим треугольники AMN и CMK. $\angle AMN=\angle CMK$,
$\frac{AM}{MN}=\frac{CM}{MK}$, следовательно, треугольники подобны по второму признаку. Из подобия следует, что $\angle ANC=\angle CKA$.

Рассмотрим треугольники BNC и BKA. $\angle B$- общий, $\angle BNC = \angle BKA$, как смежные с равными углами, следовательно, $\Delta ABK \sim \Delta CBN$ (по первому признаку). Из подобия треугольников следует, что $\frac{BK}{NB} = \frac{AB}{BC}$.

Рассмотрим треугольники BNK и BCA, $\frac{BK}{NB} = \frac{AB}{BC}$, $\angle B$- общий, следовательно, $\Delta BNK \sim \Delta CBN$ (по второму признаку). Из подобия треугольников следует, что$\angle BKN = \angle BAC$.

$$\angle BAC = 180° - (\angle ABC + \angle BCA) = 180° - (47° + 64°) = 69° = \angle BKN.$$

***Ответ*: $\angle BKN = 69°$.**

Баллы	**Условия выставления**
20 баллов	Верное полное решение.
15 баллов	Решение в целом верно, но в последнем пункте допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Доказано подобие треугольников BNC и BKA, дальнейшее решение отсутствует или неверно.
5 баллов	Доказано подобие треугольников AMN и CMK, дальнейшее решение отсутствует или неверно..
0 баллов	Решение неверно, например, неверно взято равенство соответствующих углов в подобных треугольниках.

6.Рассмотрим случай, когда все числа равны. $\frac{5}{4}n + \frac{5}{4} = n$(Решив это уравнение, получим ответ -5)Если первое число -5, тогда все числа будут равны -5. Так же подойдут все варианты, где первое число равно -5+1024n, n ∈ Z.

Ответ: могут.

Баллы	**Условия выставления**
20 баллов	Приведён верный пример, показано, что все числа будут целыми.
15 баллов	Приведён пример первого числа, но никак не показано, что остальные тоже будут целыми.
5 баллов	Составлено Диофантово уравнение, но не доказано, что оно имеет решение.
0 баллов	Остальные случаи.

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Олимпиада школьников «Шаг в будущее»

МАТЕМАТИКА (заключительный этап)

2018-2019 учебный год

8 класс

Вариант - 4

1. **(15 баллов)** При каких значениях m системе уравнений

$$\begin{cases} 8x + y = 14m \\ \dfrac{1}{m}x + 2y = 6 \end{cases}$$

удовлетворяет пара противоположных друг другу чисел? Для каждого такого m найдите решение системы.

2. **(15 баллов)** Решите систему уравнений: $\begin{cases} y^2 + x^2 + 2x = 2xy + 2y + 3 \\ \dfrac{y - x + 1}{x} = x - 3 \end{cases}$

3. **(15 баллов)** Произвольная точка M, лежащая внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$, соединена с его вершинами. Площади трех из шести образовавшихся треугольников AMB, CMD и MFE равны 6, 10 и 20 соответственно. Найти площади оставшихся треугольников.

4. **(15 баллов)** Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение, если

$$f(x) = \left| \frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{(x-3)(x+2) + 2(2x+1)} \right|,$$

$$p(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + a\ .$$

5. **(20 баллов)** На стороне BC треугольника ABC выбрана точка K. Через вершину C и середину M отрезка AK проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке N так, что $AM^2 = CM \cdot MN$. Найдите $\angle BNK$, если $\angle ABC = 72°, \angle BAC = 55°$.

6. **(20 баллов)** Ученик записал на доске целое число. Затем он в уме умножил его на 4/3, прибавил к результату 4/3 и записал ответ на доске. Потом он повторил эти два действия со вторым числом и записал на доске результат. Те же операции он выполнил с третьим, четвёртым и пятым числами. Могли ли все шесть чисел получиться целыми? Ответ обоснуйте.

ЯтоговРФ

Решение. 8 класс. Вариант 4

1. При каких значениях m системе уравнений
$$\begin{cases} 8x + y = 14m \\ \dfrac{1}{m}x + 2y = 6 \end{cases}$$
удовлетворяет пара противоположных друг другу чисел? Для каждого такого m найдите решение системы.(15 баллов)
2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y^2 + x^2 + 2x = 2xy + 2y + 3 \\ \dfrac{y - x + 1}{x} = x - 3 \end{cases}$ (15 баллов)
3. Произвольная точка M, лежащая внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$, соединена с его вершинами. Площади трех из шести образовавшихся треугольников AMB, CMD и MFE равны 6, 10 и 20 соответственно. Найти площади оставшихся треугольников.(15 баллов)
4. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение.
$$f(x) = \left| \frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{(x-3)(x+2) + 2(2x+1)} \right|$$
$$p(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + a$$ (15 баллов)
5. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка K. Через вершину C и середину M отрезка AK проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке N так, что $AM^2 = CM \cdot MN$. Найдите $\angle BNK$, если $\angle ABC = 72°, \angle BAC = 55°$.(20 баллов)
6. Ученик записал на доске целое число. Затем он в уме умножил его на 4/3, прибавил к результату 4/3 и записал ответ на доске. Потом он повторил эти два действия со вторым числом и записал на доске результат. Те же операции он выполнил с третьим, четвёртым и пятым числами. Могли ли все шесть чисел получиться целыми? Ответ обоснуйте.(20 баллов)

1. Заметим, что при $m=0$, система не определена. Пусть решение системы имеет вид $(x_0;x_0)$. Тогда получим $\begin{cases}8x_0-x_0=14m\\ \frac{1}{m}x_0-2x_0=6\end{cases}$, то есть $\begin{cases}7x_0=14m\\ \frac{1-2m}{m}\cdot x_0=6\end{cases}$, откуда $x_0=2m$. Преобразуем подстановкой второе уравнение системы. Получим $\frac{1-2m}{m}\cdot 2m=6$. Решая уравнение с ограничением m не равно 0, получим что $m=-1$. При этом решением системы будет точка $(-2;2)$

Ответ: при $m=-1$ решение системы $(-2;2)$.

