МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Клетки доски 2015×2016 раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Во все вершины клеток записаны числа 0 и 1 так, что сумма чисел в вершинах любой черной клетки чётна, а вершинах любой белой — нечётна. Чему может равняться сумма чисел, записанных в четырёх вершинах доски?

2. Найдите все натуральные числа n, для которых число $1-5^n+5^{2n+1}$ является точным квадратом.

3. Мальвина написала на доске 30 различных натуральных чисел от 1 до 2016. Каждый ход Буратино выбирает некоторые из этих чисел и уменьшает их на одно и то же натуральное число, которое может меняться от хода к ходу. За какое наименьшие число ходов Буратино может сделать все числа нулями, вне зависимости от начальных чисел?

4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $abc(a+b+c) = 3$. Докажите, что $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8$.

5. У Павиана и Бабуина есть $n \geq 5000$ бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого–то хода Бабуина осталось 2016 или 16 бананов. При каких n Павиан может победить?

6. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AD. Точки M и N — середины отрезков AD и BC, P — произвольная точка на отрезке MN. Прямая, проходящая через P параллельно BC, пересекает CA и AB в точках K и H. Прямые, проходящие через точку P параллельно AC и AB, пересекают отрезок BC в точках T и S. Докажите, что трапеция $HKTS$ является равнобокой.

7. Пусть D, E, F — середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC соответственно; I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Прямые BI и ED пересекаются в точке P, прямые CI и FD пересекаются в точке Q. Прямая PQ пересекает стороны AB и AC в точках T и S соответственно. Докажите, что треугольник ATS равнобедренный.

8. В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно одного общего знакомого. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Клетки доски 2015×2016 раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Во все вершины клеток записаны числа 0 и 1 так, что сумма чисел в вершинах любой черной клетки чётна, а вершинах любой белой — нечётна. Чему может равняться сумма чисел, записанных в четырёх вершинах доски?

2. Найдите все натуральные числа n, для которых число $1-5^n+5^{2n+1}$ является точным квадратом.

3. Мальвина написала на доске числа 1, 2, …, 30. Каждый ход Буратино выбирает некоторые из этих чисел и уменьшает их на одно и то же натуральное число, которое может меняться от хода к ходу. За какое наименьшие число ходов Буратино может сделать все числа нулями?

4. Действительные числа a, b, c, d таковы, что $a+b = cd$ и $c+d = ab$. Докажите неравенство $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) \geq 0$.

5. У Павиана и Бабуина есть $n \geq 5000$ бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого–то хода Бабуина осталось 2016 или 16 бананов. При каких n Павиан может победить?

6. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AD. Точки M и N — середины отрезков AD и BC, P — произвольная точка на отрезке MN. Прямая, проходящая через P параллельно BC, пересекает CA и AB в точках K и H. Прямые, проходящие через точку P параллельно AC и AB, пересекают отрезок BC в точках T и S. Докажите, что трапеция $HKTS$ является равнобокой.

7. Пусть D, E, F — середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC соответственно; I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Прямые BI и ED пересекаются в точке P, прямые CI и FD пересекаются в точке Q. Прямая PQ пересекает стороны AB и AC в точках T и S соответственно. Докажите, что треугольник ATS равнобедренный.

8. В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно одного общего знакомого. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Клетки доски 5×6 раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Во все вершины клеток записаны числа 0 и 1 так, что сумма чисел в вершинах любой черной клетки чётна, а вершинах любой белой — нечётна. Чему может равняться сумма чисел, записанных в четырёх вершинах доски?

2. Дано четырёхзначное число A, в записи которого нет нулей и девяток. Его цифры расставили в неубывающем порядке, получили число B. Потом его цифры расставили в невозрастающем порядке, получили число C. Могло ли оказаться, что $C–B = A$?

3. Мальвина написала на доске числа 1, 2, …, 30. Каждый ход Буратино выбирает некоторые из этих чисел и уменьшает их на одно и то же натуральное число, которое может меняться от хода к ходу. За какое наименьшие число ходов Буратино может сделать все числа нулями?

4. Действительные числа a, b, c, d таковы, что $a+b = cd$ и $c+d = ab$. Докажите неравенство $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) \geq 0$.

5. У Павиана и Бабуина есть 3016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. Может ли Павиан победить?

