

Старшая группа, высшая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. Дано простое p . Докажите, что существует перестановка $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ чисел $1, 2, 3, \dots, p$ такая, что числа $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \dots, a_1a_2\dots a_p$ дают разные остатки при делении на p .

Решение. Положим $a_p = p$, $a_1 = 1$, а остальные a_k построим по индукции так, чтобы $a_1a_2\dots a_k$ давало при делении на p остаток k . Для этого достаточно брать a_k таким, чтобы $(k-1)a_k$ было сравнимо с k по модулю p . Так как p простое, такое a_k найдется. Осталось заметить, что все a_k будут различны, так как если a_k сравнимо с a_m по модулю p при $k \neq m$, то, перемножая сравнения $(k-1)a_k \equiv k$ и $m \equiv (m-1)a_k$, получаем $m(k-1)a_k \equiv k(m-1)a_k$, откуда $m(k-1) \equiv k(m-1) \Rightarrow m \equiv k$ — противоречие.

♦ Замечено только, что $a_p = 0$: 0 баллов. Существованием первообразного корня пользоваться без доказательства нельзя.

2. На плоскости проведено 2000 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди областей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно выбрать область S со следующим свойством: для любой прямой l , ограничивающей S , полуплоскость, образуемая при проведении l и содержащая S , содержит не меньше областей, чем другая полуплоскость.

Первое решение. Рассмотрим произвольную область T . Для каждой прямой, ее ограничивающей, поставим стрелочку в ту полуплоскость, в которой областей больше. Если областей поровну, то стрелочку не ставим. Заметим, что область S , из которой стрелочки не выходят, будет удовлетворять условию. Покажем, что такая область S найдется. Будем двигаться из произвольной области по стрелочкам в соседние по стороне области. Заметим, что для каждой прямой все стрелочки ведут в одну сторону, поэтому вернуться в пройденные ранее области мы не можем. Кроме того, областей конечное количество, поэтому рано или поздно мы остановимся в некоторой области S . Значит, из нее не ведет ни одной стрелочки, и она искомая. **Второе решение.** Назовём полуплоскость (относительно проведённой прямой) *большой*, если в ней не менее половины областей. Рассмотрим область S , покрытую наибольшим количеством больших полуплоскостей. Она — требуемая. Действительно, так как любая область, граничащая с S по отрезку прямой l , покрыта не бóльшим числом больших полуплоскостей, а это может случиться лишь если S лежит в большой полуплоскости относительно l .

3. Дан ряд из 10^6 лампочек, все из которых изначально выключены. Каждый из 2016 человек по очереди подходит к этому ряду и переключает (то есть, выключенные включает, а включённые выключает) какие-то 2017 подряд идущих лампочек. В итоге оказалось, что ровно k лампочек включены. Докажите, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более, чем $k/2$ лампочек включены.

Решение. Пронумеруем лампочки слева направо и покрасим каждую лампочку в цвет остатка ее номера при делении на 2017. Заметим, что каждый человек переключает по одной лампочке каждого цвета. Так как людей четное количество, то в конце будет гореть четное количество лампочек каждого цвета. Значит, если в конце лампочки какого-то цвета включены, то их хотя бы две штуки. Среди 2017 подряд идущих лампочек максимум одна включенная лампочка рассматриваемого цвета, то есть не более половины включённых. Проводя те же рассуждения для каждого цвета, получим, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более $k/2$ включенных, что и требовалось.

4. В треугольнике ABC угол A равен 60° , AL — биссектриса, D — ее середина. Прямая, проходящая через точку D параллельно AC , пересекает сторону AB в точке E . Оказалось, что $AC = 3AE$. Докажите, что треугольник CEL — равнобедренный.

Решение. Докажем, что $EL = EC$. Отметим на стороне AC точки K и N , а на ее продолжении за C точку T так, что $AK = KN = NC = CT$. Так как по условию $AC = 3AE$, то $AE = AK$. Из параллельности ED и AC следует, что $\angle EAD = 30^\circ = \angle CAD = \angle ADE$, откуда $AE = ED$.

В силу симметричности точек E и K относительно биссектрисы AD имеем $ED = DK$. Из той же симметрии имеем $\angle AKD = 120^\circ$, поэтому смежный с ним $\angle DKN = 60^\circ$. А так как $DK = AK = KN$, то треугольник DKN — равносторонний.

В треугольнике ALN отрезок KD — средняя линия, поэтому $NL = 2KD$. Также в треугольнике ALT отрезок ND — средняя линия, поэтому $LT = 2ND$. Значит, $NL = 2KD = 2ND = LT$, и в равнобедренном треугольнике NLT медиана LC также является высотой, то есть $\angle ACB = 90^\circ$.

В треугольнике ALC прямая ED проходит через середину D стороны AL и параллельна AC , поэтому является средней линией. Кроме того, $ED \parallel AC \perp LC$, значит, ED — серединный перпендикуляр к отрезку LC , откуда и следует равенство $EL = EC$.

5. Докажите, что для любых неотрицательных a, b, c , не превосходящих 1, $a+b+c+2(ab+bc+ca)+3(1-a)(1-b)(1-c) \leq 9$.

Первое решение. Так как a, b, c лежат в промежутке от 0 до 1, то $a+b+c+2(ab+bc+ca)+3(1-a)(1-b)(1-c) \leq a+b+c+2(a+b+c)+3(1-a) = +3b+3c+3 \leq 9$. **Второе решение.** Заметим, что функция в левой части неравенства линейна по каждой из переменных, поэтому достаточно проверить неравенство в предположении, что все переменные равны 0 или 1. Если хотя бы одна из них равна 1, то левая часть не больше 9, так как каждое слагаемое не больше 1. А если все переменные равны 0, то функция равна 3, что меньше 9.

6. Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены параллельные прямые l_a, l_b и l_c , пересекающие прямые BC, CA и AB в точках P, Q и R соответственно. Точки P', Q' и R' расположены на отрезках AP, BQ и CR соответственно таким образом, что $AP = 3AP', BQ = 3BQ'$ и $CR = 3CR'$. Докажите, что точки P', Q' и R' лежат на одной прямой.

Решение. Заметим, что из проведенных параллельных прямых ровно одна пересекает сторону, а две другие — их продолжения. Пусть именно BQ пересекает сторону AC , то есть точка Q лежит на отрезке AC .

В силу параллельности BQ и PA треугольники BCQ и PCA подобны, поэтому прямая CQ' пересекает PA в точке X такой, что $PX:XA = BQ':Q'Q = 1:2$. Аналогично прямая AQ' пересекает RC в такой точке Y , что $RY:YC = 1:2$.

Рассмотрим треугольники $XQ'A$ и $CQ'Y$. Так как прямые XA и YC параллельны, то эти треугольники подобны. Значит, $\angle XQ'P' = \angle CQ'R'$, как углы между соответственными медианой и стороной в подобных треугольниках. Отсюда и следует, что точки P', Q' и R' лежат на одной прямой.

7. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие k человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Продолжительность проекта — n дней. При каком наибольшем k организаторы проекта наверняка смогут выгнать всех участников?

Ответ. При $k = 2^n - 2$. **Решение.** *Пример.* Построим его по индукции. При $n = 1$ все очевидно: двоих можно выгнать, как если они дружат, так и если не дружат. Пусть утверждение уже доказано для $n = k$, и докажем его для $n = k+1$. Заметим, что жюри всегда может выгнать не менее половины участников. Поэтому если участников не больше, чем $2 \cdot (2^k - 2) = 2^{k+1} - 4$, то переход доказан. Пусть их $2^{k+1} - 3$. Тогда в графе знакомств либо чётных, либо нечётных вершин больше половины, то есть не меньше, чем 1. Выгнав их, жюри снова оставит не больше $2^k - 2$ человек. Пусть, наконец, у нас $2^{k+1} - 2$ человек. Тогда в силу чётности числа нечётных вершин их либо не меньше, чем 2^k , и тогда жюри выгонит их, либо не больше, чем $2^k - 2$, и тогда жюри выгонит чётные вершины. В обоих случаях останется не больше $2^k - 2$ человек. Переход доказан.

Оценка. Построим по индукции граф дружб для $2^{n+1} - 1$ человек так, чтобы их нельзя было разогнать за n дней (если участников больше, пусть остальные ни с кем не дружат). При $n = 1$ достаточно взять простой путь G_1 длины 2. Заметим, что в нём нечётных вершин на одну больше, чем чётных — будем называть такие графы *полезными*. Назовем *наоборот* полезного графа G следующий граф G' : рисуем рядом две копии графа G , каждой вершине четной степени в левой копии берем в пару вершину нечетной степени в правой копии и все вершины в парах соединяем ребром, а затем добавляем одну новую вершину и соединяем её ребром с непарной нечётной вершиной правой копии.

Наворот G' обладает замечательным свойством: если жюри удалит из него нечётные вершины, получится копия графа G , а если чётные — та же копия плюс одна изолированная вершина. Кроме того, граф G' — снова полезный.

Возьмем теперь граф G_1 и построим по индукции последовательность наворотов $G_2, \dots, G_n, \dots$, где при всех $n \geq 1$ G_{n+1} — наворот на G_n . В графе G_n будет $2^{n+1}-1$ вершина, и очевидно, что разогнать его за n дней не получится.

♦ Оценка и пример по 6 баллов. Правильная по порядку оценка, полученная без использования соображения о чётности количества нечётных вершин: 0 баллов.

8. Иррациональные числа x и y таковы, что все три числа xy , x^2+y , y^2+x рациональны. Найдите все возможные значения $x+y$.

Ответ. $x+y=1$. Пример: $x=1/2+\sqrt{2}$, $y=1/2-\sqrt{2}$. **Решение.** Предположим, что $x+y \neq 1$. Заметим, что $x^2+y-y^2-x=(x+y-1)(x-y)$, $x^2+y^2+x+y+2xy=(x+y)(x+y+1)=(x+y+1/2)^2-1/4$ — рациональные числа. Из последнего получим, что $x+y=-1/2+\sqrt{r}$, для некоторого рационального r , которое не квадрат рационального числа. Тогда из первого равенства получим, что $x-y=p+q\sqrt{r}$ для некоторых рациональных p и q . Таким образом $x=a+b\sqrt{r}$, $y=c+d\sqrt{r}$ для некоторых рациональных a, b, c, d , причем, b и d не равны 0. Тогда из условия имеем: $2ab+d=2cd+b=ad+bc=0$. Подставляя $d=-2ab$ в равенство $2cd+b=0$, получаем $-4abc+b=0$, откуда $ac=1/4$ ($b \neq 0$ в силу иррациональности x) и d . Далее, подставляя $b=-2cd$ в уравнение $ad+bc=0$, получаем $ad=2c^2d$, далее $a=2c^2$ и $1/4=ac=2c^3$, откуда $c=1/2$, $a=1/(4c)=1/2$. Подставляя $a=c=1/2$ в равенство $ad+bc=0$, находим, что $b+d=0$, откуда $x+y=1$.

Старшая группа, первая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. На доске написано натуральное число. За одну операцию разрешается переставить его цифры в любом порядке (нули можно ставить в начале), затем прибавить 2017, убрать незначащие нули в начале и полученный результат выписать на доску. Верно ли, что для любого начального числа с помощью нескольких таких операций можно выписать на доску число 2018?

Ответ. Верно. **Решение.** Зафиксируем шестую и пятую с конца цифры a и b (если число меньше 10^5 , сначала сделаем его шестизначным, прибавив нужное количество раз 2017). Начнем прибавлять к данному числу 2017, не меняя порядок цифр. Тогда величина $\overline{ab}$ увеличивается не более чем на 1 или обнуляется. Не реже, чем через 100 ходов, мы будем получать $b = a + 1$. При выполнении этого условия поменяем цифры a и b местами. Вместо увеличения числа на 2017, число увеличивается на 2017+90000. Так как $(2017, 90000) = 1$, то за 2017 таких замен мы можем получить все возможные остатки при делении на 2017. При этом мы увеличим наше число не более чем на $x = 2017 \cdot (50 \cdot 2017 + 90000)$.

Пусть n — первоначальное число, и $10^k > n + x$. Заметим, что среди полученных выше чисел есть число n_1 дающее такой же остаток, что и 10^k . Тогда после получения n_1 будем только прибавлять 2017 не меняя порядок цифр. После получения 10^k переставим его цифры, чтобы получить 1.

2. На плоскости проведено 2000 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди областей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно выбрать область S со следующим свойством: для любой прямой l , ограничивающей S , полуплоскость, образуемая при проведении l и содержащая S , содержит не меньше областей, чем другая полуплоскость.

Первое решение. Рассмотрим произвольную область T . Для каждой прямой, ее ограничивающей, поставим стрелочку в ту полуплоскость, в которой областей больше. Если областей поровну, то стрелочку не ставим. Заметим, что область S , из которой стрелочки не выходят, будет удовлетворять условию. Покажем, что такая область S найдется. Будем двигаться из произвольной области по стрелочкам в соседние по стороне области. Заметим, что для каждой прямой все стрелочки ведут в одну сторону, поэтому вернуться в пройденные ранее области мы не можем. Кроме того, областей конечное количество, поэтому рано или поздно мы остановимся в некоторой области S . Значит, из нее не ведет ни одной стрелочки, и она искомая. **Второе решение.** Назовём полуплоскость (относительно проведённой прямой) *большой*, если в ней не менее половины областей. Рассмотрим область S , покрытую наибольшим количеством больших полуплоскостей. Она — требуемая. Действительно, так как любая область, граничащая с S по отрезку прямой l , покрыта не бóльшим числом больших полуплоскостей, а это может случиться лишь если S лежит в большой полуплоскости относительно l .

3. Дан ряд из 10^6 лампочек, все из которых изначально выключены. Каждый из 2016 человек по очереди подходит к этому ряду и переключает (то есть, выключенные включает, а включённые выключает) какие-то 2017 подряд идущих лампочек. В итоге оказалось, что ровно k лампочек включены. Докажите, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более, чем $k/2$ лампочек включены.

Решение. Пронумеруем лампочки слева направо и покрасим каждую лампочку в цвет остатка ее номера при делении на 2017. Заметим, что каждый человек переключает по одной лампочке каждого цвета. Так как людей четное количество, то в конце будет гореть четное количество лампочек каждого цвета. Значит, если в конце лампочки какого-то цвета включены, то их хотя бы две штуки. Среди 2017 подряд идущих лампочек максимум одна включенная лампочка рассматриваемого цвета, то есть не более половины включённых. Проводя те же рассуждения для каждого цвета, получим, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более $k/2$ включенных, что и требовалось.

4. В треугольнике ABC угол A равен 60° , AL — биссектриса, D — ее середина. Прямая, проходящая через точку D параллельно AC , пересекает сторону AB в точке E . Оказалось, что $AC = 3AE$. Докажите, что треугольник CEL — равнобедренный.

Решение. Докажем, что $EL = EC$. Отметим на стороне AC точки K и N , а на ее продолжении за C точку T так, что $AK = KN = NC = CT$. Так как по условию $AC = 3AE$, то $AE = AK$. Из параллельности ED и AC следует, что $\angle EAD = 30^\circ = \angle CAD = \angle ADE$, откуда $AE = ED$.

В силу симметричности точек E и K относительно биссектрисы AD имеем $ED = DK$. Из той же симметрии имеем $\angle AKD = 120^\circ$, поэтому смежный с ним $\angle DKN = 60^\circ$. А так как $DK = AK = KN$, то треугольник DKN — равносторонний.

В треугольнике ALN отрезок KD — средняя линия, поэтому $NL = 2KD$. Также в треугольнике ALT отрезок ND — средняя линия, поэтому $LT = 2ND$. Значит, $NL = 2KD = 2ND = LT$, и в равнобедренном треугольнике NLT медиана LC также является высотой, то есть $\angle ACB = 90^\circ$.

В треугольнике ALC прямая ED проходит через середину D стороны AL и параллельна AC , поэтому является средней линией. Кроме того, $ED \parallel AC \perp LC$, значит, ED — серединный перпендикуляр к отрезку LC , откуда и следует равенство $EL = EC$.

5. Докажите, что для любых неотрицательных a, b, c , не превосходящих 1, $a+b+c+2(ab+bc+ca)+3(1-a)(1-b)(1-c) \leq 9$.

Первое решение. Так как a, b, c лежат в промежутке от 0 до 1, то $a+b+c+2(ab+bc+ca)+3(1-a)(1-b)(1-c) \leq a+b+c+2(a+b+c)+3(1-a) = +3b+3c+3 \leq 9$. **Второе решение.** Заметим, что функция в левой части неравенства линейна по каждой из переменных, поэтому достаточно проверить неравенство в предположении, что все переменные равны 0 или 1. Если хотя бы одна из них равна 1, то левая часть не больше 9, так как каждое слагаемое не больше 1. А если все переменные равны 0, то функция равна 3, что меньше 9.

6. Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены параллельные прямые l_a, l_b и l_c , пересекающие прямые BC, CA и AB в точках P, Q и R соответственно. Точки P', Q' и R' расположены на отрезках AP, BQ и CR соответственно таким образом, что $AP = 3AP', BQ = 3BQ'$ и $CR = 3CR'$. Докажите, что точки P', Q' и R' лежат на одной прямой.

Решение. Заметим, что из проведенных параллельных прямых ровно одна пересекает сторону, а две другие — их продолжения. Пусть именно BQ пересекает сторону AC , то есть точка Q лежит на отрезке AC .