Баллы	**Условия выставления**
15 баллов	Полностью правильно решенная задача
10 баллов	Верно найдено значение параметра, но допущена ошибка при вычислении координат точки – решения системы.
5 баллов	Верно найдена область определения параметра
0 баллов	Во всех остальных случаях

2. Преобразуем первое уравнение: $y^2-2xy+x^2+2x-2y-3=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y-x)^2-2(y-x)-3=0\Leftrightarrow (y-x)^2+(y-x)-3(y-x)-3=0\Leftrightarrow$

$(y-x)\cdot(y-x+1)-3\cdot(y-x+1)=0\Leftrightarrow (y-x+1)\cdot(\mathrm{y-x-3})=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y-x=-1\\ y-x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l}y=x-1\\ y=x+3\end{array}\right.$. Преобразуем второе уравнение: $\begin{cases}y-x+1=x^2-3x\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x^2-2x-1\\ x\neq 0\end{cases}$.

А теперь решим систему: $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1-x+1=x^2-3x\\ y=x-1\end{cases}\\ \begin{cases}x+3-x+1=x^2-3x\\ y=x+3\end{cases}\end{array}\right.\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-3x=0\\ y=x-1\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-3x=4\\ y=x+3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\\ x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\ y=2\end{cases}\\ \begin{cases}x=4\\ y=7\end{cases}\end{array}\right.\\ x\neq 0\end{cases}$.

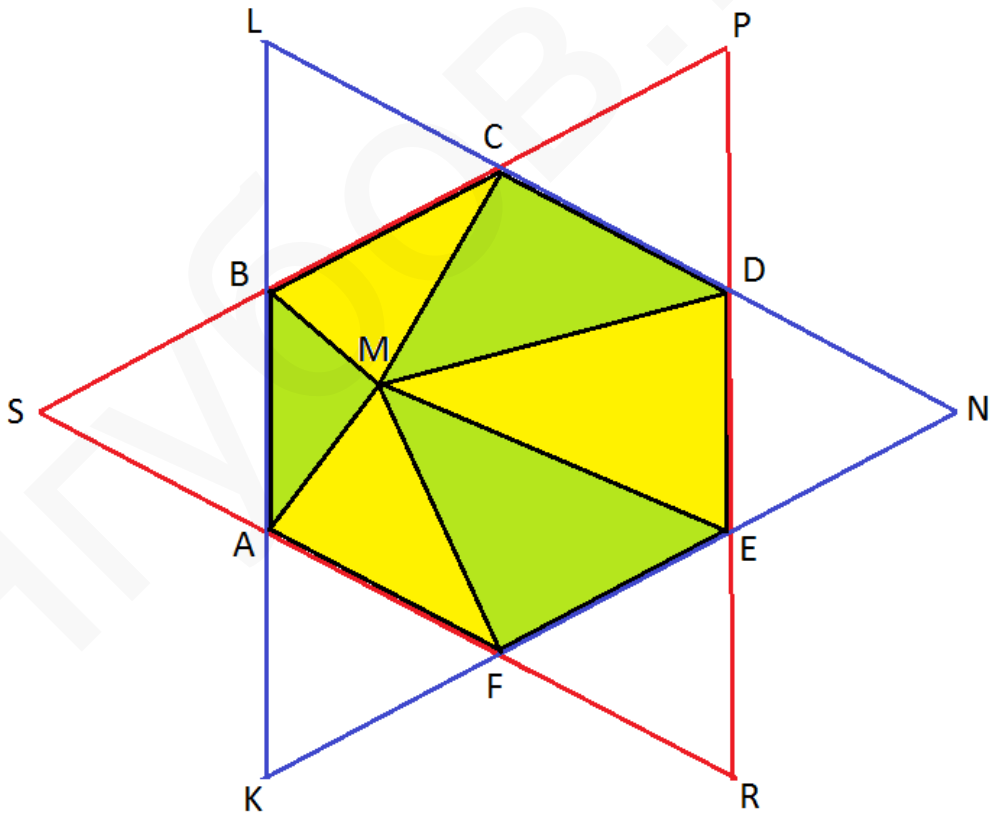
Первая пара не удовлетворяет условию $x\neq 0$.

Ответ: $\{(-1;2);(3;2);(4;7)\}$.

Баллы	Условия выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	Полностью решены все системы, но из ответа не исключено решение, не входящее в ОДЗ.
8	Первое уравнение верно преобразовано в два линейных уравнения, получены две системы, одна из которых решена верно (включая ОДЗ), а вторая – неверно из-за арифметической или алгебраической ошибки.
5	Первое уравнение верно преобразовано в два линейных уравнения, далее ни одна из двух получившихся систем не была доведена до верного ответа.
0	Решение не удовлетворяет ни одному из вышеперечисленных условий

3. Вариант 4. Произвольная точка M, лежащая внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$, соединена с его вершинами. Площади трех из шести образовавшихся треугольников $\triangle AMB$, $\triangle CMD$ и $\triangle MFE$ равны 6, 10 и 20 соответственно. Найти площади оставшихся треугольников.

Ответ: 4, 18, 14.



Решение: Сделаем дополнительное построение: $BC \cap ED = P$; $ED \cap AF = R$; $AF \cap BC = S$; $AB \cap CD = L$; $CD \cap EF = N$; $EF \cap AB = K$. Тогда равносторонний $\triangle KLN = \triangle SRP$. А значит, сумма расстояний от точки M до прямых BC, ED и AF равна сумме расстояний от этой точки до прямых AB, CD и EF, а

следовательно и

$S_{\triangle AMB} + S_{\triangle CMD} + S_{\triangle FME} = S_{\triangle BMC} + S_{\triangle DME} + S_{\triangle AMF} = \frac{1}{2} S_{ABCDEF} = 36.$ Кроме того, сумма расстояний от точки M до прямых AB и ED равна сумме расстояний до прямых BC и EF и равна сумме расстояний до прямых CD и AF, а следовательно и

$$S_{\triangle ABM} + S_{\triangle EMD} = S_{\triangle BMC} + S_{\triangle EMF} = S_{\triangle CMD} + S_{\triangle AFM} = \frac{1}{3} S_{ABCDEF} = 2 \cdot 36 : 3 = 24.$$