В силу параллельности BQ и PA треугольники BCQ и PCA подобны, поэтому прямая CQ' пересекает PA в точке X такой, что $PX:XA = BQ':Q'Q = 1:2$. Аналогично прямая AQ' пересекает RC в такой точке Y , что $RY:YC = 1:2$.

Рассмотрим треугольники $XQ'A$ и $CQ'Y$. Так как прямые XA и YC параллельны, то эти треугольники подобны. Значит, $\angle XQ'P' = \angle CQ'R'$, как углы между соответственными медианой и стороной в подобных треугольниках. Отсюда и следует, что точки P', Q' и R' лежат на одной прямой.

7. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 2017 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри может действовать таким образом, что после 10 изгнаний на проекте никого не останется?

Ответ. Верно. Решение. Докажем по индукции более общий факт: если в проекте участвует не более $2^{n+1}-2$ человек ($n \geq 1$), то можно выгнать всех за не более чем n изгнаний. Так как $2^{11}-1 > 2017$, тем самым будет доказано и утверждение задачи. При $n = 1$ все очевидно: двоих можно выгнать, как если они дружат, так и если не дружат. Пусть утверждение уже доказано для $n = k$, и докажем его для $n = k+1$. Заметим, что жюри всегда может выгнать не менее половины участников. Поэтому если участников не больше, чем $2 \cdot (2^k-2) = 2^{k+1}-4$, то переход доказан. Пусть их $2^{k+1}-3$. Тогда в графе знакомств либо чётных, либо нечётных вершин больше половины, то есть не меньше, чем 1. Выгнав их, жюри снова оставит не больше 2^k-2 человек. Пусть, наконец, у нас $2^{k+1}-2$ человек. Тогда в силу чётности числа нечётных вершин их либо не меньше, чем 2^k , и тогда жюри выгонит их, либо не больше, чем 2^k-2 , и тогда жюри выгонит чётные вершины. В обоих случаях останется не больше 2^k-2 человек, что и завершает доказательство.

8. Иррациональные числа x и y таковы, что все три числа xy, x^2+y, y^2+x рациональны. Найдите все возможные значения $x+y$.

Ответ. $x+y=1$. Пример: $x=1/2+\sqrt{2}, y=1/2-\sqrt{2}$. **Решение.** Предположим, что $x+y \neq 1$. Заметим, что $x^2+y-y^2-x=(x+y-1)(x-y)$, $x^2+y^2+x+y+2xy=(x+y)(x+y+1)=(x+y+1/2)^2-1/4$ — рациональные числа. Из последнего получим, что $x+y=-1/2+\sqrt{r}$, для некоторого рационального r , которое не квадрат рационального числа. Тогда из первого равенства получим, что $x-y=p+q\sqrt{r}$ для некоторых рациональных p и q . Таким образом $x=a+b\sqrt{r}$, $y=c+d\sqrt{r}$ для некоторых рациональных a, b, c, d , причем, b и d не равны 0. Тогда из условия имеем: $2ab+d=2cd+b=ad+bc=0$. Подставляя $d=-2ab$ в равенство $2cd+b=0$, получаем $-4abc+b=0$, откуда $ac=1/4$ ($b \neq 0$ в силу иррациональности x) и d . Далее, подставляя $b=-2cd$ в уравнение $ad+bc=0$, получаем $ad=2c^2d$, далее $a=2c^2$ и $1/4=ac=2c^3$, откуда $c=1/2$, $a=1/(4c)=1/2$. Подставляя $a=c=1/2$ в равенство $ad+bc=0$, находим, что $b+d=0$, откуда $x+y=1$.

Старшая группа, вторая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. На доске написано натуральное число. За одну операцию разрешается переставить его цифры в любом порядке (нули можно ставить в начале), затем прибавить 2017, убрать незначащие нули в начале и полученный результат выписать на доску. Верно ли, что для любого начального числа с помощью нескольких таких операций можно выписать на доску число 2018?

Ответ. Верно. **Решение.** Зафиксируем шестую и пятую с конца цифры a и b (если число меньше 10^5 , сначала сделаем его шестизначным, прибавив нужное количество раз 2017). Начнем прибавлять к данному числу 2017, не меняя порядок цифр. Тогда величина $\overline{ab}$ увеличивается не более чем на 1 или обнуляется. Не реже, чем через 100 ходов, мы будем получать $b = a + 1$. При выполнении этого условия поменяем цифры a и b местами. Вместо увеличения числа на 2017, число увеличивается на 2017+90000. Так как $(2017, 90000) = 1$, то за 2017 таких замен мы можем получить все возможные остатки при делении на 2017. При этом мы увеличим наше число не более чем на $x = 2017 \cdot (100 \cdot 2017 + 90000)$.

Пусть n — первоначальное число, и $10^k > n + x$. Заметим, что среди полученных выше чисел есть число n_1 дающее такой же остаток, что и 10^k . Тогда после получения n_1 будем только прибавлять 2017 не меняя порядок цифр. После получения 10^k переставим его цифры, чтобы получить 1, после чего прибавим 2017.

2. На столе стоят две корзинки, в которых лежат 1001 и 2017 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Петя. **Решение.** Первым ходом Пете нужно взять из второй корзинки 678 пирожков. После этого в ней останется 1339 пирожков, в первой корзине их станет 1340, и очередь хода перейдет к Васе. Покажем теперь, что если в корзинах m и n пирожков, и $|m - n| \leq 1$, то побеждает второй. Стратегия второго игрока будет симметрична. Если первый, скажем, взял $2a$ пирожков из первой корзины, то во второй корзине станет $a + n \geq a + m - 1 \geq m$ пирожков, и второй может взять оттуда $2a$ пирожков: в результате в корзинах окажется $n - a$ и $m - a$ пирожков. Понятно, что при такой стратегии второй всегда может сделать ход, а значит, выигрывает.

3. Дан ряд из 10^6 лампочек, все из которых изначально выключены. Каждый из 2016 человек по очереди подходит к этому ряду и переключает (то есть, выключенные включает, а включённые выключает) какие-то 2017 подряд идущих лампочек. В итоге оказалось, что ровно k лампочек включены. Докажите, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более, чем $k/2$ лампочек включены.

Решение. Пронумеруем лампочки слева направо и покрасим каждую лампочку в цвет остатка при делении на 2017. Заметим, что каждый человек переключает по одной лампочке каждого цвета. Так как людей четное количество, то в конце будет гореть четное количество лампочек каждого цвета. Значит, если в конце лампочки какого-то цвета включены, то их хотя бы две штуки. Среди 2017 подряд идущих лампочек максимум одна включенная лампочка рассматриваемого цвета, то есть не более половины. Проводя те же рассуждения для каждого цвета, получим, что среди 2017 подряд идущих лампочек не более $k/2$ включенных, что и требовалось.

4. В треугольнике ABC угол A равен 60° , AL — биссектриса, D — ее середина. Прямая, проходящая через точку D параллельно AC , пересекает сторону AB в точке E . Оказалось, что $AC = 3AE$. Докажите, что треугольник CEL — равнобедренный.

Решение. Докажем, что $EL = EC$. Отметим на стороне AC точки K и N , а на ее продолжении за C точку T так, что $AK = KN = NC = CT$. Так как по условию $AC = 3AE$, то $AE = AK$. Из параллельности ED и AC следует, что $\angle EAD = 30^\circ = \angle CAD = \angle ADE$, откуда $AE = ED$.

В силу симметричности точек E и K относительно биссектрисы AD имеем $ED = DK$. Из той же симметрии имеем $\angle AKD = 120^\circ$, поэтому смежный с ним $\angle DKN = 60^\circ$. А так как $DK = AK = KN$, то треугольник DKN — равносторонний.

В треугольнике ALN отрезок KD — средняя линия, поэтому $NL = 2KD$. Также в треугольнике ALT отрезок ND — средняя линия, поэтому $LT = 2ND$. Значит, $NL = 2KD = 2ND = LT$, и в равнобедренном треугольнике NLT медиана LC также является высотой, то есть $\angle ACB = 90^\circ$.

В треугольнике ALC прямая ED проходит через середину D стороны AL и параллельна AC , поэтому является средней линией. Кроме того, $ED \parallel AC \perp LC$, значит, ED — серединный перпендикуляр к отрезку LC , откуда и следует равенство $EL = EC$.

5. Решите систему уравнений $[x] - y = 2[y] - z = 3[z] - x = \frac{2016}{2017}$.

Ответ. $x = 2\frac{1}{2017}$, $y = 1\frac{1}{2017}$, $z = 1\frac{1}{2017}$. **Решение.** Обозначим для удобства число $\frac{2016}{2017}$ буквой a .

Имеем $y = [x] - a$, $z = 2[y] - a$, $x = 3[z] - a$. Поскольку $0 < a < 1$, отсюда следует, что $[y] = [x] - 1$, $[z] = 2[y] - 1 = 2[x] - 3$, $[x] = 3[z] - 1 = 6[x] - 10$. Из последнего равенства находим $[x] = 2$, а из остальных — $[y] = [z] = 1$. Отсюда подстановкой найденных целых частей в условие получается ответ.

6. Через вершины A , B и C треугольника ABC проведены параллельные прямые l_a , l_b и l_c , пересекающие прямые BC , CA и AB в точках P , Q и R соответственно. Точки P' , Q' и R' расположены на отрезках AP , BQ и CR соответственно таким образом, что $AP = 3AP'$, $BQ = 3BQ'$ и $CR = 3CR'$. Докажите, что точки P' , Q' и R' лежат на одной прямой.

Решение. Заметим, что из проведенных параллельных прямых ровно одна пересекает сторону, а две другие — их продолжения. Пусть именно BQ пересекает сторону AC , то есть точка Q лежит на отрезке AC .

В силу параллельности BQ и PA треугольники BCQ и PCA подобны, поэтому прямая CQ' пересекает PA в точке X такой, что $PX:XA = BQ':Q'Q = 1:2$. Аналогично прямая AQ' пересекает RC в такой точке Y , что $RY:YC = 1:2$.

Рассмотрим треугольники $XQ'A$ и $CQ'Y$. Так как прямые XA и YC параллельны, то эти треугольники подобны. Значит, $\angle XQ'P' = \angle CQ'R'$, как углы между соответственными медианой и стороной в подобных треугольниках. Отсюда и следует, что точки P' , Q' и R' лежат на одной прямой.

7. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 300 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Могли ли участники подружиться перед началом проекта так, чтобы через неделю, независимо от действий жюри, хоть кто-нибудь из них гарантированно остался бы на проекте?

Ответ. Могли. **Решение.** Представим компанию в виде графа, где вершинами являются люди, а ребра проводятся между друзьями. Пусть есть граф G , в котором поровну вершин четной и нечетной степени. Назовем удвоением такого графа следующий граф G' : рисуем рядом две копии графа G и затем каждой вершине четной степени в левой копии берем в пару вершину нечетной степени в правой копии, и все вершины в парах соединяем ребром. Полученный граф G' обладает замечательным свойством: что бы с ним ни сделало жюри, из него получится копия графа G ! Кроме того, в нем так же, как и в G , поровну вершин четной и нечетной степени.

Возьмем теперь граф G_1 на 4 вершинах и 3 ребрах, образующих простой путь длины 3. При помощи операции удвоения будем последовательно получать из G_1 граф G_2 , из G_2 граф G_3 , и так далее до G_7 , в котором будет как раз $2^8 = 256$ вершин. Теперь достаточно подружить 300 участников так: 44 пусть останутся совсем без друзей, а остальных 256 подружим согласно графу G_7 . Теперь, как бы ни действовало жюри, после первого дня образуется граф знакомств G_6 (не считая, возможно, 44 ни с кем не подружившихся), после второго G_5 , и так далее, после шестого дня G_1 , а после седьмого дня на проекте останутся как минимум двое.

8. В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x , у страницы с номерами $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, $8y$ все попали в разные тома?

Ответ. Не может. **Решение.** Пусть в томе N страниц. Тогда из неравенств $8x \leq 10N$, $8y \leq 10N$ следует, что $3x < 4N$ и $3y < 4N$, а значит все страницы $2x$, $2y$, $3x$, $3y$ находятся в первых четырех томах. Не умаляя общности, в первом томе находится $2x$. Значит $2x \leq N$, но отсюда $8x \leq 4N$, а значит в первых 4 томах должны располагаться уже 5 страниц $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, противоречие.

Младшая группа, высшая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. На столе стоят две корзинки, в которых лежат m и n пирожков. Два игрока ходят по очереди. За ход игрок берет из корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. При $|m-n| \geq 2$ выигрывает первый, а при $|m-n| \leq 1$ — второй. **Решение.** Сначала рассмотрим случай, когда $|m-n| \leq 1$. В этом случае стратегия второго игрока будет симметрична. Если первый, скажем, взял $2a$ пирожков из первой корзины, то во второй корзине станет $a+n \geq a+m-1 \geq m$ пирожков, и второй может взять оттуда $2a$ пирожков: в результате в корзинах окажется $n-a$ и $m-a$ пирожков. Понятно, что при такой стратегии второй всегда может сделать ход, а значит, выиграет.

Пусть теперь $m-n = d \geq 2$. Тогда первый возьмет $2k$ пирожков, где $3k$ — ближайшее к d кратное 3 (то есть, $|3k-d| \leq 1$). В результате в корзинах станет $m-2k$ и $n+k$ пирожков, а разность этих чисел по модулю не более 1. Как доказано выше, в этой ситуации выиграет второй, который в исходной игре был первым.

♦ Разобран только случай, когда $|m-n| \leq 1$: 4 балла.

2. Дано простое p . Докажите, что существует такая перестановка $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ чисел $1, 2, 3, \dots, p$, что числа $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \dots, a_1a_2\dots a_p$ дают разные остатки при делении на p .

Решение. Положим $a_p = p$, $a_1 = 1$, а остальные a_k построим по индукции так, чтобы $a_1a_2\dots a_k$ давало при делении на p остаток k . Для этого достаточно брать a_k таким, чтобы $(k-1)a_k$ было сравнимо с k по модулю p . Так как p простое, такое a_k найдется. Осталось заметить, что все a_k будут различны, так как если a_k сравнимо с a_m по модулю p при $k \neq m$, то, перемножая сравнения $(k-1)a_k \equiv k$ и $m \equiv (m-1)a_k$, получаем $m(k-1)a_k \equiv k(m-1)a_k$, откуда $m(k-1) \equiv k(m-1) \Rightarrow m \equiv k$ — противоречие.

♦ Не пояснено, что можно делить по mod p — дыра в 4 балла, но если пояснение с ходу дано — дыры нет.

3. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 2017 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри может действовать таким образом, что после 10 изгнаний на проекте никого не останется?

Ответ. Верно. **Решение.** Докажем по индукции более общий факт: если в проекте участвует не более $2^{n+1}-2$ человек ($n \geq 1$), то можно выгнать всех за не более чем n изгнаний. Так как $2^{11}-1 > 2017$, тем самым будет доказано и утверждение задачи. При $n = 1$ все очевидно: двоих можно выгнать, как если они дружат, так и если не дружат. Пусть утверждение уже доказано для $n = k$, и докажем его для $n = k+1$. Заметим, что жюри всегда может выгнать не менее половины участников. Поэтому если участников не больше, чем $2 \cdot (2^k-2) = 2^{k+1}-4$, то переход доказан. Пусть их $2^{k+1}-3$. Тогда в графе знакомств либо чётных, либо нечётных вершин больше половины, то есть не меньше, чем 1. Выгнав их, жюри снова оставит не больше 2^k-2 человек. Пусть, наконец, у нас $2^{k+1}-2$ человек. Тогда в силу чётности числа нечётных вершин их либо не меньше, чем 2^k , и тогда жюри выгонит их, либо не больше, чем 2^k-2 , и тогда жюри выгонит чётные вершины. В обоих случаях останется не больше 2^k-2 человек, что и завершает доказательство.

4. На доске 100×100 отмечена 201 клетка. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Чему равно наименьшее число различных квадратов 2×2 (возможно, пересекающихся), все клетки которых отмечены?

Ответ. 2. Решение. Рассмотрим пары соседних по горизонтали отмеченных клеток. Заметим, что если какие-то s из этих пар оказались в одной паре соседних столбцов, то по условию все пары клеток между этими парами отмечены. Поэтому, в рассматриваемых двух столбцах не менее $s-1$ квадратов 2×2 . В любой строке, содержащей t отмеченных клеток, будет не менее $t-1$ таких пар, поэтому, просуммировав по всем строкам, получим, что всего пар не менее $201-100 = 101$. Пусть $t_{i,i+1}$ — количество пар соседних отмеченных клеток, лежащих в i -ом и $(i+1)$ -ом столбцах. Тогда, как мы доказали, $t_{1,2} + \dots + t_{99,100} \geq 101$, следовательно, $(t_{1,2}-1) + \dots + (t_{99,100}-1) \geq 2$. Это означает, что существует хотя бы два искомого квадрата 2×2 .

Пример. Отметим 199 клеток в нижней строке и левом столбце, после чего добавим к ним еще две соседние с левым краем клетки во второй снизу строке. Очевидно, здесь ровно два квадрата 2×2 .

♦ Только ответ с примером: 2 балла. Только оценка: 6 баллов.

5. На доске написано натуральное число. За одну операцию разрешается переставить его цифры в любом порядке (нули можно ставить в начале), затем прибавить 2017, убрать незначащие нули в начале и полученный результат выписать на доску. Верно ли, что для любого начального числа с помощью нескольких таких операций можно выписать на доску число 2018

Ответ. Верно. Решение. Зафиксируем шестую и пятую с конца цифры a и b (если число меньше 10^5 , сначала сделаем его шестизначным, прибавив нужное количество раз 2017). Начнем прибавлять к данному числу 2017, не меняя порядок цифр. Тогда величина $\overline{ab}$ увеличивается не более чем на 1 или обнуляется. Не реже, чем через 100 ходов, мы будем получать $b = a+1$. При выполнении этого условия поменяем цифры a и b местами. Вместо увеличения числа на 2017, число увеличивается на $2017+90000$. Так как $(2017, 90000) = 1$, то за 2017 таких замен мы можем получить все возможные остатки при делении на 2017. При этом мы увеличим наше число не более чем на $x = 2017 \cdot (100 \cdot 2017 + 90000)$.

Пусть n — первоначальное число, и $10^k > n+x$. Заметим, что среди полученных выше чисел есть число n_1 дающее такой же остаток, что и 10^k . Тогда после получения n_1 будем только прибавлять 2017 не меняя порядок цифр. После получения 10^k переставим его цифры, чтобы получить 1, после чего прибавим 2017.

6. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 по кругу в таком порядке, что все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?

Ответ. Нет. Решение. Предположим, числа так расставить удалось. Просуммируем все 100 групп из 10 стоящих подряд чисел. Тогда с одной стороны, остаток от деления этой суммы на 100 будет равен остатку суммы всех возможных остатков от деления на 100, т. е. 50. С другой стороны, каждое число на окружности будет посчитано ровно 10 раз, поэтому этот остаток будет равен удвоенному остатку от деления суммы всех чисел от 1 до 100 на 100, т. е. 0. Противоречие.

7. Для положительных чисел x и y , меньших единицы, докажите неравенство $xy + \frac{1}{xy} + 2 > x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$.

Решение. Умножив обе части неравенства на xy , после преобразования получим $(xy+1)^2 > (xy+1)(x+y)$. Разделив на $xy+1$, получим $xy+1 > x+y \Leftrightarrow (1-x)(1-y) > 0$. Последнее неравенство очевидно.

8. Внутри равнобедренного треугольника ABC с углом A , равным 110° , отмечена точка M . Оказалось, что $\angle BCM = 30^\circ$ и $\angle CBM = 25^\circ$. Найдите угол AMB .

Ответ. 85° . Решение. Отметим внутри треугольника ABC точку N такую, что $\angle CBN = 30^\circ$ и $\angle BCN = 25^\circ$. Тогда $\angle ABN = \angle NBM = 5^\circ$. Обозначим через K точку пересечения лучей BN и CM . Из соображений симметрии очевидно, что AK — биссектриса угла A треугольника ABC . То есть $\angle BAK = 55^\circ$. Тогда из суммы углов треугольника ABK получаем, что $\angle AKB = 120^\circ$, а из суммы углов треугольника BKC — что $\angle BKM = 120^\circ$. Следовательно, треугольники ABN и MBN равны по стороне и двум углам, откуда $AB = BM$ и треугольник ABM равнобедренный. Но тогда $\angle AMB = (180^\circ - \angle ABM)/2 = 85^\circ$.

♦ Только ответ: 0 баллов.

Младшая группа, первая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. *На столе стоят две корзинки, в которых лежат m и n пирожков. Два игрока ходят по очереди. За ход игрок берет из корзинки два пирожка, один из них съедает, а второй перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?*

Ответ. Первый выигрывает в следующих случаях: если m и n имеют одинаковые остатки от деления на 3, но разные остатки от деления на 2, или если m и n имеют разные остатки от деления на 3, но одинаковые остатки от деления на 2. **Решение.** Возможны три конечных позиции: $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$. В результате игры остаток от деления $m-n$ на 3, очевидно, не меняется, а значит, всегда понятно, в какую из позиций мы попадем в результате. От действий игроков это не зависит, так как каждым ходом количество пирожков уменьшается на 1. Таким образом, при $m \equiv n \pmod{3}$ конечной будет позиция $(1, 1)$, тогда первый выигрывает, если $m+n$ нечетно, а второй — если четно. При m и n , не сравнимых по модулю 3, конечной будет одна из позиций $(1, 0)$ и $(0, 1)$, а значит, первый в этом случае выигрывает, если $m+n$ четно, а второй — если нечетно.

♦ Замечено только сохранение остатка по модулю 3: 2 балла.

2. *К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2017, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2017.*

Решение. Пусть исходное число n -значно. Прибавим к нему число 2017 ровно 10^n раз, затем вычеркнем последние n цифр и получим число 2017.

3. *В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 400 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Докажите, что жюри может действовать таким образом, что после 8 изгнаний на проекте никого не останется.*

Решение. Понятно, что каждый день жюри может выгнать не менее половины оставшихся участников, а если число оставшихся участников нечетно, то более половины. Поэтому оно может добиться, чтобы после первого дня в проекте осталось не более 200 человек, после второго — не более 100, после третьего — не более 50, после четвертого — не более 25, после пятого — не более 12, после шестого — не более 6. Если их осталось 5, жюри четвертым изгнанием сможет выгнать хотя бы троих, а если 4 или меньше — не менее половины. Тогда после седьмого дня участников останется не больше двух, которых благополучно выгонят вечером пятого дня, будь они знакомы или незнакомы. Если же после шестого дня осталось 6 человек, то в силу теоремы о чётности числа нечётных вершин графа в графе их знакомств есть хотя бы 4 вершины одной чётности, и потому жюри также сможет оставить после седьмого дня не более двоих.

4. *На доске 100×100 отмечено 200 клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что существует квадрат 2×2 , все клетки которых отмечены.*

Решение. Предположим противное. Рассмотрим пары соседних по горизонтали отмеченных клеток. Заметим, что если какие-то две из этих пар оказались в одной паре соседних столбцов, то по условию все пары клеток между этими парами отмечены, и взяв любые две из них, соседние по вертикали, получим искомый квадрат. Следовательно, имеется всего не более 99 таких пар. С другой стороны, в любой строке, содержащей t отмеченных клеток, будет не менее $t-1$ таких пар, поэтому, просуммировав по всем строкам, получим, что всего пар не менее $200-100 = 100$. Противоречие.

5. В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x и y страницы с номерами $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, $8y$ все попали в разные тома? Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x и y страницы с номерами $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, $8y$ все попали в разные тома?

Ответ. Не может. **Решение.** Пусть в томе N страниц. Тогда из неравенств $8x \leq 10N$, $8y \leq 10N$ следует, что $3x < 4N$ и $3y < 4N$, а значит все страницы $2x$, $2y$, $3x$, $3y$ находятся в первых четырех томах. Не умаляя общности, в первом томе находится $2x$. Значит $2x \leq N$, но отсюда $8x \leq 4N$, а значит в первых 4 томах должны располагаться уже 5 страниц $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, противоречие.

6. Можно ли расставить числа $1, 2, 3, 4, \dots, 100$ по кругу в таком порядке, что все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?

Ответ. Нет. **Решение.** Предположим, числа так расставить удалось. Просуммируем все 100 групп из 10 стоящих подряд чисел. Тогда с одной стороны, остаток от деления этой суммы на 100 будет равен остатку суммы всех возможных остатков от деления на 100, т. е. 50. С другой стороны, каждое число на окружности будет посчитано ровно 10 раз, поэтому этот остаток будет равен удесятерённому остатку от деления суммы всех чисел от 1 до 100 на 100, т. е. 0. Противоречие.

7. Для положительных чисел x и y , меньших единицы, докажите неравенство $xy + \frac{1}{xy} + 2 > x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}$.

Решение. Умножив обе части неравенства на xy , после преобразования получим $(xy+1)^2 > (xy+1)(x+y)$. Разделив на $xy+1$, получим $xy+1 > x+y \Leftrightarrow (1-x)(1-y) > 0$. Последнее неравенство очевидно.

8. Внутри равнобедренного треугольника ABC с углом A , равным 110° , отмечена точка M . Оказалось, что $\angle BCM = 30^\circ$ и $\angle CBM = 25^\circ$. Найдите угол AMB .

Ответ. 85° . **Решение.** Отметим внутри треугольника ABC точку N такую, что $\angle CBN = 30^\circ$ и $\angle BCN = 25^\circ$. Тогда $\angle ABN = \angle NBM = 5^\circ$. Обозначим через K точку пересечения лучей BN и CM . Из соображений симметрии очевидно, что AK — биссектриса угла A треугольника ABC . То есть $\angle BAK = 55^\circ$. Тогда из суммы углов треугольника ABK получаем, что $\angle AKB = 120^\circ$, а из суммы углов треугольника BKC — что $\angle BKM = 120^\circ$. Следовательно, треугольники ABN и MBN равны по стороне и двум углам, откуда $AB = BM$ и треугольник ABM равнобедренный. Но тогда $\angle AMB = (180^\circ - \angle ABM)/2 = 85^\circ$.

Младшая группа, вторая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

- ♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.
- ♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. На столе стоят две корзинки, в которых лежат 20172017 и 20172018 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Вася. **Решение.** Каждым своим ходом Вася действует так, чтобы после его хода количества пирожков в группах отличались не более чем на 1. Пусть разница между количествами пирожков в группах перед Васиным ходом равна $d > 1$. Тогда Васе нужно найти ближайшее к d кратное 3 число $3k$ (оно отличается от d не более чем на 1), и затем из большей группы взять $2k$ пирожков, а в меньшую добавить k . Теперь разница между группами уменьшилась на $3k$, а значит оказалась в промежутке от -1 до 1.

Заметим, что Петя своим ходом (включая и первый), имея две группы с разностью от -1 до 1, обязан изменить разность на кратное 3 ненулевое число, а значит, разность выйдет из диапазона от -1 до 1, и Вася сможет действовать по своей стратегии. Так как игра рано или поздно закончится — выигрывает Вася.

2. Натуральные числа m и n таковы, что $m^{2017} + m + n$ делится на mn . Докажите, что $m + n$ делится на m^2 .

Решение. Из условия ясно, что n делится на m . Пусть $n = km$. Имеем $m^{2017} + (k+1)m$ делится на km^2 , откуда $m^{2016} + (k+1)$ делится на km , откуда $k+1$ делится на m . Осталось заметить, что $m+n = (k+1)m$.

3. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 300 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Докажите, что жюри может действовать таким образом, что после 8 изгнаний на проекте никого не останется.

Решение. Понятно, что каждый день жюри может выгнать не менее половины оставшихся участников, а если число оставшихся участников нечетно, то более половины. Поэтому оно может добиться, чтобы после первого дня в проекте осталось не более 150 человек, после второго — не более 75, после третьего — не более 37, после четвертого — не более 18, после пятого — не более 9, после шестого — не более 4, после седьмого — не более 2, которых благополучно выгонят вечером восьмого дня, будь они знакомы или незнакомы.

4. На доске 100×100 отмечено 200 клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что существует квадрат 2×2 , все клетки которых отмечены.

Решение. Предположим противное. Рассмотрим пары соседних по горизонтали отмеченных клеток. Заметим, что если какие-то две из этих пар оказались в одной паре соседних столбцов, то по условию все пары клеток между этими парами отмечены, и взяв любые две из них, соседние по вертикали, получим искомый квадрат. Следовательно, имеется всего не более 99 таких пар. С другой стороны, в любой строке, содержащей t отмеченных клеток, будет не менее $t-1$ таких пар, поэтому, просуммировав по всем строкам, получим, что всего пар не менее $200-100 = 100$. Противоречие.

5. В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных чисел x и y страницы с номерами $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, $8y$ все попали в разные тома?

Ответ. Не может. **Решение.** Пусть в томе N страниц. Тогда из неравенств $8x \leq 10N$, $8y \leq 10N$ следует, что $3x < 4N$ и $3y < 4N$, а значит все страницы $2x$, $2y$, $3x$, $3y$ находятся в первых четырех томах. Не умаляя общности, в первом томе находится $2x$. Значит $2x \leq N$, но отсюда $8x \leq 4N$, а значит в первых 4 томах должны располагаться уже 5 страниц $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, противоречие.

6. Можно ли расставить числа $1, 2, 3, 4, \dots, 100$ по кругу в таком порядке, что все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?

Ответ. Нет. **Решение.** Предположим, числа так расставить удалось. Просуммируем все 100 групп из 10 стоящих подряд чисел. Тогда с одной стороны, остаток от деления этой суммы на 100 будет равен остатку суммы всех возможных остатков от деления на 100, т. е. 50. С другой стороны, каждое число на окружности будет посчитано ровно 10 раз, поэтому этот остаток будет равен удесятерённому остатку от деления суммы всех чисел от 1 до 100 на 100, т. е. 0. Противоречие.

7. Для положительных чисел x и y , меньших единицы, докажите неравенство $xy + \frac{1}{xy} + 1 > \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Решение. Умножив обе части неравенства на xy , получим $(xy)^2 + xy + 1 > x + y$. Переносим все члены в правую часть и разлагая на множители, получаем очевидное неравенство $(xy)^2 + (1-x)(1-y) > 0$.

8. Основание BC равнобедренного треугольника ABC больше его боковых сторон. В треугольнике провели биссектрису BE . Из точки C провели перпендикуляр к прямой BE , он пересек продолжение стороны AB в точке P . Прямая PE пересекает сторону BC в точке S . Докажите, что $BS = SP$.

Решение. Точки C и P симметричны относительно прямой BE . Поэтому относительно той же прямой симметричны и точки $S = PE \cap BC$ и $A = CE \cap BA$. Следовательно, $\angle BPS = \angle ACB = \angle ABC$, откуда и следует, что $BS = SP$.

Младшая группа, третья лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

1. На столе стоят две корзинки, в которых лежат по 2017 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из корзинки два пирожка, один из них съедает, а второй перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Вася. **Решение.** Делая ходы, симметричные ходам Пети, Вася добивается позиции (1, 1), в которой Петя проигрывает.

2. Натуральные числа x и y таковы, что числа $\frac{2y}{x(y-x)}$ и $\frac{(y-x)(y+1)}{2y^2}$ целые. Найдите все возможные значения чисел x и y .

Ответ. $x = y = 1$. **Решение.** По условию существуют натуральные u и v такие, что $2y = ux(y-x)$ и $2vy^2 = (y+1)(y-x)$. Деля второе равенство на первое и умножая потом обе части на ux , получаем $2uvx = y+1$, откуда $y = 1$, так как иначе $y+1 < 2y \leq 2uvx$. При $y = 1$ имеем $2uvx = 2$, откуда $x = 1$.

♦ Только ответ: 0 баллов.

3. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 42 человека, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Докажите, что жюри может действовать таким образом, что после 5 изгнаний на проекте никого не останется.

Решение. В силу чётности числа нечётных вершин в графе знакомств на 42 вершинах не менее 22 вершин одной чётности. Поэтому после первого изгнания жюри может оставить не более 20 человек. Выгнав на второй день не меньше половины из них, жюри оставит не более 10 человек. Если их осталось 10 или 9, жюри сможет выгнать хотя бы пятерых, а если 8 или меньше — не менее половины. В любом случае после третьего изгнания оно сможет оставить не более 5 человек. Если их осталось 5, жюри четвертым изгнанием сможет выгнать хотя бы троих, а если 4 или меньше — не менее половины. Тогда после четвертого дня участников останется не больше двух, которых благополучно выгонят вечером пятого дня, будь они знакомы или незнакомы.

4. 30 учеников пронумерованы в классном журнале числами от 1 до 30. Каждый из них заявил: «Каждый, у кого номер имеет с моим общий делитель, больший 1, иногда врёт!». Определите наибольшее возможное число учеников, которые никогда не врут.

Ответ. 15. **Решение.** Разобьём учеников на пары: (1, 2), (3, 4), ..., (29, 30). В паре не может быть более одного всегда говорящего правду. Пример на 15: все ученики с чётными номерами.

♦ Только ответ с примером: 2 балла. Только оценка: 6 баллов.

5. В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов по 500 страниц каждый. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных чисел x и y страницы с номерами x , $2x$, $11x$, y , $3y$, $5y$ все попали в разные тома?

Ответ. Не может. **Решение.** По условию $11x \leq 5000 \Rightarrow x \leq 5000/11$, $2x \leq 10000/11$. Значит, страница x должна быть в первом томе, $2x$ — во втором, а y — самое раннее, в третьем. Но тогда $y > 1000 \Rightarrow 5y > 5000$, и страницы с таким номером в собрании сочинений нет.

6. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 30 по кругу в таком порядке, что все 30 сумм пар соседних чисел давали различные остатки от деления на 30?

Ответ. Нет. **Решение.** Предположим, числа так расставить удалось. Просуммируем все 30 пар стоящих рядом чисел. Тогда с одной стороны, остаток от деления этой суммы на 30 будет равен остатку суммы всех возможных остатков от деления на 100, т. е. 15. С другой стороны, каждое число на окружности будет посчитано ровно дважды, поэтому этот остаток будет равен удвоенному остатку от деления суммы всех чисел от 1 до 100 на 100, т. е. 0. Противоречие.

7. Может ли семизначное число, начинающееся на 2017, делиться на все числа от 1 до 9?

Ответ. Не может. **Решение.** Ясно, что последней цифрой числа должен быть 0. Чтобы число делилось на 9, надо, чтобы сумма дописанных цифр была сравнима с 8 по модулю 9. Предпоследняя цифра должна обеспечивать делимость на 4, т.е. быть чётной. Среди семизначных таких чисел шесть: 2017080, 2017260, 2017440, 2017620, 2017800 и 2017980, и среди них нет такого, которое делится на 7 и на 8 одновременно.