Значит $S_{\triangle DME} = 24 - 6 = 18,\ S_{\triangle AMF} = 24 - 10 = 14,\ S_{\triangle BCM} = 24 - 20 = 4.$

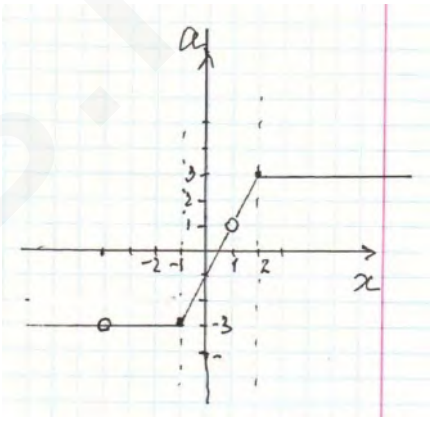
Ответ: 4, 18, 14.

4. Преобразуем выражение:

$$\frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{(x-3)(x+2) + 2(2x+1)} = \frac{(x+4) * (x^2-1)}{x^2 + 3x - 4} = \frac{(x+4)(x-1)(x+1)}{(x+4)(x-1)}$$

$$f(x) = \left| \frac{x^3 + 4x^2 - x - 4}{(x-3)(x+2) + 2(2x+1)} \right| = |x+1|$$

$D(f): x \neq -4, x \neq 1;$



$p(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + a = |x-2| +$ a,

получим уравнение: $\boxed{|x+1| = |x-2| + a}$

решим его графически системе координат XOA:

$$\begin{cases} x < -1 \\ -x - 1 = -x + 2 + a \end{cases} <=> \begin{cases} x < -1 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ x + 1 = -x + 2 + a \end{cases} <=> \begin{cases} -1 \leq x < 2 \\ a = 2x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x + 1 = x - 2 + a \end{cases} <=> \begin{cases} x \geq 2 \\ a = 3 \end{cases}$$

Уравнение имеет 1 решение при $a \in (-3; 1) \cup (1; 3)$.

Ответ: $\boldsymbol{a \in (-3; 1) \cup (1; 3)}$.

Баллы	Условия выставления
15 баллов	Верное обоснованное решение
12 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при его аналитическом решение решении допущена вычислительная ошибка, не связанная с областью определения функции.
10 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение, но оно не решено или решено неверно.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

5. $AM^2 = CM \cdot MN$ или $\frac{AM}{MN} = \frac{CM}{AM}$, *так как* $AM = MK$, *то* $\frac{AM}{MN} = \frac{CM}{MK}$.
Рассмотрим треугольники AMN и CMK. $\angle AMN = \angle CMK$, $\frac{AM}{MN} = \frac{CM}{MK}$, следовательно, треугольники подобны по второму признаку. Из подобия следует, что $\angle ANC = \angle CKA$.
Рассмотрим треугольники BNC и BKA. $\angle B$- общий, $\angle BNC = \angle BKA$, как смежные с равными углами, следовательно, $\Delta ABK \sim \Delta CBN$ (по первому признаку). Из подобия треугольников следует, что $\frac{BK}{NB} = \frac{AB}{BC}$.
Рассмотрим треугольники BNK и BCA, $\frac{BK}{NB} = \frac{AB}{BC}$, $\angle B$- общий, следовательно, $\Delta BNK \sim \Delta CBN$ (по второму признаку). Из подобия треугольников следует, что$\angle BNK = \angle BCA$.

$$\angle BCA = 180° - (\angle ABC + \angle BAC) = 180° - (55° + 72°) = 53° = \angle BNK.$$

Ответ: $\boldsymbol{\angle BNK = 53°}$.

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Верное полное решение.
15 баллов	Решение в целом верно, но в последнем пункте допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Доказано подобие треугольников BNC и BKA, дальнейшее решение отсутствует или неверно.
5 баллов	Доказано подобие треугольников AMN и CMK, дальнейшее решение отсутствует или неверно..
0 баллов	Решение неверно, например, неверно взято равенство соответствующих углов в подобных треугольниках.

6. Рассмотрим случай, когда все числа равны. $\frac{4}{3}n + \frac{4}{3} = n$. (Решив это уравнение, получим ответ -4) Если первое число -4, тогда все числа будут равны -4. Так же подойдут все варианты, где первое число равно -4+243n, n ∈Z.
Ответ: могут.

Баллы	Условия выставления
20 баллов	Приведён верный пример, показано, что все числа будут целыми.
15 баллов	Приведён пример первого числа, но никак не показано, что остальные тоже будут целыми.
5 баллов	Составлено Диофантово уравнение, но не доказано, что оно имеет решение.
0 баллов	Остальные случаи.

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Олимпиада школьников «Шаг в будущее»

МАТЕМАТИКА (заключительный этап)

2018-2019 учебный год

8 класс

Вариант - 5

1. *(15 баллов)* При каких значениях параметра k на прямой $y = kx - 3$ есть хотя бы одна точка с равными положительными координатами?

2. *(15 баллов)* Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{y^2 - 6y + 5}{x + 4} = x \\ y = x^2 + 4x + 1 \end{cases}$.

3. *(15 баллов)* В треугольнике MPK MK=4, $\angle PMK = 60°$, $\angle PKM = 45°$. MM_1 и KK_1 - высоты треугольника MPK. Из вершин M и K к прямой M_1K_1 проведены перпендикуляры ME и KH. Найдите длины отрезков EK_1 и M_1H.

4. *(15 баллов)* Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение, если

$$f(x) = \left| \frac{x^3 - x^2 - 16x + 16}{(x-2)(x+3) + 2(x+1)} \right|$$

$$p(x) = \sqrt{x^2 + 10x + 25} + a$$

5. *(20 баллов)* Про четыре натуральных числа a, b, c, d известно, что они являются квадратами различных натуральных чисел. Могут ли числа $a^2 + 2cd + b^2$ и $c^2 + 2ab + d^2$ также являться квадратами натуральных чисел?

6. *(20 баллов)* В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M делят сторону BC, а точки N, E, F сторону AD на четыре равные части соответственно. Найти площади четырехугольников $ABKN$ и $LMFE$, если площади четырехугольников $KLEN$ и $FMCD$ равны 12 и 24 соответственно.

Лучев.рф

Решения (8-й класс) Вариант 5

1. При каких значениях параметра k на прямой $y = kx - 3$ есть хотя бы одна точка с равными положительными координатами?(15 баллов)
2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} \dfrac{y^2 - 6y + 5}{x + 4} = x \\ y = x^2 + 4x + 1 \end{cases}$.(15 баллов)
3. В треугольнике *MPK MK*=4, $\angle PMK = 60°, \angle PKM = 45°$. MM_1 *и* KK_1 - высоты треугольника *MPK*. Из вершин *M* и *K* к прямой M_1K_1 проведены перпендикуляры *ME* и *KH*. Найдите длины отрезков EK_1 *и* M_1H.(15 баллов)
4. Найдите, при каких значениях параметра *a* уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение.

$$f(x) = \left| \frac{x^3 - x^2 - 16x + 16}{(x-2)(x+3) + 2(x+1)} \right|$$
$$p(x) = \sqrt{x^2 + 10x + 25} + a$$

(15 баллов)

5. Про четыре натуральных числа *a, b, c, d* известно, что они являются квадратами различных натуральных чисел. Могут ли числа $a^2 + 2cd + b^2$и $c^2 + 2ab + d^2$ также являться квадратами натуральных чисел?(20 баллов)
6. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* точки K, L, M делят сторону BC, а точки N, E, F сторону AD на четыре равные части соответственно. Найти площади четырехугольников $ABKN$ и $LMFE$, если площади четырехугольников $KLEN$ и $FMCD$ равны 12 и 24 соответственно. (20 баллов)

Яуроки.рф

Решения.

Вариант 5.

1. Предположим, что такая точка существует и её координаты $(x_0; x_o)$. Тогда должны выполняться следующие условия $x_0 > 0$ и эта точка должна лежать на прямой, то есть её координаты должны удовлетворять уравнению $y = kx - 3$. Выпишем систему условий и решим её.

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_0 = kx_0 - 3 \end{cases}$$

Решая уравнение, получим

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = 1 \\ 0 \cdot x_0 = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} k \in R \setminus \{1\} \\ x_0 = \dfrac{3}{k-1} \end{cases} \end{array}\right.$$

Откуда из первой системы получаем пустое множество, а из второй получим, что $x_0 = \dfrac{3}{k-1}$ при k не равном 1. С учетом условия, что $x_0 > 0$, получим, что $\dfrac{3}{k-1} > 0$, откуда , с учётом знака знаменателя $k > 1$.

Ответ: $k > 1$

15 баллов	Полностью правильно решенная задача
10 баллов	При решении системы допущена арифметическая ошибка
5 баллов	Верно составлена система условий
0 баллов	Решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям.

2. Преобразуем первое уравнение:

$$\begin{cases} y^2 - 6y + 5 = x^2 + 4x \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 6y + 9 = x^2 + 4x + 4 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (y-3)^2 - (x+2)^2 = 0 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y - 3 - x - 2) \cdot (\mathrm{y} - 3 + \mathrm{x} + 2) = 0 \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} y = x+5 \\ y = x-1 \end{array}\right. \\ x \neq -4 \end{cases}$$ А теперь – система: $$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x+5 \\ x+5 = x^2+4x+1 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1-x \\ 1-x = x^2+4x+1 \end{cases} \end{array}\right. \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x+5 \\ x^2+3x-4 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 1-x \\ x^2+5x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -5 \\ y = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \\ x \neq -4 \end{cases}$$

Ответ: $\{(-5;6);(0;1);(1;6)\}$

3. Рассмотрим треугольники K_1PM_1 и KPM. $\frac{PM_1}{K_1P} = \frac{MP}{PK}$, $\angle P$- общий, следовательно, $\Delta K_1PM_1 \sim \Delta KPM$ (по второму признаку). Из подобия треугольников следует, что $\angle PM_1K_1 = \angle PMK, \angle PK_1M_1 = \angle PKM$.
   $M_1K = MK\cos 45°$, $M_1H = M_1K\cos 60° = \sqrt{2}$.
   $MK_1 = MK\cos 60°$, $EK_1 = MK_1\cos 45° = \sqrt{2}$.

15 баллов	Полное верное решение.
12 баллов	Решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка или ошибка в значении тригонометрической функции.
10 баллов	Верно найден один из отрезков.
5 баллов	Доказано подобие треугольников K_1PM_1 и KPM, дальнейшее решение отсутствует или неверно.
0 баллов	Решение неверное, например, неверно взято равенство соответствующих углов в подобных треугольниках.

4. Преобразуем выражение:

$$\frac{x^3-x^2-16x+16}{(x-2)(x+3)+2(x+1)} = \frac{(x-1)*(x^2-16)}{x^2+3x-4} = \frac{(x+4)(x-4)(x-1)}{(x+4)(x-1)}$$

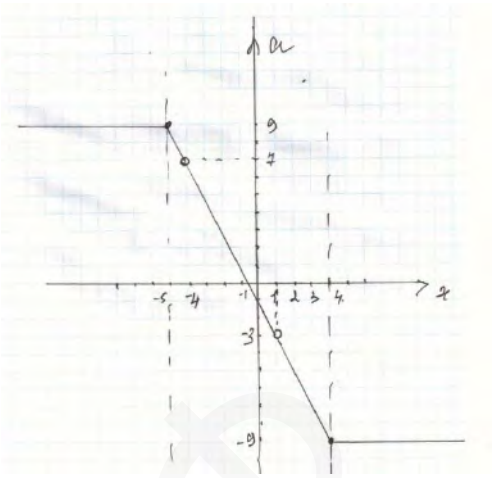
$$f(x) = \left|\frac{x^3-x^2-16x+16}{(x-2)(x+3)+2(x+1)}\right| = |x-4|$$

$$D(f): x \neq -4, x \neq 1;$$

$p(x) = \sqrt{x^2 + 10x + 25} + a = |x + 5| + a$,

получим уравнение: $\boxed{|x - 4| = |x + 5| + a}$

решим его графически системе координат XOA:



$$\begin{cases} x < -5 \\ a = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 \le x < 4 \\ a = -2x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 4 \\ a = -9 \end{cases}$$

Уравнение имеет 1 решение при

$$a \in (-9; -3) \cup (-3; 7) \cup (7; 9);$$

Ответ: $\boldsymbol{a \in (-9; -3) \cup (-3; 7) \cup (7; 9)}$.