8. Основание BC равнобедренного треугольника ABC больше его боковых сторон. В треугольнике провели биссектрису BE . Из точки C провели перпендикуляр к прямой BE , он пересек продолжение стороны AB в точке P . Прямая PE пересекает сторону BC в точке S . Докажите, что $BS = SP$.

Решение. Точки C и P симметричны относительно прямой BE . Поэтому относительно той же прямой симметричны и точки $S = PE \cap BC$ и $A = CE \cap BA$. Следовательно, $\angle BPS = \angle ACB = \angle ABC$, откуда и следует, что $BS = SP$.

Группа «Старт», высшая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

1. В собрании сочинений Н. Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x, y страницы с номерами $2x, 2y, 3x, 3y, 8x, 8y$ все попали в разные тома?

Ответ. Не может. **Решение.** Пусть в томе N страниц. Тогда из неравенств $8x \leq 10N, 8y \leq 10N$ следует, что $3x < 4N$ и $3y < 4N$, а значит все страницы $2x, 2y, 3x, 3y$ находятся в первых четырех томах. Не умаляя общности, в первом томе находится $2x$. Значит $2x \leq N$, но отсюда $8x \leq 4N$, а значит в первых 4 томах должны располагаться уже 5 страниц $2x, 2y, 3x, 3y, 8x$, противоречие.

2. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 300 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри собирается на заседание и выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри всегда может действовать так, чтобы после семи заседаний на проекте не осталось ни одного участника?

Ответ. Неверно. **Решение.** Представим компанию в виде графа, где вершинами являются люди, а ребра проводятся между друзьями. Пусть есть граф G , в котором поровну вершин четной и нечетной степени. Назовем удвоением такого графа следующий граф G' : рисуем рядом две копии графа G и затем каждой вершине четной степени в левой копии берем в пару вершину нечетной степени в правой копии, и все вершины в парах соединяем ребром. Полученный граф G' обладает замечательным свойством: что бы с ним ни сделало жюри, из него получится копия графа G ! Кроме того, в нем так же, как и в G , поровну вершин четной и нечетной степени.

Возьмем теперь граф G_1 на 4 вершинах и 3 ребрах, образующих простой путь длины 3. При помощи операции удвоения будем последовательно получать из G_1 граф G_2 , из G_2 граф G_3 , и так далее до G_7 , в котором будет как раз $2^8 = 256$ вершин. Теперь достаточно подружить 300 участников так: 44 пусть останутся совсем без друзей, а остальных 256 подружим согласно графу G_7 . Теперь, как бы ни действовало жюри, после первого дня образуется граф знакомств G_6 (не считая, возможно, 44 ни с кем не подружившихся), после второго G_5 , и так далее, после шестого дня G_1 , а после седьмого дня на проекте останутся как минимум двое.

3. К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2017, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2017

Решение. Пусть исходное число n -значно. Прибавим к нему число 2017 ровно 10^n раз, затем вычеркнем последние n цифр и получим число 2017.

4. Артур смог разрезать квадрат на 21 квадрат, среди которых нет равных, Вилли — на 22, Лео — на 23, а Остин — на 26. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество неравных квадратов большее 100.

Решение. Рассмотрим какое-то разрезание квадрата на неравные квадратики. Если разрезать самый маленький из квадратиков на неравные квадратики, то все квадратики опять окажутся неравными. Таким образом можно увеличивать количество квадратиков разрезания на 20, 21, 22 или 25. Последовательно 4 раза увеличивая количество квадратиков на 20, начиная с 21, мы получим 101. Начиная с 22 — 102, начиная с 23 — 103. Если вместо прибавления 20 мы прибавим 21, или вместо 21 прибавим 22, то можем увеличить результат на 1, т.е. последовательно можем получить все суммы от 101 до 111 ($111 = 23 + 4 \times 22$). Число 112 получаем так: $26 + 25 + 21 + 20 + 20$. Последовательно заменяя 20 на 21, а 21 на 22, мы можем получить все числа до 117 ($26 + 25 + 3 \times 22$). Число 118 получаем так: $26 + 25 + 25 + 22 + 20$. И далее, $119 = 26 + 25 + 25 + 22 + 21$, $120 = 26 + 25 + 25 + 22 + 22$. Любое число, большее 121, мы можем получить, несколько раз прибавляя 20 к одному из уже полученных чисел.

5. В группе из 5 детей у каждого в руке один шарик, причём все шарики разных цветов. Каждую минуту какие-то двое меняются шариками. Может ли так случиться, что через 10 минут любые двое ровно

один раз поменяются шариками, и при этом у каждого из детей окажется шарик того же цвета, что и в начале?

Ответ. Может. **Решение.** Пронумеруем детей от 1 до 5 и проведем последовательно обмены в следующих парах: (25)(12)(15) (35)(34)(45) (13)(24) (23)(14). Нетрудно убедиться, что каждый шарик окажется в результате на исходном месте.

6. На доске 100×100 отмечено 200 клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что найдется квадрат 2×2 , все клетки которого отмечены.

Решение. Предположим противное. Рассмотрим пары соседних по горизонтали отмеченных клеток. Заметим, что если какие-то две из этих пар оказались в одной паре соседних столбцов, то по условию все пары клеток между этими парами отмечены, и взяв любые две из них, соседние по вертикали, получим искомый квадрат. Следовательно, имеется всего не более 99 таких пар. С другой стороны, в любой строке, содержащей t отмеченных клеток, будет не менее $t-1$ таких пар, поэтому, просуммировав по всем строкам, получим, что всего пар не менее $200-100 = 100$. Противоречие.

7. Можно ли расставить числа $1, 2, 3, 4, \dots, 100$ по кругу в таком порядке, чтобы все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?

Ответ. Нет. **Решение.** Предположим, числа так расставить удалось. Просуммируем все 100 групп из 10 стоящих подряд чисел. Тогда с одной стороны, остаток от деления этой суммы на 100 будет равен остатку суммы всех возможных остатков от деления на 100, т. е. 50. С другой стороны, каждое число на окружности будет посчитано ровно 10 раз, поэтому этот остаток будет равен удесятерённому остатку от деления суммы всех чисел от 1 до 100 на 100, т. е. 0. Противоречие.

8. На столе стоят две корзинки, в которых лежат 1000 и 2017 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Петя. **Решение.** Каждым своим ходом Петя действует так, чтобы после его хода количества пирожков в группах отличались не более чем на 1. Пусть разница между количествами пирожков в группах перед Петиным ходом равна $d > 1$. Тогда Пете нужно найти ближайшее к d кратное 3 число $3k$ (оно отличается от d не более чем на 1), и затем из большей группы взять $2k$ пирожков, а в меньшую добавить k . Теперь разница между группами уменьшилась на $3k$, а значит оказалась в промежутке от -1 до 1.

Заметим, что Вася своим ходом, имея две группы с разностью от -1 до 1, обязан изменить разность на кратное 3 ненулевое число, а значит, разность выйдет из диапазона от -1 до 1, и Петя сможет продолжить действовать по своей стратегии. Так как игра рано или поздно закончится — выигрывает Петя.

Группа «Старт», первая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

1. В собрании сочинений Н. Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x, y страницы с номерами $x, y, 2x, 3y, 5y, 11x$ все попали в разные тома?

Ответ. Не может. **Решение.** Пусть в каждом томе n страниц. Тогда $11x \leq 10n \Rightarrow x \leq 10n/11, 2x \leq 20n/11$. Значит, страница x должна быть в первом томе, $2x$ — во втором, а y — самое раннее, в третьем. Но тогда $y > 2n \Rightarrow 5y > 10n$, и страницы с таким номером в собрании сочинений нет.

2. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 30 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри собирается на заседание и выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри всегда может действовать так, чтобы после 4 заседаний на проекте не осталось ни одного участника?

Ответ. Верно. **Решение.** В графе знакомств на 30 вершинах либо не более 14 чётных вершин, либо не более 14 нечётных. Поэтому жюри сможет оставить после первого дня не более 14 участников. В графе знакомств на не более чем 14 вершинах либо не более 6 чётных вершин, либо не более 6 нечётных. Поэтому жюри сможет оставить после первого дня не более 6 участников. В графах знакомств на 6, 5, 4 и 3 вершинах найдется хотя бы 4, 3, 2 и 2 вершины одной четности соответственно. Поэтому после второго дня жюри всегда может оставить не более 2 человек, и выгнать их после третьего дня.

3. К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2017, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2017.

Решение. Пусть исходное число n -значно. Прибавим к нему число 2017 ровно 10^n раз, затем вычеркнем последние n цифр и получим число 2017.

4. Артур смог разрезать квадрат на 21 квадрат, среди которых нет равных, Вилли — на 22, Лео — на 23, а Остин — на 26. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество неравных квадратов больше 100.

Решение. Рассмотрим какое-то разрезание квадрата на неравные квадратики. Если разрезать самый маленький из квадратиков на неравные квадратики, то все квадратики опять окажутся неравными. Таким образом можно увеличивать количество квадратиков разрезания на 20, 21, 22 или 25. Последовательно 4 раза увеличивая количество квадратиков на 20, начиная с 21, мы получим 101. Начиная с 22 — 102, начиная с 23 — 103. Если вместо прибавления 20 мы прибавим 21, или вместо 21 прибавим 22, то можем увеличить результат на 1, т.е. последовательно можем получить все суммы от 101 до 111 ($111 = 23 + 4 \times 22$). Число 112 получаем так: $26 + 25 + 21 + 20 + 20$. Последовательно заменяя 20 на 21, а 21 на 22, мы можем получить все числа до 117 ($26 + 25 + 3 \times 22$). Число 118 получаем так: $26 + 25 + 25 + 22 + 20$. И далее, $119 = 26 + 25 + 25 + 22 + 21$, $120 = 26 + 25 + 25 + 22 + 22$. Любое число, большее 121, мы можем получить, несколько раз прибавляя 20 к одному из уже полученных чисел.

5. В группе из 4 детей у каждого в руке один шарик, причём все шарики разных цветов. Каждую минуту какие-то двое меняются шариками. Может ли так случиться, что через 6 минут любые двое ровно один раз поменяются шариками, и при этом у каждого из детей окажется шарик того же цвета, что и в начале?

Ответ. Могло. **Решение.** Пронумеруем детей: 1, 2, 3, 4. Порядок ходов таков: $2 \leftrightarrow 1, 3 \leftrightarrow 4, 1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4, 4 \leftrightarrow 1, 2 \leftrightarrow 3$.

6. На доске 100×100 отмечено несколько клеток, причём в любой строке и в любом столбце лежит не менее пяти отмеченных клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Какое наименьшее количество квадратов 5×5 (возможно, пересекающихся), состоящих из отмеченных клеток, может быть?

Ответ. 2. Решение. Оценка. Рассмотрим самую нижнюю строчку. В ней не менее 5 отмеченных клеток. Выберем из них 5 подряд стоящих. В столбцах, содержащих эти клетки, будет не менее, чем по 5 клеток, поэтому они будут образовывать квадрат, содержащий в качестве самой нижней строке выбранные 5 клеток. Аналогично построим ещё квадрат для верхней строки. Он, очевидно, не будет совпадать с ранее построенным, поэтому всегда найдутся 2 квадрата. *Пример.* Отметим все клетки диагонали, ведущей из левого нижнего угла исходного квадрата в правый верхний, также отметим все клетки, образующие квадраты 5×5 , лежащие в этих углах и все клетки, соседние с диагональными по стороне или углу. Тогда все условия будут выполнены и образуется всего 2 квадрата.

♦ Только оценка: 4 балла. Только пример: 2 балла.

7. Можно ли расставить числа $1, 2, 3, 4, \dots, 100$ по кругу в таком порядке, чтобы все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?

Ответ. Нет. Решение. Предположим, числа так расставить удалось. Просуммируем все 100 групп из 10 стоящих подряд чисел. Тогда с одной стороны, остаток от деления этой суммы на 100 будет равен остатку суммы всех возможных остатков от деления на 100, т. е. 50. С другой стороны, каждое число на окружности будет посчитано ровно 10 раз, поэтому этот остаток будет равен удесятерённому остатку от деления суммы всех чисел от 1 до 100 на 100, т. е. 0. Противоречие.

8. На столе стоят две корзинки, в которых лежат 1000 и 2017 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Петя. Решение. Каждым своим ходом Петя действует так, чтобы после его хода количества пирожков в группах отличались не более чем на 1. Пусть разница между количествами пирожков в группах перед Петиним ходом равна $d > 1$. Тогда Пете нужно найти ближайшее к d кратное 3 число $3k$ (оно отличается от d не более чем на 1), и затем из большей группы взять $2k$ пирожков, а в меньшую добавить k . Теперь разница между группами уменьшилась на $3k$, а значит оказалась в промежутке от -1 до 1.

Заметим, что Вася своим ходом, имея две группы с разностью от -1 до 1, обязан изменить разность на кратное 3 ненулевое число, а значит, разность выйдет из диапазона от -1 до 1, и Петя сможет продолжить действовать по своей стратегии. Так как игра рано или поздно закончится — выигрывает Петя.

Группа «Старт», вторая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

1. *В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x , y страницы с номерами x , y , $2x$, $3y$, $5y$, $11x$ все попали в разные тома?*

Ответ. Не может. **Решение.** Пусть в каждом томе n страниц. Тогда $11x \leq 10n \Rightarrow x \leq 10n/11$, $2x \leq 20n/11$. Значит, страница x должна быть в первом томе, $2x$ — во втором, а y — самое раннее, в третьем. Но тогда $y > 2n \Rightarrow 5y > 10n$, и страницы с таким номером в собрании сочинений нет.

2. *В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 14 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри собирается на заседание и выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри всегда может действовать так, чтобы после трёх заседаний на проекте не осталось ни одного участника?*

Ответ. Верно. **Решение.** В графе знакомств на 14 вершинах либо не менее 8 чётных вершин, либо не менее 8 нечётных. Поэтому жюри сможет оставить после первого дня не более 6 участников. В графах знакомств на 6, 5, 4 и 3 вершинах найдется хотя бы 4, 3, 2 и 2 вершины одной четности соответственно. Поэтому после второго дня жюри всегда может оставить не более 2 человек, и выгнать их после третьего дня.

3. *В классном журнале 30 учеников пронумерованы числами от 1 до 30. Каждый из них заявил: «Каждый, у кого номер взаимно прост с моим, иногда врёт!». Определите наибольшее возможное число учеников, которые никогда не врут.*

Ответ. 15. **Решение.** Разобьём учеников на пары: (1, 2), (3, 4), ..., (29, 30). В паре не может быть более одного всегда говорящего правду. Пример на 15: все ученики с чётными номерами.

♦ Только оценка: 4 балла. Только пример: 4 балла.

4. *Артур смог разрезать квадрат на 21 квадрат, среди которых нет равных, Вилли — на 22, Лео — на 23, а Остин — на 26. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество неравных квадратов большее 100.*

Решение. Рассмотрим какое-то разрезание квадрата на неравные квадратики. Если разрезать самый маленький из квадратиков на неравные квадратики, то все квадратики опять окажутся неравными. Таким образом можно увеличивать количество квадратиков разрезания на 20, 21, 22 или 25. Последовательно 4 раза увеличивая количество квадратиков на 20, начиная с 21, мы получим 101. Начиная с 22 — 102, начиная с 23 — 103. Если вместо прибавления 20 мы прибавим 21, или вместо 21 прибавим 22, то можем увеличить результат на 1, т.е. последовательно можем получить все суммы от 101 до 111 ($111 = 23 + 4 \times 22$). Число 112 получаем так: $26 + 25 + 21 + 20 + 20$. Последовательно заменяя 20 на 21, а 21 на 22, мы можем получить все числа до 117 ($26 + 25 + 3 \times 22$). Число 118 получаем так: $26 + 25 + 25 + 22 + 20$. И далее, $119 = 26 + 25 + 25 + 22 + 21$, $120 = 26 + 25 + 25 + 22 + 22$. Любое число, большее 121, мы можем получить, несколько раз прибавляя 20 к одному из уже полученных чисел.

5. *В группе из 4 детей у каждого в руке один шарик, причём все шарики разных цветов. Каждую минуту какие-то двое меняются шариками. Могло ли так случиться, что через несколько минут любые двое ровно один раз поменялись и при этом у каждого из детей оказался шарик того же цвета, что и в начале?*

Ответ. Могло. **Решение.** Пронумеруем детей: 1, 2, 3, 4. Порядок ходов таков: $2 \leftrightarrow 1$, $3 \leftrightarrow 4$, $1 \leftrightarrow 3$, $2 \leftrightarrow 4$, $4 \leftrightarrow 1$, $2 \leftrightarrow 3$.

6. *На доске 100×100 отмечено несколько клеток, причем в любом столбце и в любой строке отмечено не менее двух клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что найдется квадрат 2×2 , все клетки которого отмечены.*

Решение. Рассмотрим верхнюю строчку, в ней найдутся две соседние отмеченные клетки. В столбцах с этими клетками есть еще хотя бы по одной отмеченной клетке, тогда, в силу условия, клетки на пересечении этих двух столбцов и второй сверху строки тоже будут отмечены. Вместе с отмеченными клетками первой строки они образуют квадрат 2×2 .

7. Числа $1, 2, 3, 4, \dots, 100$ расставили по кругу в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать две группы из 50 идущих подряд чисел (возможно пересекающиеся) так, чтобы суммы чисел в этих группах давали одинаковые остатки от деления на 100.