15 баллов	Задание выполнено верно, решение обоснованное.
10 баллов	Приведено упрощение выражений, задающих функции. Составлено уравнение, но при аналитическом решении допущены ошибки в нахождении интервалов для параметра. При графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение и не решено или решено неверно.
0 баллов	В остальных случаях.

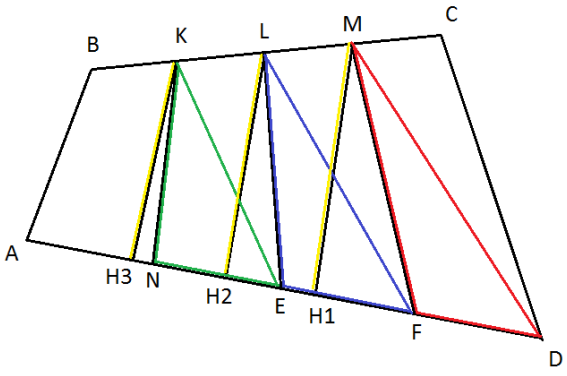
5. Пусть $cd = ab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2cd + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \\ c^2 + 2ab + d^2 = c^2 + 2cd + d^2 = (c + d)^2 \end{cases}$

Подберем пример:

a=4; b=16; d=64; c=1 (4x16=1x64)

20 баллов	Верный пример, показано, что он подходит
15 баллов	Верный пример, не показано, что он подходит
5 баллов	Указано, что обычно числа являются квадратами при ab=cd, но пример отсутствует или найден не верно
0 баллов	Решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям.

6. Сделаем дополнительное построение. В треугольниках DMF, FLE, EKN проведем высоты MH_1, LH_2, KH_3 , которые образуют трапецию KMH_1H_3. LH_2 в этой трапеции является средней линией.



Следовательно $S_{\square ELF} = \frac{S_{\square DMF} + S_{\square EKN}}{2}$, аналогично $S_{\square MLF} = \frac{S_{\square MCD} + S_{\square KLE}}{2}$, откуда $S_{\square LMFE} = \frac{S_{\square NKLE} + S_{\square MCDF}}{2} = \frac{12+24}{2} = 18$. Проводя аналогичные рассуждения, получаем: $S_{\square ABKN} = 2S_{\square NKLE} - S_{\square LMFE} = 2 \cdot 12 - 18 = 6$

Ответ: 6,18.

20 баллов	Верное обоснованное решение
15 баллов	При верном ходе решения допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Верно найдена трапеция и найдена в ней средняя линия, дальнейшее решение отсутствует или неверное.
5 баллов	Получено верное, но необоснованное решение.
0 баллов	Решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям.

ЯГУБОВ.РФ

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Олимпиада школьников «Шаг в будущее»

МАТЕМАТИКА (заключительный этап)

2018-2019 учебный год

8 класс

Вариант - 7

1. ***(15 баллов)*** Каково расстояние между точками a и b на числовой оси, если про них известно, что $a+b=\sqrt{2019}$ и $ab=248,75$.

2. ***(15 баллов)*** Найдите значения переменных x и y, при которых выполняется равенство: $(\frac{y^2+6y-4x-7}{4x^2+12x}-1)^2+(x^2+4x-y-2)^2=0$.

3. ***(15 баллов)*** Площадь квадрата $ABCD$ равна 100. Точки K и L середины сторон AD и CD соответственно. Отрезки BK и AL пересекаются в точке M. Найти площадь четырехугольника $KMLD$.

4. ***(15 баллов)*** При каких значениях параметра a уравнение $f(x)=p(x)$, где $f(x)=\left|\frac{x^2-6x+9}{3-x}+\frac{4x^2-5x}{x}\right|$, $p(x)=|x+a|$, имеет одно решение?

5. ***(20 баллов)*** В параллелограмме $ABCD$ M – середина стороны BC, N – середина стороны CD. Известно, что $DM \perp AC$. Найдите отрезок BN, если сторона CD=6.

6. ***(20 баллов)*** **Известно, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.**

   35! = 10333147966386**CD**4929666651337523**AB**0000000.

   Найти A,B,C,D.

Решение. 8 класс. Вариант 7.

1. Каково расстояние между точками a и b на числовой оси, если про них известно, что $a+b=\sqrt{2019}$ и $ab=248{,}75$.
2. Найдите значения переменных x и y, при которых выполняется равенство: $(\frac{y^2+6y-4x-7}{4x^2+12x}-1)^2+(x^2+4x-y-2)^2=0$.
3. Площадь квадрата $ABCD$ равна 100. Точки K и L середины сторон AD и CD соответственно. Отрезки BK и AL пересекаются в точке M. Найти площадь четырехугольника $KMLD$.
4. При каких значениях параметра a уравнение $f(x) = p(x)$, где $f(x)=\left|\frac{x^2-6x+9}{3-x}+\frac{4x^2-5x}{x}\right|$, $p(x)=|x+a|$ имеет одно решение?
5. В параллелограмме ABCD M – середина стороны BC, N – середина стороны CD. Известно, что $DM \perp AC$. Найдите отрезок BN, если сторона CD=6.
6. **Известно, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.**
   35!=10333147966386**CD**4929666651337523**AB**0000000
   Найти A,B,C,D.

ЯГУБОВ.РФ

1. Согласно теореме обратной теореме Виета составим квадратное уравнение. Получим $x^2-\sqrt{2019}x+248,75=0$.

Далее, решая его, найдём корни a и b $a=\frac{\sqrt{2019}}{2}+\frac{32}{2}$ и $b=\frac{\sqrt{2019}}{2}-\frac{32}{2}$, а,

следовательно, расстояние между точками a и b $a-b=32$.

Ответ: 32

15 баллов	Обоснованно получен верный ответ
10 баллов	Квадратное уравнение решено, но при этом допущена арифметическая ошибка или не найдено расстояние между точками
5 баллов	Правильно по условию задачи составлено квадратное уравнение.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

2. Данное уравнение эквивалентно системе уравнений: $\begin{cases}\frac{y^2+6y-4x-7}{4x^2+12x}-1=0\\ x^2+4x-y-2=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{y^2+6y-4x-7-4x^2-12x}{4x\cdot(x+3)}=0\\ y=x^2+4x-2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}y^2+6y+9-9-4x^2-16x-16+16-7=0\\ x\neq-3\\ x\neq0\\ y=x^2+4x-2\end{cases}$$. Преобразуем первое уравнение: $(y+3)^2-(2x+4)^2=0\Leftrightarrow(y+3-2x-4)\cdot(y+3+3x+4)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=2x+1\\ y=-2x-7\end{array}\right.$$.

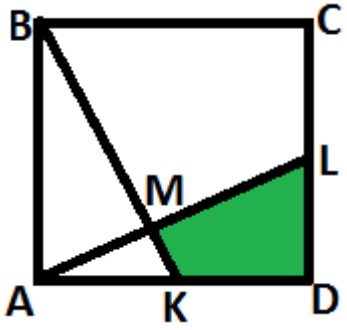
Вернёмся к системе: $\begin{cases} \left[\begin{cases} y=2x+1 \\ 2x+1=x^2+4x-2 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} y=-2x-7 \\ -2x-7=x^2+4x-2 \end{cases} \right. \\ x\neq -3 \\ x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{cases} y=2x+1 \\ x^2+2x-3=0 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} y=-2x-7 \\ x^2+6x+5=0 \end{cases} \right. \\ x\neq -3 \\ x\neq 0 \end{cases}$.

Решением системы являются пары $(1;3),(-5;3);(-1;-5)$.

Ответ: $\{(1;3),(-5;3);(-1;-5)\}$

Баллы	Условия выставления
15	Обоснованно получен правильный ответ
12	Полностью решены все системы, но из ответа не исключено решение, не входящее в ОДЗ.
8	Первое уравнение верно преобразовано в два линейных уравнения, получены две системы, одна из которых решена верно (включая ОДЗ), а вторая – неверно из-за арифметической или алгебраической ошибки.
5	Первое уравнение верно преобразовано в два линейных уравнения, далее ни одна из двух получившихся систем не была доведена до верного ответа.
0	Решение не удовлетворяет ни одному из вышеперечисленных условий

3. Решение: $\Delta ABK = \Delta DAL$ по 2-м катетам, следовательно $BK \perp AL$. По теореме Пифагора $BK = 5\sqrt{5}$. $\cos\angle ABK = \frac{AB}{BK} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. С другой стороны, в ΔABM $BM = AB \cdot cos\angle ABK = 4\sqrt{5}$.



Значит, $BM:MK = 4:1$. Тогда $\frac{S_{ABK}}{S_{AMK}} = \frac{BK}{MK} = 5$.

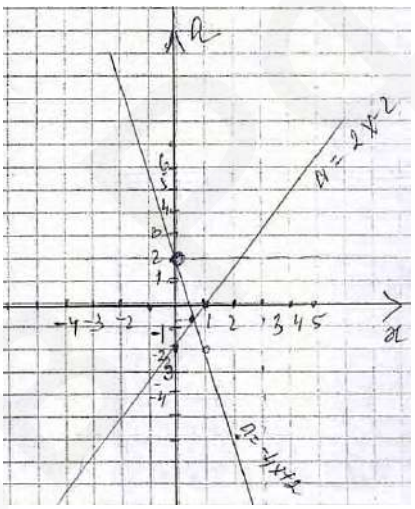
Следовательно, $S_{MKLD} = S_{ABK} - S_{AMK} = \frac{4}{5}S_{ABK} = 20$.

Ответ: 20.

15 баллов	Верное обоснованное решение
12 баллов	При верном ходе решения допущена арифметическая ошибка.

10 баллов	Верно найдено отношение отрезков BM и MK.
5 баллов	Доказана перпендикулярность BK и AL
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

4. Преобразуем выражение $\left|\frac{x^2-6x+9}{3-x}+\frac{4x^2-5x}{x}\right|=\left|\frac{(3-x)^2}{3-x}+\frac{x(4x-5)}{x}\right|=|3x-2|$, получим *f(x)*=$|3x-2|$, $D(f)$: $x\neq 3, x\neq 0$.
Решим уравнение $|3x-2|=|x+a|$ графически в системе *xOa*
$(3x-2)^2=(x+a)^2$
$$(3x-2+x+a)(3x-2-x-a)=0$$
$$\left[\begin{array}{l}4x-2+a=0\\2x-2-a=0\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}a=-4x+2\\a=2x-2\end{array}\right.$$
Уравнение *f(x) = p(x)* имеет



ровно одно решение, если $a=-10$;
Ответ: $a=-\frac{2}{3}$; $a=2$.

15 баллов	Верное обоснованное решение
12 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при его аналитическом решение решении допущена вычислительная ошибка, не связанная с областью определения функции.
10 баллов	Функции верно преобразованы, составлено уравнение, при графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение, но оно не решено или решено неверно.
0 баллов	Другие решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям

5. Проведем диагонали параллелограмма AC и BD. Пусть они пересекаются в точке O. Тогда CO, BN, DM – медианы треугольника BCD. Пусть они пересекаются в точке K. По свойству медиан BK:KN=2:1. Так как $DM\perp AC$, то треугольник CKD - прямоугольный. KN его медиана, проведенная к гипотенузе. Значит, KN=1/2CD. Тогда BN:CD=3:2. Значит, BN=1,5CD=9.
Ответ: 9.

20 баллов	Обоснованно получен верный ответ
15 баллов	Решение верно, но допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Рассмотрен треугольник BCD и медианы в нем, прямоугольный треугольник, указано свойство медианы, но BN через сторону CD выражена неверно.