Решение. Сумма всех чисел в круге равна 5050, то есть дает остаток 50 при делении на 100. Предположим, что остатки сумм во всех группах различны. Так как групп ровно 100, каждый остаток должен встретиться ровно один раз. Но если сумма каких-то 50 идущих подряд чисел дает остаток 25 по модулю 100, то сумма оставшихся 50 тоже дает остаток 25. Противоречие

8. На столе стоят две корзинки, в одной из них лежит 44 пирожка, а во второй — 55. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки два пирожка, один из них съедает, а второй перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Петя. **Решение.** Заметим, что разность количеств пирожков в корзинках не меняет остаток по модулю три, поэтому игра закончится, когда в одной корзине будет один пирожок, а во другой — 0. Суммарное количество пирожков за каждый ход уменьшается на один, то есть будет сделано $44+55-1 = 98$ ходов. Значит выигрывает Петя.

Группа «Старт», третья лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

1. Малыш и Карлсон играют в пирожки, лежащие на двух тарелках. За один ход можно взять два пирожка из любой одной тарелки, один — съесть, а второй — переложить на другую тарелку. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Начинает Карлсон. Кто выиграет, если сначала на одной тарелке лежало 44, а на второй — 55 пирожков?

Ответ. Карлсон. **Решение.** Заметим, что разность количеств пирожков в корзинках не меняет остаток по модулю три, поэтому игра закончится, когда в одной корзине будет один пирожок, а в другой — 0. Суммарное количество пирожков за каждый ход уменьшается на один, то есть будет сделано $44+55-1 = 98$ ходов. Значит выиграет Карлсон.

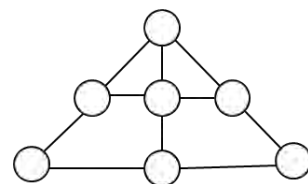
2. Артур смог разрезать квадрат на 21 квадрат, среди которых нет равных, Вилли — на 22, Лео — на 23, а Остин — на 26. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество неравных квадратов большее 100.

Решение. Рассмотрим какое-то разрезание квадрата на неравные квадратики. Если разрезать самый маленький из квадратиков на неравные квадратики, то все квадратики опять окажутся неравными. Таким образом можно увеличивать количество квадратиков разрезания на 20, 21, 22 или 25. Последовательно 4 раза увеличивая количество квадратиков на 20, начиная с 21, мы получим 101. Начиная с 22 — 102, начиная с 23 — 103. Если вместо прибавления 20 мы прибавим 21, или вместо 21 прибавим 22, то можем увеличить результат на 1, т.е. последовательно можем получить все суммы от 101 до 111 ($111 = 23+4 \times 22$). Число 112 получаем так: $26+25+21+20+20$. Последовательно заменяя 20 на 21, а 21 на 22, мы можем получить все числа до 117 ($26+25+3 \times 22$). Число 118 получаем так: $26+25+25+22+20$. И далее, $119 = 26+25+25+22+21$, $120 = 26+25+25+22+22$. Любое число, большее 121, мы можем получить, несколько раз прибавляя 20 к одному из уже полученных чисел.

3. К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2017, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2017.

Решение. Пусть исходное число n -значно. Прибавим к нему число 2017 ровно 10^n раз, затем вычеркнем последние n цифр и получим число 2017.

4. Сколькими способами можно вписать в кружочки числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, чтобы суммы всех троек чисел, расположенных вдоль каждого из пяти отрезков, были равны?



Ответ. 12. **Решение.** Сумма всех чисел равна 28. Все числа, кроме верхнего, должны разбиваться на 2 группы по 3 с одинаковой суммой, а также — на 3 группы по 2 с одинаковой суммой. Это возможно, если сумма этих чисел делится на 6. Такое может случиться только, если верхнее число — 4. Вдоль «лучей», идущих от верхнего кружка должны располагаться пары чисел с суммой 8. Таких пар — три: (1, 7), (2, 6), (3, 5). Их можно расположить вдоль «лучей» шестью разными способами. Если мы зафиксируем одно из расположений, например, пару (1, 7) расположим на левом «луче» (это можно сделать двумя способами — 1 выше, 7 ниже, или наоборот), то остальные четыре числа располагаются однозначно: в горизонтальном ряду с семёркой должны стоять 2 и 3, а с единицей — 6 и 5 соответственно.

5. В классном журнале 30 учеников пронумерованы числами от 1 до 30. Каждый из них заявил: «Каждый, у кого номер взаимно прост с моим, иногда врёт!». Определите наибольшее возможное число учеников, которые никогда не врут.

Ответ. 15. **Решение.** Разобьём учеников на пары: (1, 2), (3, 4), ..., (29, 30). В паре не может быть более одного всегда говорящего правду. Пример на 15: все ученики с чётными номерами.

♦ Только оценка: 4 балла. Только пример: 4 балла.

6. Найдите наименьшее число, которое начинается с цифр 2017 и делится на все числа от 1 до 10.

Ответ. 20170080. **Решение.** Ясно, что последней цифрой числа должен быть 0. Чтобы число делилось на 9, надо, чтобы сумма дописанных цифр была сравнима с 8 по модулю 9. Единственное шестизначное такое число 201780 не делится на 7. Предпоследняя цифра должна обеспечивать делимость на 4, т.е. быть чётной. Среди семизначных таких чисел шесть: 2017080, 2017260, 2017440, 2017620, 2017800 и 2017980. Среди них нет такого, которое делится на 7 и на 8 одновременно. Наименьшее из восьмизначных чисел — 20170080 — нам подходит.

♦ Только ответ: 4 балла.

7. В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов. В каждом из них страниц поровну, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная. Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x, y страницы с номерами $x, y, 2x, 3y, 11x, 5y$ все попали в разные тома?

Ответ. Не может. **Решение.** Пусть в каждом томе n страниц. Тогда $11x \leq 10n \Rightarrow x \leq 10n/11, 2x \leq 20n/11$. Значит, страница x должна быть в первом томе, $2x$ — во втором, а y — самое раннее, в третьем. Но тогда $y > 2n \Rightarrow 5y > 10n$, и страницы с таким номером в собрании сочинений нет.

8. В группе из 4 детей у каждого в руке один шарик, причём все шарики разных цветов. Каждую минуту какие-то двое меняются шариками. Могло ли так случиться, что через несколько минут любые двое ровно один раз поменялись и при этом у каждого из детей оказался шарик того же цвета, что и в начале?

Ответ. Могло. **Решение.** Пронумеруем детей: 1, 2, 3, 4. Порядок ходов таков: $2 \leftrightarrow 1, 3 \leftrightarrow 4, 1 \leftrightarrow 3, 2 \leftrightarrow 4, 4 \leftrightarrow 1, 2 \leftrightarrow 3$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Натуральные числа a , b , c и d таковы, что $ab = cd$, $a \neq c$. Клетчатый прямоугольник составили из нескольких прямоугольников $a \times b$ (a строчек и b столбцов) и нескольких прямоугольников $c \times d$ (c строчек и d столбцов). Один из прямоугольников $a \times b$ потерялся, а вместо него нашёлся еще один прямоугольник $c \times d$. Докажите, что теперь из всех имеющихся прямоугольников, не поворачивая их, составить тот же клетчатый прямоугольник уже не удастся.

2. Докажите, что не существует натурального n такого, что $n+k^2$ оказывается квадратом по крайней мере для n различных натуральных k .

3. Наташа написала на доске n различных целых чисел и сообщила находящемуся в соседней комнате Васе их сумму и количество. Вася может обращаться к Наташе с просьбами следующих видов: 1) сообщить, есть ли на доске число k (k он выбирает сам); 2) сообщить, можно ли все числа на доске разбить на две группы с равными суммами (сумма чисел в пустой группе считается равной 0); 3) стереть с доски число k , если оно на ней есть (k он выбирает сам); 4) дописать на доску число k , если его на ней нет (k он выбирает сам). Наташа исполняет все желания Васи, но не сообщает, пришлось ли ей стереть число в случае 3 или дописать число в случае 4. Докажите, что, высказав не более $3n$ желаний, Вася сможет узнать, был ли в начале на доске набор чисел с суммой 2017.

4. Точки M и N расположены на сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно таким образом, что $\frac{2CN}{BC} = \frac{AM}{AB}$. Точка P лежит на прямой AC . Докажите, что прямые MN и NP перпендикулярны тогда и только тогда, когда PN — биссектриса угла MPC .

5. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ удовлетворяют условиям $x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}, x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}, \dots, x_{n-1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ и $x_n = 1 + \frac{1}{x_1}$. Докажите, что все они равны.

6. Докажите, что для бесконечно многих пар натуральных чисел x и y число $\frac{x^3 + y^3 + 2}{x^2 + y^2 + 1}$ является удвоенным квадратом целого числа.

7. В треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$. На стороне AB отмечена точка D , на стороне BC — точка E , а на стороне AC — точка F , причём $AD = CD$ и $CE = DE = DF$. Докажите, что $BE < AF$.

8. В связном графе степень каждой вершины равна 2016, и его вершины можно покрасить в 2017 цветов правильным образом так, что среди соседей каждой вершины есть все цвета, кроме ее цвета. Сколько вершин может быть в таком графе?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Натуральные числа a , b , c и d таковы, что $ab = cd$, $a \neq c$. Клетчатый прямоугольник составили из нескольких прямоугольников $a \times b$ (a строчек и b столбцов) и нескольких прямоугольников $c \times d$ (c строчек и d столбцов). Один из прямоугольников $a \times b$ потерялся, а вместо него нашёлся еще один прямоугольник $c \times d$. Докажите, что теперь из всех имеющихся прямоугольников, не поворачивая их, составить тот же клетчатый прямоугольник уже не удастся.

2. Докажите, что не существует натурального n такого, что $n+k^2$ оказывается квадратом по крайней мере для n различных натуральных k .

3. Наташа написала на доске три различных целых числа с суммой 1000000 и сообщила находящемуся в соседней комнате Васе их сумму и количество. Вася может обращаться к Наташе с просьбами следующих видов: 1) сообщить, есть ли на доске число k (k он выбирает сам); 2) сообщить, можно ли все числа на доске разбить на две группы с равными суммами (сумма чисел в пустой группе считается равной 0); 3) стереть с доски число k , если оно на ней есть (k он выбирает сам); 4) дописать на доску число k , если его на ней нет (k он выбирает сам). Наташа исполняет все желания Васи, но не сообщает (в случаях 3 и 4), стерла ли она число и дописала ли она число. Докажите, что, высказав не более 10 желаний, Вася сможет узнать, был ли в начале на доске набор чисел с суммой 2017.

4. Точки M и N расположены на сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно таким образом, что $\frac{2CN}{BC} = \frac{AM}{AB}$. Точка P лежит на прямой AC .

Докажите, что прямые MN и NP перпендикулярны тогда и только тогда, когда PN — биссектриса угла MPC .

5. Числа $x_1, x_2, \dots, x_{2017}$ таковы, что $x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}, x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}, \dots, x_{2016} = 1 + \frac{1}{x_{2017}}$ и

$x_{2017} = 1 + \frac{1}{x_1}$. Докажите, что все они равны.

6. Натуральные числа x , y и n удовлетворяют равенству $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3} = n$. Докажите, что $n^2 - 5n$ делится на 700.

7. В треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$. На стороне AB отмечена точка D , на стороне BC — точка E , а на стороне AC — точка F , причём $AD = CD$ и $CE = DE = DF$. Докажите, что $BE < AF$.

8. Федеративная Республика Руритания (ФРР) состоит из 2017 субъектов федерации. Из каждого города ФРР летают самолёты ровно в 2016 городов, расположенных во всех субъектах федерации, кроме того, к которому относится этот город. Известно, что из любого города ФРР можно добраться самолётами до любого другого. Сколько городов может быть в Руритании?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Некоторый клетчатый прямоугольник разбит на прямоугольники 2×3 , причём ровно 100 этих прямоугольников оказались расположены вертикально. Докажите, что невозможно разбить исходный прямоугольник на прямоугольники 2×3 так, чтобы ровно 2017 прямоугольников были расположены вертикально.

2. Докажите, что не существует натурального n такого, что $n+k^2$ оказывается квадратом по крайней мере для n различных натуральных k .

3. Компания друзей сыграла 20 партий в нарды (в каждой партии участвуют двое, ничьих не бывает). Располагая всего одним комплектом для игры, они придерживались такого порядка: выигравший очередную партию пропускал не более трех, а проигравший — более трёх следующих партий. Какое наименьшее число игроков могло быть в этой компании?

4. Точки M и N расположены на сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно таким образом, что $\frac{2CN}{BC} = \frac{AM}{AB}$. Точка P лежит на прямой AC .

Докажите, что прямые MN и NP перпендикулярны тогда и только тогда, когда PN — биссектриса угла MPC .

5. Числа $x_1, x_2, \dots, x_{2017}$ таковы, что $x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}, x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}, \dots, x_{2016} = 1 + \frac{1}{x_{2017}}$ и $x_{2017} = 1 + \frac{1}{x_1}$. Докажите, что все они равны.

6. Натуральные числа x, y и n удовлетворяют равенству $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3} = n$.

Докажите, что n делится на 20.

7. В треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$. На стороне AB отмечена точка D , на стороне BC — точка E , а на стороне AC — точка F , причём $AD = CD$ и $CE = DE = DF$. Докажите, что $BE < AF$.

8. Федеративная Республика Руритания (ФРР) состоит из 2017 субъектов федерации. Из каждого города ФРР летают самолёты ровно в 2016 городов, расположенных во всех субъектах федерации, кроме того, к которому относится этот город. Известно, что из любого города ФРР можно добраться самолётами до любого другого. Сколько городов может быть в Руритании?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На доске написано 10 натуральных чисел, больших 10. За одну операцию можно взять два написанных числа, одно из них умножить на 2, а из другого вычесть 2 и написать полученные числа вместо взятых (числа не обязаны оставаться положительными). Докажите, что за несколько таких операций можно сделать все числа равными.

2. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $a > c > d > b$ и $ab = cd$. Клетчатый прямоугольник составили из нескольких прямоугольников $a \times b$ (a строчек и b столбцов) и нескольких прямоугольников $c \times d$ (c строчек и d столбцов). Один из прямоугольников $a \times b$ потерялся, а вместо него нашёлся еще один прямоугольник $c \times d$. Докажите, что теперь из всех имеющихся прямоугольников, не поворачивая их, составить тот же клетчатый прямоугольник уже не удастся.

3. Натуральные числа x, y и n удовлетворяют равенству $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3} = n$.

Докажите, что n делится на 20.

4. Дана доска 3×100 . Сколькими способами хромая ладья (которая ходит только на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку), стартовав в левом нижнем углу доски, может обойти все клетки этой доски ровно по одному разу и вернуться на исходную клетку?

5. Дано натуральное число $n > 100$. На доске написаны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, каждое из которых не превосходит n . Известно, что при всех различных i и k от 1 до n число $ia_i + ka_k$ делится на $i + k$. Докажите, что все написанные на доске числа совпадают.

6. В связном графе степень каждой вершины равна 2016, и его вершины можно покрасить в 2017 цветов правильным образом так, что среди соседей каждой вершины есть все цвета, кроме ее цвета. Сколько вершин может быть в таком графе?

7. Для различных натуральных чисел a и b докажите неравенство $\frac{a^2 - 1}{b} + \frac{b^2 - 1}{a} \geq a + b$.

8. В треугольнике ABC , где $\angle A = \frac{4}{3} \angle B < 90^\circ$, на биссектрисе AE выбрана такая точка F , что $AF = AC$ и $2\angle ABF = \angle BAC$. Найдите угол BCF .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На доске написано 10 натуральных чисел, больших 10. За одну операцию можно взять два написанных числа, одно из них умножить на 2, а из другого вычесть 2 и написать полученные числа вместо взятых (числа не обязаны оставаться положительными). Докажите, что за несколько таких операций можно сделать все числа равными.

2. Клетчатый прямоугольник составили из нескольких прямоугольников 60×21 (60 строчек и 21 столбец) и нескольких прямоугольников 36×35 (36 строчек и 35 столбцов). Один из прямоугольников 60×21 потерялся, а вместо него нашёлся еще один прямоугольник 36×35 . Докажите, что теперь из всех имеющихся прямоугольников, не поворачивая их, составить тот же клетчатый прямоугольник уже не удастся.

3. Натуральные числа x , y и n удовлетворяют равенству $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3} = n$. Докажите, что n делится на 20.

4. Дана доска 3×100 . Сколькими способами хромая ладья (которая ходит только на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку), стартовав в левом нижнем углу доски, может обойти все клетки этой доски ровно по одному разу и вернуться на исходную клетку?

5. Дано натуральное число $n > 100$. На доске написаны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, каждое из которых не превосходит n . Известно, что при всех различных i и k от 1 до n число $ia_i + ka_k$ делится на $i+k$. Докажите, что среди написанных на доске чисел не менее половины одинаковы.

6. На Марсе проживают марсиане 100 различных видов. Каждый марсианин знаком ровно с одним марсианином любого другого вида. Сколько марсиан может проживать на Марсе?

7. Для различных натуральных чисел a и b докажите неравенство $\frac{a^2 - 1}{b} + \frac{b^2 - 1}{a} \geq a + b$.