5 баллов	Рассмотрен треугольник BCD и медианы в нем, дальнейшее решение отсутствует или неверное.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

6. В выражении содержатся следующие произведения:
(2·5)·(10)·(12·15)·(25·4)·(20·30)·(35·14)… ⟹т.к. каждое из этих сгруппированных произведений заканчивается на 0, то число будет заканчиваться на 8 нулей ⟹B=0
Разобьём выражение на следующие произведения:
1·2·3·4·5·6·7·8·9=…8 произведение оканчивается на 8 (без нулей)
11·12·13·14·15·16·17·18·19=…4произведение оканчивается на 4 (без нулей)
21·22·23·24·25·26·27·28·29=…4 произведение оканчивается на 4 (без нулей)
31·32·33·34·35=…4произведение оканчивается на 4 (без нулей)
8·4·4·4=…2 произведение оканчивается на 2⟹A=2
Рассмотрим признаки делимости числа на 11 и на 9:
Сумма цифр на четных позициях:
3+1+7+6+3+6+D+9+9+6+6+1+3+5+3=68+D
Сумма цифр на нечетных позициях:
1+3+3+4+9+6+8+C+4+2+6+6+5+3+7+2+2=71+C
По признаку делимости на 11:
71+C-68-D ⋮ 11,3+C-D ⋮ 11
Отсюда C-D=-3 или C-D=8.
По признаку делимости на 9:
68+D+C+71 ⋮ 9, 139+D+C⋮9
Отсюда D+C=5 или D+C=14.
Составим систему уравнений: $\begin{cases} C - D = -3 \\ C + D = 5 \end{cases} \Longrightarrow$ 2C=2 $\Longrightarrow$ C=1 $\Longrightarrow$ D=4
Примечание: если рассматривать остальные случаи, то C либо дробное, либо больше 10, из чего следует, что данное решение является единственным.
Ответ:A=2, B=0, C=1, D=4.

20 баллов	Обоснованно получен верный ответ
15 баллов	Верно найдены три цифры из четырех.
10 баллов	Верно найдены две цифры из четырех.
5 баллов	Верно найдена одна цифра из четырех.
0 баллов	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше

ГУБОВ.РФ

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Олимпиада школьников «Шаг в будущее»

МАТЕМАТИКА (заключительный этап)

2018-2019 учебный год

8 класс

Вариант – 9

1. ***(15 баллов)*** При каких значениях параметра k на прямой $y = kx + 4$ есть хотя бы одна точка с равными положительными координатами?

2. ***(15 баллов)*** Решите систему уравнений: $\begin{cases} y + x^2 + 1 = 6x \\ \dfrac{y^2 - 4y - 5}{x - 6} = x \end{cases}$

3. ***(15 баллов)*** В треугольнике MPK MM_1 *и* KK_1 - высоты треугольника MPK, $MM_1 = 3\sqrt{3}, KK_1 = 3\sqrt{2}, MK = 6$. Из вершин M и K к прямой M_1K_1 проведены перпендикуляры ME и KH. Найдите длины отрезков EK_1 *и* M_1H.

4. ***(15 баллов)*** Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение, если

$$f(x) = \left| \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{(x-3)(x+1) + 3(2x+2)} \right|$$

$$p(x) = \sqrt{x^2 + 12x + 36} + a$$

5. ***(20 баллов)*** Про четыре натуральных числа a, b, c, d известно, что они являются квадратами различных натуральных чисел. Могут ли числа $a^2 - 2cd + b^2$ и $c^2 - 2ab + d^2$ также являться квадратами натуральных чисел?

6. ***(20 баллов)*** В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M делят сторону BC, а точки N, E, F сторону AD на четыре равные части соответственно. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если площади четырехугольников $ABKN$ и $LMFE$ равны 12 и 24 соответственно.

Дубов.рф

Решения (8-й класс) Вариант 9

1. При каких значениях параметра k на прямой $y = kx + 4$ есть хотя бы одна точка с равными положительными координатами?(15 баллов)
2. Решите систему уравнений: $\begin{cases} y + x^2 + 1 = 6x \\ \dfrac{y^2 - 4y - 5}{x - 6} = x \end{cases}$ (15 баллов)
3. В треугольнике *MPK* MM_1 *и* KK_1 - высоты треугольника *MPK*, $MM_1 = 3\sqrt{3}, KK_1 = 3\sqrt{2}, MK = 6$. Из вершин *M* и *K* к прямой M_1K_1 проведены перпендикуляры *ME* и *KH*. Найдите длины отрезков EK_1 *и* M_1H. (15 баллов)
4. Найдите, при каких значениях параметра *a* уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение.

$$f(x) = \left| \frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{(x-3)(x+1) + 3(2x+2)} \right|$$

$$p(x) = \sqrt{x^2 + 12x + 36} + a$$ (15 баллов)

5. Про четыре натуральных числа *a, b, c, d* известно, что они являются квадратами различных натуральных чисел. Могут ли числа $a^2 - 2cd + b^2$ и $c^2 - 2ab + d^2$ также являться квадратами натуральных чисел?(20 баллов)
6. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* точки K, L, M делят сторону BC, а точки N, E, F сторону AD на четыре равные части соответственно. Найти площадь четырехугольника $ABCD$, если площади четырехугольников *ABKN* и *LMFE* равны12 и 24 соответственно. (20 баллов)

№1: Предположим, что такая точка существует и её координаты $(x_0; x_o)$. Тогда должны выполняться следующие условия $x_0 > 0$ и эта точка должна лежать на прямой, то есть её координаты должны удовлетворять уравнению $y = kx + 4$.Выпишем систему условий и решим её.

$$\begin{cases} x_0 > 0 \\ x_0 = kx_0 + 4 \end{cases}$$

Решая уравнение, получим

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} k = 1 \\ 0 \cdot x_0 = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} k \in R \setminus \{1\} \\ x_0 = \dfrac{-4}{k-1} \end{cases} \end{array}\right.$$

Откуда из первой системы получаем пустое множество, а из второй получим, что $x_0 = \dfrac{-4}{k-1}$ при k не равном 1. С учетом условия, что $x_0 > 0$, получим, что $\dfrac{-4}{k-1} > 0$, откуда , с учётом знака знаменателя $k < 1$.

Ответ: $k < 1$

15 баллов	Полностью правильно решенная задача
10 баллов	При решении системы допущена арифметическая ошибка
5 баллов	Верно составлена система условий
0 баллов	Решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям.

№2: Преобразуем второе уравнение: $\begin{cases} y^2 - 4y - 5 = x^2 - 6x \\ x - 6 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y^2 - 4y + 4 = x^2 - 6x + 9 \\ x \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 - (x-3)^2 = 0 \\ x \neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}(y-2-x+3)\cdot(\text{y}-2+\text{x}-3)=0\\ x\neq 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=x-1\\ y=5-x\end{array}\right.\\ x\neq 6\end{cases}$$ А теперь – система:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x-1\\ x-1=-x^2+6x-1\end{cases}\\ \begin{cases}y=5-x\\ 5-x=-x^2+6x-1\end{cases}\end{array}\right.\\ x\neq 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x-1\\ x^2-5x=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=5-x\\ x^2-7x+6=0\end{cases}\end{array}\right.\\ x\neq 6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=-1\end{cases}\\ \begin{cases}x=5\\ y=4\end{cases}\\ \begin{cases}x=1\\ y=4\end{cases}\\ \begin{cases}x=6\\ y=-1\end{cases}\end{array}\right.\\ x\neq 6\end{cases}$$

Ответ: $\{(0;-1);(5;4);(1;4)\}$

№3: Рассмотрим треугольники K_1PM_1 и KPM. $\frac{PM_1}{K_1P}=\frac{MP}{PK}$, $\angle P$- общий, следовательно, $\Delta K_1PM_1\sim\Delta KPM$ (по второму признаку). Из подобия треугольников следует, что $\angle PM_1K_1=\angle PMK, \angle PK_1M_1=\angle PKM$.

$\sin\angle MKM_1=\frac{MM_1}{MK}=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle MKM_1=60°$; $\sin\angle KMK_1=\frac{K_1K}{MK}=\frac{3\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle KMK_1=45°$.

$M_1H=EK_1=M_1K\cos 60°\cos 45°=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

15 баллов	Полное верное решение.
12 баллов	Решение в целом верное, но допущена вычислительная ошибка или ошибка в значении тригонометрической функции.
10 баллов	Верно найден один из отрезков.
5 баллов	Доказано подобие треугольников K_1PM_1 и KPM, дальнейшее решение отсутствует или неверно.
0 баллов	Решение неверное, например, неверно взято равенство соответствующих углов в подобных треугольниках.

№4: Преобразуем выражение:

$$\frac{x^3+x^2-9x-9}{(x-3)(x+1)+3(2x+2)}=\frac{(x+1)*(x^2-9)}{x^2+4x+3}=\frac{(x+1)(x+3)(x-3)}{(x+1)(x+3)}$$

$$f(x)=\left|\frac{x^3+x^2-9x-9}{(x-3)(x+1)+3(2x+2)}\right|=|x-3|$$

$$D(f): x\neq -1, x\neq -3;$$

$p(x) = \sqrt{x^2 + 12x + 36} + a = |x + 6| + a$

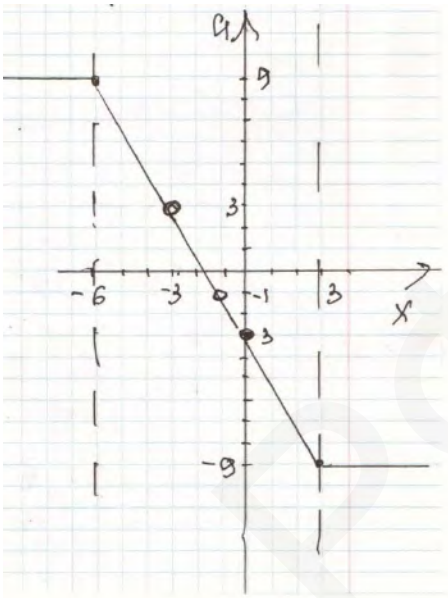
получим уравнение: $\boxed{|x - 3| = |x + 6| + a}$

решим его графически системе координат XOA:

$$\begin{cases} x < -6 \\ -x + 3 = -x - 6 + a \end{cases} <=> \begin{cases} x < -6 \\ a = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6 \le x < 3 \\ -x + 3 = x + 6 + a \end{cases} <=> \begin{cases} -6 \le x < 3 \\ a = -2x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 3 \\ x - 3 = x + 6 + a \end{cases} <=> \begin{cases} x \ge 3 \\ a = -9 \end{cases}$$



Уравнение имеет 1 решение при

$a \in (-9; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; 9);$

Ответ: $\boldsymbol{a \in (-9; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; 9)}$;

15 баллов	Задание выполнено верно, решение обоснованное.
10 баллов	Приведено упрощение выражений, задающих функции. Составлено уравнение, но при аналитическом решении допущены ошибки в нахождении интервалов для параметра. При графическом решении не исключены точки, не входящие в область определения функции.
5 баллов	Выполнено упрощение выражений, задающих функции, составлено уравнение и не решено или решено неверно.
0 баллов	В остальных случаях.

№5: Пусть $cd = ab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2cd + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (b - a)^2 \\ c^2 - 2ab + d^2 = c^2 - 2cd + d^2 = (d - c)^2 \end{cases}$

Подберем пример:

a=4; b=16; d=64; c=1 (4x16=1x64)

20 баллов	Верный пример, показано, что он подходит
15 баллов	Верный пример, не показано, что он подходит
5 баллов	Указано, что обычно числа являются квадратами при ab=cd, но пример отсутствует или найден не верно
0 баллов	Решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям.

№6: $S_{ABCD} = 12 + 18 + 24 + 30 = 84$.

20 баллов	Верное обоснованное решение
15 баллов	При верном ходе решения допущена вычислительная ошибка.
10 баллов	Верно найдена трапеция и найдена в ней средняя линия, дальнейшее решение отсутствует или неверное.
5 баллов	Получено верное, но необоснованное решение.
0 баллов	Решения, не соответствующие вышеперечисленным критериям.

Ялуоов.рф