8. Стороны AB и AC тупоугольного треугольника ABC равны. На продолжении стороны AC за точку C отмечена такая точка M , что $AC = CM$. К отрезку AC в точке C проведен перпендикуляр, пересекающий прямую AB в точке P . Оказалось, что PM перпендикулярно BC . Докажите, что треугольник APM — равносторонний.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На столе стоят 5 гирь различных весов. Четвёрка гирь называется *сбалансированной*, если самая тяжёлая из этих четырёх гирь весит столько же, сколько три остальных в сумме. Какое наибольшее количество сбалансированных четвёрок гирь может быть среди этих 5 гирь?

2. Некоторый клетчатый прямоугольник разбит на прямоугольники 2×3 , причём ровно 100 этих прямоугольников оказались расположены вертикально. Докажите, что невозможно разбить исходный прямоугольник на прямоугольники 2×3 так, чтобы ровно 2017 прямоугольников были расположены вертикально.

3. Натуральные числа x , y и n удовлетворяют равенству $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3} = n$. Докажите, что n делится на 10.

4. Дана доска 3×100 . Сколькими способами хромая ладья (которая ходит только на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку), стартовав в левом нижнем углу доски, может обойти все клетки этой доски ровно по одному разу и вернуться на исходную клетку?

5. На доске написаны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_{101}$, каждое из которых не превосходит 101. Известно, что при всех различных i и k от 1 до 101 число $ia_i + ka_k$ делится на $i+k$. Докажите, что среди написанных на доске чисел не менее 50 одинаковы.

6. На Марсе проживают марсиане 100 различных видов. Каждый марсианин знаком ровно с одним марсианином любого другого вида. Сколько марсиан может проживать на Марсе?

7. Для натуральных чисел a и b докажите неравенство $\frac{a-1}{b} + \frac{b+1}{a} \geq 2$.

8. Стороны AB и AC тупоугольного треугольника ABC равны. На продолжении стороны AC за точку C отмечена такая точка M , что $AC = CM$. К отрезку AC в точке C проведен перпендикуляр, пересекающий прямую AB в точке P . Оказалось, что PM перпендикулярно BC . Докажите, что треугольник APM — равносторонний.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. На доске написано 10 натуральных чисел, больших 10. За одну операцию можно взять два написанных числа, одно из них умножить на 3, а из другого вычесть 1 и написать полученные числа вместо взятых (числа не обязаны оставаться положительными). Докажите, что за несколько таких операций можно сделать все числа равными.

2. На доске написано 100-значное натуральное число, не имеющее нулей в записи. Вася вычеркнул в нём каждую третью цифру (начиная с первой) и получил число, равное натуральной степени пятёрки. Докажите, что если бы Вася вычеркнул в исходном числе каждую четвёртую цифру, начиная с первой, то уже не смог бы получить натуральную степень пятёрки.

3. Натуральные числа x , y и n удовлетворяют равенству $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3} = n$. Докажите, что n делится на 10.

4. В компании из шести человек имеются один рыцарь (всегда говорит правду), два дипломата (говорят правду или лгут по своему усмотрению) и три лжеца (всегда лгут). Каждого спросили, кем он является. Первый сказал о себе, что он рыцарь, второй — что дипломат, третий — что лжец, четвёртый — что не рыцарь, пятый — что не дипломат, а шестой — что не лжец. Который из них — рыцарь?

5. Пусть $S(n)$ — это сумма цифр числа n . Решите уравнение $n = 6 \cdot S(n)$.

6. На Марсе проживают марсиане 100 различных видов. Каждый марсианин знаком ровно с одним марсианином любого другого вида. Сколько марсиан может проживать на Марсе?

7. На столе стоят 5 гирь различных весов. Четвёрка гирь называется *сбалансированной*, если самая тяжёлая из этих четырёх гирь весит столько же, сколько три остальных в сумме. Какое наибольшее количество сбалансированных четвёрок гирь может быть среди этих 5 гирь?

8. Стороны AB и AC тупоугольного треугольника ABC равны. На продолжении стороны AC за точку C отмечена такая точка M , что $AC = CM$. К отрезку AC в точке C проведен перпендикуляр, пересекающий прямую AB в точке P . Оказалось, что PM перпендикулярно BC . Докажите, что треугольник APM — равносторонний.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На конгрессе собралось несколько учёных. Есть k официальных языков этого конгресса. Выполняется следующее свойство: любые двое учёных могут общаться, используя только официальные языки, возможно, с помощью одного переводчика из числа других ученых, присутствующих на конгрессе. При каком наименьшем k может так оказаться, что отъезд любого ученого нарушает это свойство?
2. Натуральные числа a , b , c и d таковы, что $ab = cd$, $a \neq c$. Клетчатый прямоугольник составили из нескольких прямоугольников $a \times b$ (a строчек и b столбцов) и нескольких прямоугольников $c \times d$ (c строчек и d столбцов). Один из прямоугольников $a \times b$ потерялся, а вместо него нашёлся еще один прямоугольник $c \times d$. Докажите, что теперь из всех имеющихся прямоугольников, не поворачивая их, составить тот же клетчатый прямоугольник уже не удастся.
3. На столе стоят 6 гирь различных весов. Четвёрка гирь называется *сбалансированной*, если самая тяжёлая из этих четырёх гирь весит столько же, сколько три остальных в сумме. Какое наибольшее количество сбалансированных четвёрок гирь может быть среди этих 6 гирь?
4. На доске написано 100-значное натуральное число. Вася вычеркнул в нём каждую третью цифру (начиная с первой) и получил число, равное натуральной степени пятёрки. Докажите, что если бы Вася вычеркнул в исходном числе каждую четвёртую цифру, начиная с первой, то уже не смог бы получить натуральную степень пятёрки.
5. Дана доска 3×100 . Сколькими способами хромая ладья (которая ходит только на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку), стартовав в левом нижнем углу доски, может обойти все клетки этой доски ровно по одному разу и вернуться на исходную клетку?
6. Компания друзей сыграла 100 партий в нарды (в каждой партии участвуют двое, ничьих не бывает). Располагая всего одним комплектом для игры, они придерживались такого порядка: выигравший очередную партию пропускал не более 10, а проигравший – более 10 следующих партий. Какое наименьшее число игроков могло быть в компании?
7. На доске написано 10 натуральных чисел, больших 10. За одну операцию можно взять два написанных числа, одно из них умножить на 2, а из другого вычесть 2 и написать полученные числа вместо взятых (числа не обязаны оставаться положительными). Докажите, что за несколько таких операций можно сделать все числа равными.
8. Дано натуральное число $n > 100$. На доске написаны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$, каждое из которых не превосходит $2n$. Известно, что при всех различных i и k от 1 до $2n$ число $ia_i + ka_k$ делится на $i+k$. Докажите, что среди написанных на доске чисел можно выбрать n равных.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На конгрессе собралось 13 учёных. Есть 6 официальных языков этого конгресса, причем каждый ученый знает не более двух из них. Известно, что выполняется следующее свойство: любые двое учёных могут общаться, используя только официальные языки, возможно, с помощью одного переводчика из числа других ученых, присутствующих на конгрессе. Докажите, что найдется ученый, отъезд которого не нарушит это свойство.
2. Некоторый клетчатый прямоугольник разбит на прямоугольники 2×3 , причём ровно 100 этих прямоугольников оказались расположены вертикально. Докажите, что невозможно разбить исходный прямоугольник на прямоугольники 2×3 так, чтобы ровно 2017 прямоугольников были расположены вертикально.
3. На столе стоят 5 гирь различных весов. Четвёрка гирь называется *сбалансированной*, если самая тяжёлая из этих четырёх гирь весит столько же, сколько три остальных в сумме. Какое наибольшее количество сбалансированных четвёрок гирь может быть среди этих 5 гирь?
4. На доске написано 100-значное натуральное число. Вася вычеркнул в нём каждую третью цифру (начиная с первой) и получил число, равное натуральной степени пятёрки. Докажите, что если бы Вася вычеркнул в исходном числе каждую четвертую цифру, начиная с первой, то уже не смог бы получить натуральную степень пятёрки.
5. Дана доска 3×100 . Сколькими способами хромая ладья (которая ходит только на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку), стартовав в левом нижнем углу доски, может обойти все клетки этой доски ровно по одному разу и вернуться на исходную клетку?
6. Компания друзей сыграла 100 партий в нарды (в каждой партии участвуют двое, ничьих не бывает). Располагая всего одним комплектом для игры, они придерживались такого порядка: выигравший очередную партию пропускал не более 10, а проигравший — более 10 следующих партий. Какое наименьшее число игроков могло быть в компании?
7. На доске написано 10 натуральных чисел, больших 10. За одну операцию можно взять два написанных числа, одно из них умножить на 2, а из другого вычесть 2 и написать полученные числа вместо взятых (числа не обязаны оставаться положительными). Докажите, что за несколько таких операций можно сделать все числа равными.
8. На доске написаны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_{101}$, каждое из которых не превосходит 101. Известно, что при всех различных i и k от 1 до 101 число $ia_i + ka_k$ делится на $i+k$. Докажите, что все написанные на доске числа равны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. На конгрессе собралось 15 учёных. Есть 6 официальных языков этого конгресса, причем каждый ученый знает не более двух из них. Известно, что выполняется следующее свойство: любые двое учёных могут общаться, используя только официальные языки, возможно, с помощью одного переводчика из числа других ученых, присутствующих на конгрессе. Докажите, что найдется ученый, отъезд которого не нарушит это свойство.
2. За какое наименьшее положительное время часовая и минутная стрелки часов могут поменяться местами? (Т.е. минутная стрелка должна оказаться на исходном месте часовой, а часовая — на исходном месте минутной.)
3. На столе стоят 5 гирь различных весов. Четвёрка гирь называется *сбалансированной*, если самая тяжёлая из этих четырёх гирь весит столько же, сколько три остальных в сумме. Какое наибольшее количество сбалансированных четвёрок гирь может быть среди этих 5 гирь?
4. На доске написано 100-значное натуральное число. Вася вычеркнул в нём каждую третью цифру (начиная с первой) и получил число, равное натуральной степени пятёрки. Докажите, что если бы Вася вычеркнул в исходном числе каждую четвертую цифру, начиная с первой, то уже не смог бы получить натуральную степень пятёрки.
5. Дана доска 3×100 . Сколькими способами хромая ладья (которая ходит только на соседнюю по вертикали или горизонтали клетку), стартовав в левом нижнем углу доски, может обойти все клетки этой доски ровно по одному разу и вернуться на исходную клетку?
6. Компания друзей сыграла 20 партий в нарды (в каждой партии участвуют двое, ничьих не бывает). Располагая всего одним комплектом для игры, они придерживались такого порядка: выигравший очередную партию пропускал не более трех, а проигравший — более трёх следующих партий. Какое наименьшее число игроков могло быть в этой компании?
7. На доске написано 10 натуральных чисел, больших 10. За одну операцию можно взять два написанных числа, одно из них умножить на 2, а из другого вычесть 2 и написать полученные числа вместо взятых (числа не обязаны оставаться положительными). Докажите, что за несколько таких операций можно сделать все числа равными.
8. Пусть $S(n)$ — это сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение $n = 6 \cdot S(n)$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 05.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В компании из шести человек имеются один рыцарь (всегда говорит правду), два дипломата (говорят правду или лгут по своему усмотрению) и три лжеца (всегда лгут). Каждого спросили, кем он является. Первый сказал о себе, что он рыцарь, второй — что дипломат, третий — что лжец, четвёртый — что не рыцарь, пятый — что не дипломат, а шестой — что не лжец. Который из них — рыцарь?
2. За какое наименьшее положительное время часовая и минутная стрелки часов могут поменяться местами? (Т.е. минутная стрелка должна оказаться на исходном месте часовой, а часовая — на исходном месте минутной.)
3. На столе стоят 5 гирь различных весов. Четвёрка гирь называется *сбалансированной*, если самая тяжёлая из этих четырёх гирь весит столько же, сколько три остальных в сумме. Какое наибольшее количество сбалансированных четвёрок гирь может быть среди этих 5 гирь?
4. На доске написано 100-значное натуральное число. Вася вычеркнул в нём каждую третью цифру (начиная с первой) и получил число, равное натуральной степени пятёрки. Докажите, что если бы Вася вычеркнул в исходном числе каждую четвертую цифру, начиная с первой, то уже не смог бы получить натуральную степень пятёрки.
5. Вова хочет вырезать из доски 5×5 одну клетку, а все оставшиеся обойти ходом шахматного коня, побывав в каждой ровно по одному разу. Возможно ли это?
6. Компания друзей сыграла 20 партий в нарды (в каждой партии участвуют двое, ничьих не бывает). Располагая всего одним комплектом для игры, они придерживались такого порядка: выигравший очередную партию пропускал не более трех, а проигравший — более трёх следующих партий. Какое наименьшее число игроков могло быть в этой компании?
7. На доске написано 10 натуральных чисел, больших 10. За одну операцию можно взять два написанных числа, одно из них умножить на 2, а из другого вычесть 2 и написать полученные числа вместо взятых (числа не обязаны оставаться положительными). Докажите, что за несколько таких операций можно сделать все числа равными.
8. Пусть $S(n)$ — это сумма цифр натурального числа n . Решите уравнение $n = 6 \cdot S(n)$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дано простое p . Докажите, что существует перестановка $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ чисел $1, 2, 3, \dots, p$ такая, что числа $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \dots, a_1a_2\dots a_p$ дают разные остатки при делении на p .
2. На плоскости проведено 2000 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди областей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно выбрать область S со следующим свойством: для любой прямой l , ограничивающей S , полуплоскость, образуемая при проведении l и содержащая S , содержит не меньше областей, чем другая полуплоскость.
3. Дан ряд из 10^6 лампочек, все из которых изначально выключены. Каждый из 2016 человек по очереди подходит к этому ряду и переключает (то есть, выключенные включает, а включённые выключает) какие-то 2017 подряд идущих лампочек. В итоге оказалось, что ровно k лампочек включены. Докажите, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более, чем $k/2$ лампочек включены.
4. В треугольнике ABC угол A равен 60° , AL — биссектриса, D — ее середина. Прямая, проходящая через точку D параллельно AC , пересекает сторону AB в точке E . Оказалось, что $AC = 3AE$. Докажите, что треугольник CEL — равнобедренный.
5. Докажите, что для любых неотрицательных a, b, c , не превосходящих 1, $a+b+c+2(ab+bc+ca)+3(1-a)(1-b)(1-c) \leq 9$.
6. Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены параллельные прямые l_a, l_b и l_c , пересекающие прямые BC, CA и AB в точках P, Q и R соответственно. Точки P', Q' и R' расположены на отрезках AP, BQ и CR соответственно таким образом, что $AP = 3AP', BQ = 3BQ'$ и $CR = 3CR'$. Докажите, что точки P', Q' и R' лежат на одной прямой.
7. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие k человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Продолжительность проекта — n дней. При каком наибольшем k организаторы проекта наверняка смогут выгнать всех участников?
8. Иррациональные числа x и y таковы, что все три числа xy, x^2+y, y^2+x рациональны. Найдите все возможные значения $x+y$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На доске написано натуральное число. За одну операцию разрешается переставить его цифры в любом порядке (нули можно ставить в начале), затем прибавить 2017, убрать незначащие нули в начале и полученный результат выписать на доску. Верно ли, что для любого начального числа с помощью нескольких таких операций можно выписать на доску число 2018?
2. На плоскости проведено 2000 прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что среди областей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно выбрать область S со следующим свойством: для любой прямой l , ограничивающей S , полуплоскость, образуемая при проведении l и содержащая S , содержит не меньше областей, чем другая полуплоскость.
3. Дан ряд из 10^6 лампочек, все из которых изначально выключены. Каждый из 2016 человек по очереди подходит к этому ряду и переключает (то есть, выключенные включает, а включённые выключает) какие-то 2017 подряд идущих лампочек. В итоге оказалось, что ровно k лампочек включены. Докажите, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более, чем $k/2$ лампочек включены.
4. В треугольнике ABC угол A равен 60° , AL — биссектриса, D — ее середина. Прямая, проходящая через точку D параллельно AC , пересекает сторону AB в точке E . Оказалось, что $AC = 3AE$. Докажите, что треугольник CEL — равнобедренный.
5. Докажите, что для любых неотрицательных a, b, c , не превосходящих 1, $a+b+c+2(ab+bc+ca)+3(1-a)(1-b)(1-c) \leq 9$.
6. Через вершины A, B и C треугольника ABC проведены параллельные прямые l_a, l_b и l_c , пересекающие прямые BC, CA и AB в точках P, Q и R соответственно. Точки P', Q' и R' расположены на отрезках AP, BQ и CR соответственно таким образом, что $AP = 3AP', BQ = 3BQ'$ и $CR = 3CR'$. Докажите, что точки P', Q' и R' лежат на одной прямой.
7. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 2017 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри может действовать таким образом, что после 10 изгнаний на проекте никого не останется?
8. Иррациональные числа x и y таковы, что все три числа xy, x^2+y, y^2+x рациональны. Найдите все возможные значения $x+y$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На доске написано натуральное число. За одну операцию разрешается переставить его цифры в любом порядке (нули можно ставить в начале), затем прибавить 2017, убрать незначащие нули в начале и полученный результат выписать на доску. Верно ли, что для любого начального числа с помощью нескольких таких операций можно выписать на доску число 2018?
2. На столе стоят две корзинки, в которых лежат 1001 и 2017 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?
3. Дан ряд из 10^6 лампочек, все из которых изначально выключены. Каждый из 2016 человек по очереди подходит к этому ряду и переключает (то есть, выключенные включает, а включённые выключает) какие-то 2017 подряд идущих лампочек. В итоге оказалось, что ровно k лампочек включены. Докажите, что среди любых 2017 подряд идущих лампочек не более, чем $k/2$ лампочек включены.
4. В треугольнике ABC угол A равен 60° , AL — биссектриса, D — ее середина. Прямая, проходящая через точку D параллельно AC , пересекает сторону AB в точке E . Оказалось, что $AC = 3AE$. Докажите, что треугольник CEL — равнобедренный.
5. Решите систему уравнений $[x] - y = 2[y] - z = 3[z] - x = \frac{2016}{2017}$.
6. Через вершины A , B и C треугольника ABC проведены параллельные прямые l_a , l_b и l_c , пересекающие прямые BC , CA и AB в точках P , Q и R соответственно. Точки P' , Q' и R' расположены на отрезках AP , BQ и CR соответственно таким образом, что $AP = 3AP'$, $BQ = 3BQ'$ и $CR = 3CR'$. Докажите, что точки P' , Q' и R' лежат на одной прямой.
7. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 300 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Могли ли участники подружиться перед началом проекта так, чтобы через неделю, независимо от действий жюри, хоть кто-нибудь из них гарантированно остался бы на проекте?
8. В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x , y страницы с номерами $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, $8y$ все попали в разные тома?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На столе стоят две корзинки, в которых лежат m и n пирожков. Два игрока ходят по очереди. За ход игрок берет из любой корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?
2. Дано простое p . Докажите, что существует такая перестановка $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ чисел $1, 2, 3, \dots, p$, что числа $a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \dots, a_1a_2\dots a_p$ дают разные остатки при делении на p .
3. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 2017 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри может действовать таким образом, что после 10 изгнаний на проекте никого не останется?
4. На доске 100×100 отмечена 201 клетка. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Чему равно наименьшее число различных квадратов 2×2 (возможно, пересекающихся), все клетки которых отмечены?
5. На доске написано натуральное число. За одну операцию разрешается переставить его цифры в любом порядке (нули можно ставить в начале), затем прибавить 2017, убрать незначащие нули в начале и полученный результат выписать на доску. Верно ли, что для любого начального числа с помощью нескольких таких операций можно выписать на доску число 2018?
6. Можно ли расставить числа $1, 2, 3, 4, \dots, 100$ по кругу в таком порядке, что все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?
7. Для положительных чисел x и y , меньших единицы, докажите неравенство
$$xy + \frac{1}{xy} + 2 > x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}.$$
8. Внутри равнобедренного треугольника ABC с углом A , равным 110° , отмечена точка M . Оказалось, что $\angle BCM = 30^\circ$ и $\angle CBM = 25^\circ$. Найдите угол AMB .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На столе стоят две корзинки, в которых лежат m и n пирожков. Два игрока ходят по очереди. За ход игрок берет из любой корзинки два пирожка, один из них съедает, а второй перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?
2. К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2017, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2017.
3. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 400 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Докажите, что жюри может действовать таким образом, что после 8 изгнаний на проекте никого не останется.
4. На доске 100×100 отмечено 200 клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что существует квадрат 2×2 , все клетки которых отмечены.
5. В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x и y страницы с номерами $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, $8y$ все попали в разные тома?
6. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 по кругу в таком порядке, что все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?
7. Для положительных чисел x и y , меньших единицы, докажите неравенство
$$xy + \frac{1}{xy} + 2 > x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y}.$$
8. Внутри равнобедренного треугольника ABC с углом A , равным 110° , отмечена точка M . Оказалось, что $\angle BCM = 30^\circ$ и $\angle CBM = 25^\circ$. Найдите угол AMB .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На столе стоят две корзинки, в которых лежат 20172017 и 20172018 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?
2. Натуральные числа m и n таковы, что $m^{2017}+m+n$ делится на mn . Докажите, что $m+n$ делится на m^2 .
3. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 300 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Докажите, что жюри может действовать таким образом, что после 8 изгнаний на проекте никого не останется.
4. На доске 100×100 отмечено 200 клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что существует квадрат 2×2 , все клетки которых отмечены.
5. В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных чисел x и y страницы с номерами $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, $8y$ все попали в разные тома?
6. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 по кругу в таком порядке, что все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?
7. Для положительных чисел x и y , меньших единицы, докажите неравенство
$$xy + \frac{1}{xy} + 1 > \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$
8. Основание BC равнобедренного треугольника ABC больше его боковых сторон. В треугольнике провели биссектрису BE . Из точки C провели перпендикуляр к прямой BE , он пересек продолжение стороны AB в точке P . Прямая PE пересекает сторону BC в точке S . Докажите, что $BS = SP$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. На столе стоят две корзинки, в которых лежат по 2017 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки два пирожка, один из них съедает, а второй перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

2. Натуральные числа x и y таковы, что числа $\frac{2y}{x(y-x)}$ и $\frac{(y-x)(y+1)}{2y^2}$ целые.

Найдите все возможные значения чисел x и y .

3. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 42 человека, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Докажите, что жюри может действовать таким образом, что после 5 изгнаний на проекте никого не останется.

4. 30 учеников пронумерованы в классном журнале числами от 1 до 30. Каждый из них заявил: «Каждый, у кого номер имеет с моим общий делитель, больший 1, иногда врёт!». Определите наибольшее возможное число учеников, которые никогда не врут.

5. В собрании сочинений Н.Л. Худого 10 томов по 500 страниц каждый. Нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных чисел x и y страницы с номерами x , $2x$, $11x$, y , $3y$, $5y$ все попали в разные тома?

6. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 30 по кругу в таком порядке, что все 30 сумм пар соседних чисел давали различные остатки от деления на 30?

7. Может ли семизначное число, начинающееся на 2017, делиться на все числа от 1 до 9?

8. Основание BC равнобедренного треугольника ABC больше его боковых сторон. В треугольнике провели биссектрису BE . Из точки C провели перпендикуляр к прямой BE , он пересек продолжение стороны AB в точке P . Прямая PE пересекает сторону BC в точке S . Докажите, что $BS = SP$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В собрании сочинений Н. Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x , y страницы с номерами $2x$, $2y$, $3x$, $3y$, $8x$, $8y$ все попали в разные тома?
2. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 300 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри собирается на заседание и выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри всегда может действовать так, чтобы после семи заседаний на проекте не осталось ни одного участника?
3. К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2017, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2017.
4. Артур смог разрезать квадрат на 21 квадрат, среди которых нет равных, Вилли — на 22, Лео — на 23, а Остин — на 26. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество неравных квадратов большее 100.
5. В группе из 5 детей у каждого в руке один шарик, причём все шарики разных цветов. Каждую минуту какие-то двое меняются шариками. Может ли так случиться, что через 10 минут любые двое ровно один раз поменяются шариками, и при этом у каждого из детей окажется шарик того же цвета, что и в начале?
6. На доске 100×100 отмечено 200 клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что найдется квадрат 2×2 , все клетки которого отмечены.
7. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 по кругу в таком порядке, чтобы все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?
8. На столе стоят две корзинки, в которых лежат 1000 и 2017 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В собрании сочинений Н. Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x, y страницы с номерами $x, y, 2x, 3y, 5y, 11x$ все попали в разные тома?
2. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 30 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри собирается на заседание и выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри всегда может действовать так, чтобы после 4 заседаний на проекте не осталось ни одного участника?
3. К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2017, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2017.
4. Артур смог разрезать квадрат на 21 квадрат, среди которых нет равных, Вилли — на 22, Лео — на 23, а Остин — на 26. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество неравных квадратов большее 100.
5. В группе из 4 детей у каждого в руке один шарик, причём все шарики разных цветов. Каждую минуту какие-то двое меняются шариками. Может ли так случиться, что через 6 минут любые двое ровно один раз поменяются шариками, и при этом у каждого из детей окажется шарик того же цвета, что и в начале?
6. На доске 100×100 отмечено несколько клеток, причём в любой строке и в любом столбце лежит не менее пяти отмеченных клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Какое наименьшее количество квадратов 5×5 (возможно, пересекающихся), состоящих из отмеченных клеток, может быть?
7. Можно ли расставить числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 по кругу в таком порядке, чтобы все суммы по 10 идущих подряд чисел давали различные остатки от деления на 100?
8. На столе стоят две корзинки, в которых лежат 1000 и 2017 пирожков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки (ненулевое) четное число пирожков, половину из них съедает, а оставшуюся половину перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. В собрании сочинений Н. Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x, y страницы с номерами $x, y, 2x, 3y, 5y, 11x$ все попали в разные тома?
2. В проекте «Нам важен каждый» принимают участие 14 человек, некоторые из которых изначально дружат между собой (во время проекта новых друзей не заводят и не ссорятся). Каждый день жюри собирается на заседание и выгоняет с проекта либо всех тех, у кого на проекте осталось четное число друзей, либо всех тех, у кого на проекте осталось нечетное число друзей. Верно ли, что жюри всегда может действовать так, чтобы после трёх заседаний на проекте не осталось ни одного участника?
3. В классном журнале 30 учеников пронумерованы числами от 1 до 30. Каждый из них заявил: «Каждый, у кого номер взаимно прост с моим, иногда врёт!». Определите наибольшее возможное число учеников, которые никогда не врут.
4. Артур смог разрезать квадрат на 21 квадрат, среди которых нет равных, Вилли — на 22, Лео — на 23, а Остин — на 26. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество неравных квадратов больше 100.
5. В группе из 4 детей у каждого в руке один шарик, причём все шарики разных цветов. Каждую минуту какие-то двое меняются шариками. Могло ли так случиться, что через несколько минут любые двое ровно один раз поменялись и при этом у каждого из детей оказался шарик того же цвета, что и в начале?
6. На доске 100×100 отмечено несколько клеток, причем в любом столбце и в любой строке отмечено не менее двух клеток. Оказалось, что если две отмеченные клетки стоят в одной строке (столбце), то все клетки этой строки (столбца) между этими клетками тоже отмечены. Докажите, что найдется квадрат 2×2 , все клетки которого отмечены.
7. Числа 1, 2, 3, 4, ..., 100 расставили по кругу в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать две группы из 50 идущих подряд чисел (возможно, пересекающиеся) так, чтобы суммы чисел в этих группах давали одинаковые остатки от деления на 100.
8. На столе стоят две корзинки, в одной из них лежит 44 пирожка, а во второй — 55. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход игрок берет из любой корзинки два пирожка, один из них съедает, а второй перекладывает в другую корзинку. Проигрывает не имеющий хода. Кто выигрывает при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 07.12.2017

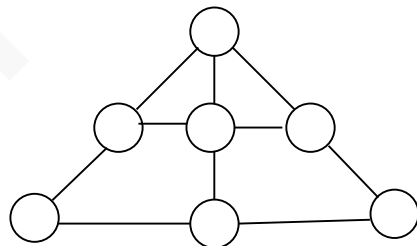
ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Малыш и Карлсон играют в пирожки, лежащие на двух тарелках. За один ход можно взять два пирожка из любой одной тарелки, один — съесть, а второй — переложить на другую тарелку. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Начинает Карлсон. Кто выиграет, если сначала на одной тарелке лежало 44, а на второй — 55 пирожков?

2. Артур смог разрезать квадрат на 21 квадрат, среди которых нет равных, Вилли — на 22, Лео — на 23, а Остин — на 26. Докажите, что квадрат можно разрезать на любое количество неравных квадратов большее 100.

3. К натуральному числу за одну операцию можно либо прибавить 2017, либо вычеркнуть его последнюю цифру, если цифр хотя бы две. Докажите, что такими операциями из любого натурального числа можно получить число, кратное 2017.

4. Сколькими способами можно вписать в кружочки числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, чтобы суммы всех троек чисел, расположенных вдоль каждого из пяти отрезков, были равны?



5. В классном журнале 30 учеников пронумерованы числами от 1 до 30. Каждый из них заявил: «Каждый, у кого номер взаимно прост с моим, иногда врёт!». Определите наибольшее возможное число учеников, которые никогда не врут.

6. Найдите наименьшее число, которое начинается с цифр 2017 и делится на все числа от 1 до 10.

7. В собрании сочинений Н. Л. Худого 10 томов. Во всех томах поровну страниц, а нумерация страниц в собрании сочинений сквозная (то есть в каждом следующем томе нумерация страниц начинается с числа, на 1 большего номера последней страницы предыдущего тома). Может ли так оказаться, что для каких-то натуральных x , y страницы с номерами x , y , $2x$, $3y$, $11x$, $5y$ все попали в разные тома?

8. В группе из 4 детей у каждого в руке один шарик, причём все шарики разных цветов. Каждую минуту какие-то двое меняются шариками. Могло ли так случиться, что через несколько минут любые двое ровно один раз поменялись и при этом у каждого из детей оказался шарик того же цвета, что и в начале?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Последовательность (a_n) определена условиями $a_1 = 0$, $a_n = a_{\left[\frac{n}{2}\right]} + (-1)^{n(n+1)/2}$ (здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x). Для каждого натурального k найдите количество натуральных n таких, что $2^k \leq n < 2^{k+1}$ и $a_n = 0$.
2. Дан треугольник ABC . Точки A' , B' и C' симметричны точкам A , B и C относительно прямых BC , AC и AB соответственно. Известно, что периметр треугольника $A'B'C'$ больше периметра треугольника ABC на 4. Докажите, что все стороны треугольника ABC не меньше единицы.
3. Дано натуральное k , большее 1. Обозначим $F_k(n)$ наименьшее натуральное число, большее kn , для которого $F_k(n) \cdot n$ — точный квадрат. Докажите, что, если $F_k(n) = F_k(m)$, то $m = n$.
4. На сторонах треугольника ABC , углы B и C которого больше 45° , во внешнюю сторону построены равнобедренные прямоугольные треугольники ACM и ABN с прямыми углами при вершине A , а вовнутрь — равнобедренный прямоугольный треугольник BSP с прямым углом при вершине P . Докажите, что треугольник MNP — равнобедренный прямоугольный.
5. Последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$ удовлетворяет условию $a_n \leq \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ при всех натуральных n . Докажите, что $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \frac{a_0 + a_{n+1}}{2}$ при всех натуральных n .
6. В каждой клетке доски 200×500 лежит по 99 кочанов капусты. Три козлёнка: Алюль, Булюль и Хиштаки Саританур — по очереди (начинает Алюль, затем ходит Булюль, а потом Хиштаки Саританур и далее по циклу) делают ходы в следующей игре. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы один кочан, и из всех этих клеток съесть по одному кочану. Выигрывает козлёнок, который сделает последний ход. Может ли какой-нибудь козлёнок играть так, чтобы выиграть, как бы ни играли два других?
7. На олимпиаде были туры по алгебре, геометрии, теории чисел и комбинаторике. В каждом туре все участники получили разное число баллов. При каком наименьшем N среди любых N участников обязательно найдутся десять, баллы которых на некоторых двух турах упорядочены одинаково (то есть если один из этих десяти превзошёл другого в одном туре, то превзошёл и в другом)?
8. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. При каких натуральных n можно найти несколько попарно различных чётных чисел, меньших n , сумма которых кратна n ?
2. Дан треугольник ABC . Точки A' , B' и C' симметричны точкам A , B и C относительно прямых BC , AC и AB соответственно. Известно, что периметр треугольника $A'B'C'$ больше периметра треугольника ABC на 4. Докажите, что все стороны треугольника ABC не меньше единицы.
3. Дано натуральное k , большее 1. Обозначим $F_k(n)$ наименьшее натуральное число, большее kn , для которого $F_k(n) \cdot n$ — точный квадрат. Докажите, что, если $F_k(n) = F_k(m)$, то $m = n$.
4. На сторонах треугольника ABC , углы B и C которого больше 45° , во внешнюю сторону построены равнобедренные прямоугольные треугольники ACM и ABN с прямыми углами при вершине A , а вовнутрь — равнобедренный прямоугольный треугольник BSP с прямым углом при вершине P . Докажите, что треугольник MNP — равнобедренный прямоугольный.
5. Последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots$ удовлетворяет условию $a_n \leq \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ при всех натуральных n . Докажите, что $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \frac{a_0 + a_{n+1}}{2}$ при всех натуральных n .
6. В каждой клетке доски 200×500 лежит по 99 кочанов капусты. Три козлёнка: Алюль, Булюль и Хиштаки Саританур — по очереди (начинает Алюль, затем ходит Булюль, а потом Хиштаки Саританур и далее по циклу) делают ходы в следующей игре. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы один кочан, и из всех этих клеток съесть по одному кочану. Выигрывает козлёнок, который сделает последний ход. Может ли какой-нибудь козлёнок играть так, чтобы выиграть, как бы ни играли два других?
7. Можно ли отметить 1000 клеток квадрата 60×60 таким образом, чтобы при любом разбиении этого квадрата на 1200 трёхклеточных уголков в каждый уголок попадало не более одной отмеченной клетки?
8. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. При каких натуральных n можно найти несколько попарно различных чётных натуральных чисел, меньших n , сумма которых кратна n ?
2. Дан треугольник ABC . Точки A' , B' и C' симметричны точкам A , B и C относительно прямых BC , AC и AB соответственно. Известно, что периметр треугольника $A'B'C'$ больше периметра треугольника ABC на 4. Докажите, что все стороны треугольника ABC не меньше единицы.
3. Дано натуральное k , большее 1. Обозначим $F_k(n)$ наименьшее натуральное число, большее kn , для которого $F_k(n) \cdot n$ — точный квадрат. Докажите, что, если $F_k(n) = F_k(m)$, то $m = n$.
4. На сторонах треугольника ABC , углы B и C которого больше 45° , во внешнюю сторону построены равнобедренные прямоугольные треугольники ACM и ABN с прямыми углами при вершине A , а вовнутрь — равнобедренный прямоугольный треугольник BCP с прямым углом при вершине P . Докажите, что треугольник MNP — равнобедренный прямоугольный.
5. Последовательность $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{20}$, удовлетворяет условию $a_n \leq \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ при всех натуральных $n \leq 19$. Докажите, что $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{19}}{19} \leq \frac{a_0 + a_{20}}{2}$.
6. В каждой клетке доски 200×500 лежит по 99 кочанов капусты. Два козлёнка: Алюль и Булюль — по очереди (начинает Алюль) делают ходы в следующей игре. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы один кочан, и из всех этих клеток съесть по одному кочану. Выигрывает козлёнок, который сделает последний ход. Кто выиграет при правильной игре?
7. Можно ли отметить 1000 клеток квадрата 60×60 таким образом, чтобы при любом разбиении этого квадрата на 1200 трёхклеточных уголков в каждый уголок попадало не более одной отмеченной клетки?
8. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА.

1. В каждой клетке доски 200×500 лежит по 99 сосисок. Три кота: Полосатик, Волосатик и Толстопузик — играют в игру по следующим правилам. Коты ходят по очереди. Начинает Полосатик, затем ходит Волосатик, а потом Толстопузик и далее по циклу. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы одна сосиска, и из всех этих клеток съесть по одной сосиске. Выигрывает кот, съевший последнюю сосиску. Может ли один из котов выиграть вне зависимости от действий обоих соперников?
2. Набор натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ заменили на набор чисел $\frac{a_1^2}{a_2^2 - 2a_2}, \frac{a_2^2}{a_3^2 - 2a_3}, \frac{a_3^2}{a_4^2 - 2a_4}, \dots, \frac{a_{99}^2}{a_{100}^2 - 2a_{100}}, \frac{a_{100}^2}{a_1^2 - 2a_1}$. В результате набор совпал с исходным набором чисел (но не обязательно сохранился порядок, в котором идут числа). Найдите все наборы, для которых такое могло произойти.
3. Число A , не оканчивающееся на 0, состоит из n цифр. Число B получено из числа A перестановкой всех цифр в обратном порядке. При каких n найдется такое число A , что десятичная запись числа $A+B$ состоит только из нечетных цифр?
4. Дано четыре различных натуральных числа. Известно, что какие-то три из шести попарных сумм этих чисел равны 11, 21 и 31. Найдите наименьшее значение, которое может принимать сумма четырёх таких чисел.
5. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?
6. В стране 2018 городов, любые два города соединены дорогой. Докажите, что можно так ввести на всех дорогах одностороннее движение, что для каждого города разность между количеством входящих в него дорог и количеством выходящих из него дорог будет делиться на 3.
7. Различные положительные числа a и b удовлетворяют соотношению $\frac{a}{a^3 + a + 1} = \frac{b}{b^3 + b + 1}$. Докажите неравенство $a + b + ab > 2$.
8. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена такая точка P , что $\angle PAB = 30^\circ$. Докажите, что из отрезков AP , BP и DP можно сложить треугольник.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА: ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Клетчатый пол кладовой кота Полосатика имеет размер 2017×2018 клеток. Изначально в каждой клетке лежит по 99 сосисок. Каждый день Полосатик выбирает строку или столбец, в котором нет пустых клеток, и из всех этих клеток съедает по одной сосиске. Докажите, что, как бы кот ни действовал, через некоторое время он съест все сосиски.

2. Набор натуральных чисел x, y и z заменили на набор чисел $\frac{x}{yz-5}, \frac{y}{zx-2}$ и $\frac{z}{xy-1}$. В результате набор совпал с исходным набором чисел (но не обязательно сохранился порядок, в котором идут числа). Найдите числа x, y и z .

3. Число A , не оканчивающееся на 0, состоит из 2017 цифр. Число B получено из числа A перестановкой всех цифр в обратном порядке. Могло ли оказаться, что десятичная запись числа $A+B$ состоит только из нечетных цифр?

4. Дано четыре различных натуральных числа. Известно, что какие-то три из шести попарных сумм этих чисел равны 11, 21 и 31. Найдите все значения, которые может принимать сумма четырёх таких чисел.

5. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

6. В стране 2016 городов, любые два города соединены дорогой. Докажите, что можно так ввести на всех дорогах одностороннее движение, что для каждого города разность между количеством входящих в него дорог и количеством выходящих из него дорог будет делиться на 3.

7. Различные положительные числа a и b удовлетворяют соотношению $\frac{a}{a^3+a+1} = \frac{b}{b^3+b+1}$. Докажите неравенство $a+b+ab \geq 2$.

8. Дан треугольник ABC . Точка M — середина стороны AB , а точка N — середина стороны AC . На стороне BC выбрана такая точка P , что $BP:PC = 3:1$. На прямой PN отмечена такая точка D , что $PN = ND$, а на прямой CM отмечена такая точка E , что $CM = ME$. Докажите, что $AE = 4AD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В каждой клетке доски 4×6 лежит 100 сосисок. Два кота: Полосатик и Волосатик — играют в игру по следующим правилам. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы одна сосиска, и из всех этих клеток съесть по одной сосиске. Проигрывает не имеющий хода. Коты ходят по очереди, начинает Полосатик. Какой кот выиграет при правильной игре?

2. Набор натуральных чисел x, y и z заменили на набор чисел $\frac{x}{yz-5}, \frac{y}{zx-2}$ и $\frac{z}{xy-1}$. В результате набор совпал с исходным набором чисел (но не обязательно сохранился порядок, в котором идут числа). Найдите числа x, y и z .

3. Число A , не оканчивающееся на 0, состоит из 17 цифр. Число B получено из числа A перестановкой всех цифр в обратном порядке. Могло ли оказаться, что десятичная запись числа $A+B$ состоит только из нечетных цифр?

4. Дано четыре различных натуральных числа. Известно, что какие-то три из шести попарных сумм этих чисел равны 13, 14 и 15. Найдите наименьшее значение, которое может принимать сумма четырёх таких чисел.

5. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

6. Единичный квадрат разбит на прямоугольники, сумма периметров которых равна a . Докажите, что его можно разбить на прямоугольники, сумма периметров которых равна $a+5$.

7. Различные положительные числа a и b удовлетворяют соотношению $\frac{a}{a^2+a+1} = \frac{b}{b^2+b+1}$. Докажите неравенство $a^2+b^2 \geq 2$.

8. Дан треугольник ABC . Точка M — середина стороны AB , а точка N — середина стороны AC . На стороне BC выбрана такая точка P , что $BP:PC = 3:1$. На прямой PN отмечена такая точка D , что $PN = ND$, а на прямой CM отмечена такая точка E , что $CM = ME$. Докажите, что $AE = 4AD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В каждой клетке доски 4×6 лежит 100 сосисок. Два кота: Полосатик и Волосатик — играют в игру по следующим правилам. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы одна сосиска, и из всех этих клеток съесть по одной сосиске. Коты ходят по очереди, начинает Полосатик. Проигрывает не имеющий хода. Какой кот выиграет при правильной игре?

2. Два пирата играли в карты на золотые монеты. Проигравший в игре отдавал часть своих монет выигравшему. Сначала первый проиграл половину своих монет и отдал их второму. Потом второй проиграл половину своих монет и отдал их первому, потом снова первый проиграл половину своих монет. В результате у первого оказалось 19 монет, а у второго 43. Сколько монет было у каждого пирата до начала игры?

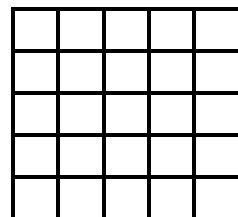
3. Число A , не оканчивающееся на 0, состоит из 11 цифр. Число B получено из числа A перестановкой всех цифр в обратном порядке. Могло ли оказаться, что десятичная запись числа $A+B$ состоит только из нечетных цифр?

4. Дано четыре различных натуральных числа. Известно, что какие-то три из шести попарных сумм этих чисел равны 13, 14 и 15. Найдите наименьшее значение, которое может принимать сумма четырёх таких чисел.

5. Найдите три различных простых делителя у числа $2017^{2015} + 2015^{2017}$.

6. Единичный квадрат разбит на прямоугольники, сумма периметров которых равна a . Докажите, что его можно разбить на прямоугольники, сумма периметров которых равна $a+5$.

7. Можно ли на клетчатой бумаге нарисовать по линиям сетки 8 контуров квадратов, чтобы получилась квадратная клетчатая решётка 5×5 , изображённая справа? (Контур может иметь разные размеры, пересекаться, а отдельные звенья решётки — принадлежать двум или большему числу контуров.)



8. Дан треугольник ABC . Точка M — середина стороны AB , а точка N — середина стороны AC . На стороне BC выбрана такая точка P , что $BP:PC = 3:1$. На прямой PN отмечена такая точка D , что $PN = ND$, а на прямой CM отмечена такая точка E , что $CM = ME$. Докажите, что $AE = 4AD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. Число A , не кратное 10, состоит из n цифр, а число B получено из числа A перестановкой всех цифр в обратном порядке. При каких n найдется такое число A , что десятичная запись числа $A+B$ состоит только из нечетных цифр?
2. В стране 250 городов, любые два города соединены дорогой. Докажите, что можно так ввести на всех дорогах одностороннее движение, что для каждого города разность между количеством входящих в него дорог и количеством выходящих из него дорог будет делиться на 3.
3. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?
4. В каждой клетке доски 10×11 лежит 9 сосисок. Два кота Полосатик и Волосатик играют в игру по следующим правилам. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы одна сосиска, и из всех этих клеток съесть по одной сосиске. Проигрывает не имеющий хода, начинает Полосатик. Какой кот выиграет при правильной игре?
5. Даны два различных натуральных числа n и k . Петя нашел наименьшее натуральное число a , которое больше n и при умножении на n даёт квадрат натурального числа. Вася нашел наименьшее натуральное число b , которое больше k и при умножении на k даёт квадрат натурального числа. Оказалось, что числа a и b отличаются ровно в 4 раза. Докажите, что числа n и k отличаются не менее, чем в 4 раза.
6. Петя втайне от Васи записал на бумажке в ряд 3000 натуральных чисел. За один вопрос Вася может узнать либо сумму любых 2017 стоящих подряд чисел, либо сумму любых 2107 стоящих подряд чисел. Всегда ли Вася несколькими такими вопросами сможет узнать сумму всех написанных Петей чисел?
7. Докажите, что существует бесконечно много пар различных рациональных чисел (a, b) таких, что $(a + \frac{1}{b})^2 = b + \frac{1}{a}$. (Число называется рациональным, если его можно представить в виде дроби с целыми числителем и знаменателем).
8. Можно ли отметить 1000 клеток квадрата 60×60 таким образом, чтобы при любом разбиении этого квадрата на 1200 трёхклеточных уголков в каждый уголок попадало не более одной отмеченной клетки?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

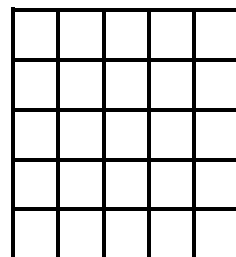
ГРУППА «СТАРТ»: ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Число A , не кратное 10, состоит из n цифр, а число B получено из числа A перестановкой всех цифр в обратном порядке. При каких n найдется такое число A , что десятичная запись числа $A+B$ состоит только из нечетных цифр?
2. В стране 250 городов, любые два города соединены дорогой. Докажите, что можно так ввести на всех дорогах одностороннее движение, что для каждого города разность между количеством входящих в него дорог и количеством выходящих из него дорог будет делиться на 3.
3. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?
4. В каждой клетке доски 10×11 лежит 9 сосисок. Два кота: Полосатик и Волосатик — играют в игру по следующим правилам. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы одна сосиска, и из всех этих клеток съесть по одной сосиске. Проигрывает не имеющий хода, начинает Полосатик. Какой кот выиграет при правильной игре?
5. Даны два натуральных числа n и k . Петя нашел наименьшее натуральное число a , которое больше n и при умножении на n даёт квадрат натурального числа. Вася нашел наименьшее натуральное число b , которое больше k и при умножении на k даёт квадрат натурального числа. Оказалось, что числа a и b равны. Докажите, что числа n и k равны.
6. Петя втайне от Васи записал на бумажке в ряд 20 натуральных чисел. За один вопрос Вася может узнать либо сумму любых 13 стоящих подряд чисел, либо сумму любых 17 стоящих подряд чисел. Всегда ли Вася несколькими такими вопросами сможет узнать сумму всех написанных Петей чисел?
7. Докажите, что существует бесконечно много пар различных рациональных чисел (a, b) таких, что $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{a}$. (Число называется рациональным, если его можно представить в виде дроби с целыми числителем и знаменателем).
8. Можно ли отметить 1000 клеток квадрата 60×60 таким образом, чтобы при любом разбиении этого квадрата на 1200 трёхклеточных уголков в каждый уголок попадало не более одной отмеченной клетки?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Число A , не кратное 10, состоит из 17 цифр, а число B получено из числа A перестановкой всех цифр в обратном порядке. Могло ли оказаться, что десятичная запись числа $A+B$ состоит только из нечетных цифр?
2. Даны четыре различных натуральных числа. Известно, что какие-то три из шести попарных сумм этих чисел равны 11, 21 и 31. Найдите наименьшее значение, которое может принимать сумма четырёх таких чисел.
3. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?
4. В каждой клетке доски 4×6 лежит 100 сосисок. Два кота: Полосатик и Волосатик — играют в игру по следующим правилам. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы одна сосиска, и из всех этих клеток съесть по одной сосиске. Проигрывает не имеющий хода. Какой кот выиграет при правильной игре?
5. Единичный квадрат разбит на прямоугольники, сумма периметров которых равна a . Докажите, что его можно разбить на прямоугольники, сумма периметров которых равна $a+5$.
6. Два пирата играли в карты на золотые монеты. Проигравший в игре отдавал часть своих монет выигравшему. Сначала первый проиграл половину своих монет и отдал их второму. Потом второй проиграл половину своих монет и отдал их первому, потом снова первый проиграл половину своих монет. В результате у первого оказалось 19 монет, а у второго 43. Сколько монет было у каждого пирата до начала игры?
7. Петя втайне от Васи записал на бумажке в ряд 205 натуральных чисел. За один вопрос Вася может узнать либо сумму любых 100 стоящих подряд чисел, либо сумму любых 111 стоящих подряд чисел. Всегда ли Вася несколькими такими вопросами сможет узнать сумму всех написанных Петей чисел?
8. Можно ли на клетчатой бумаге нарисовать по линиям сетки 8 контуров квадратов, чтобы получилась квадратная клетчатая решётка 5×5 , изображённая справа? (Контур может иметь разные размеры, пересекаться, а отдельные звенья решётки — принадлежать двум или большему числу контуров.)



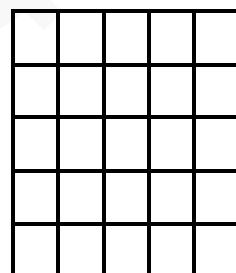
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 08.12.2017

ГРУППА «СТАРТ», ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Каждый год комиссия по климату заявляет, что среднегодовая температура на Земле выше, чем три года назад, но меньше чем сто лет назад. Сколько лет подряд это заявление может быть правдой?

2. Два пирата играли в карты на золотые монеты. Проигравший в игре отдавал часть своих монет выигравшему. Сначала первый проиграл половину своих монет и отдал их второму. Потом второй проиграл половину своих монет и отдал их первому, потом снова первый проиграл половину своих монет. В результате у первого оказалось 19 монет, а у второго 43. Сколько монет было у каждого пирата до начала игры?

3. Можно ли на клетчатой бумаге нарисовать по линиям сетки 8 контуров квадратов, чтобы получилась квадратная клетчатая решётка 5×5 , изображённая справа? (Контур может иметь разные размеры, пересекаться, а отдельные звенья решётки — принадлежать двум или большему числу контуров.)



4. В каждой клетке доски 10×10 лежит по 100 сосисок. Два кота Полосатик и Волосатик играют в игру по следующим правилам. За один ход можно выбрать в таблице строку или столбец, в каждой клетке которого есть хотя бы одна сосиска, и из всех этих клеток съесть по одной сосиске. Начинает Полосатик. Проигрывает не имеющий хода. Какой кот имеет выигрышную стратегию?

5. Можно ли отметить 1000 клеток клетчатого квадрата 63×63 таким образом, чтобы при любом разбиении этого квадрата на трёхклеточные уголки в каждый уголок попадало не более одной отмеченной клетки?

6. По кругу расположены 100 точек. Каждая соединена отрезками с двумя соседними, а также с центром круга, образуя таким образом 200 отрезков и 100 треугольников. Каждый из отрезков покрасили в один из N цветов так, что нет ни одного треугольника, все стороны которого покрашены в различные цвета. При каком наибольшем N такое возможно?

7. Единичный квадрат разбит на прямоугольники, сумма периметров которых равна a . Докажите, что его можно разбить на прямоугольники, сумма периметров которых равна $a+10$.

8. 30 выпускников сдавали тест по математике. Средний балл тех, кто успешно прошёл тестирование — 84 балла, а тех, кто провалил испытания — 60 баллов. Средний балл всех сдающих составил 80 баллов. Сколько всего испытуемых успешно прошли тестирование?