6. Пусть AM — медиана треугольника ABC, N — точка на стороне AB. Отрезки AM и CN пересекаются в точке K. Оказалось, что $\angle BNC = 2\angle BAM$. Докажите, что $AB = CK$.

7. Пусть D, E, F — середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC соответственно; I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Прямые BI и ED пересекаются в точке P, прямые CI и FD пересекаются в точке Q. Прямая PQ пересекает стороны AB и AC в точках T и S соответственно. Докажите, что треугольник ATS равнобедренный.

8. В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно одного общего знакомого. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Дано натуральное число n. Назовем клетчатый прямоугольник *большим*, если каждая из его сторон больше $100n$. При каком наименьшем k из любого большого прямоугольника можно вырезать несколько полосок $1\times 2n$ так, чтобы осталось не более k клеток?

2. У Павиана и Бабуина есть $n \geq 5000$ бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого–то хода Бабуина осталось 2016 или 16 бананов. При каких n Павиан может победить?

3. Кирилл написал на заборе в строчку число 21 четное число раз. Докажите, что полученное число 212121…21 не является точным квадратом.

4. Взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b и c удовлетворяют условию $ab = ac+bc$. Докажите, что abc — точный квадрат.

5. В некоторой школе было проведено 44 олимпиады, на каждой из которых наградили ровно 7 победителей. Оказалось, что для любых двух олимпиад был ровно один школьник, ставший победителем обеих. Докажите, что был школьник, ставший победителем всех 44 олимпиад.

6. На экране компьютера написаны 50 натуральных чисел от 1 до 1000. За одну операцию юзер Вася может указать **целое** число n, выбрать несколько из написанных на экране чисел и прибавить n к выбранным числам. Докажите, что за 10 таких операций Вася может сделать все числа нулями, вне зависимости от исходных чисел.

7. Среди чисел a, b, c и d два положительных и два отрицательных. Докажите, что $|x–a|+|x–b|+|x–c|+|x–d| \geq |a|+|b|+|c|+|d|$ при любом x.

8. Дан треугольник ABC. Известно, что $\angle B = 3\angle C$. На стороне AC отмечены такие точки M и N, что $\angle ABM = \angle MBN = \angle NBC$. Перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую BN, пересекает отрезок BM в точке K. Докажите, что NK — биссектриса угла ANB.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Назовем клетчатый прямоугольник *большим*, если каждая из его сторон больше 100. При каком наименьшем k из любого большого прямоугольника можно вырезать несколько полосок 1×6 так, чтобы осталось не более k клеток?

2. У Павиана и Бабуина есть $n \geq 5000$ бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого–то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. При каких n Павиан может победить?

3. Кирилл написал на заборе в строчку 120 раз число 21. Докажите, что полученное число 212121…21 не является точным квадратом.

4. Взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b и c удовлетворяют условию $ab = ac+bc$. Докажите, что abc — точный квадрат.

5. В некоторой школе было проведено 44 олимпиады, на каждой из которых наградили ровно 7 победителей. Оказалось, что для любых двух олимпиад был ровно один школьник, ставший победителем обеих. Докажите, что был школьник, ставший победителем всех 44 олимпиад.

6. На экране компьютера написаны 50 натуральных чисел от 1 до 1000. За одну операцию юзер Вася может указать **целое** число n, выбрать несколько из написанных на экране чисел и прибавить n к выбранным числам. Докажите, что за 10 таких операций Вася может сделать все числа нулями, вне зависимости от исходных чисел.

7. Среди чисел a, b, c и d два положительных и два отрицательных. Докажите, что $|x–a|+|x–b|+|x–c|+|x–d| \geq |a|+|b|+|c|+|d|$ при любом x.

8. Дан треугольник ABC. Известно, что $\angle B = 3\angle C$. На стороне AC отмечены такие точки M и N, что $\angle ABM = \angle MBN = \angle NBC$. Перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую BN, пересекает отрезок BM в точке K. Докажите, что NK — биссектриса угла ANB.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Дан квадрат со стороной, большей 1000. Докажите, что из него можно вырезать не более 4 клеток таким образом, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×4.

2. У Павиана и Бабуина есть 3016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. Может ли Павиан победить?

3. Кирилл написал на заборе в строчку число 721 ровно 721 раз. Докажите, что полученное число 721721721…721 не является квадратом натурального числа.

4. Незнайка похвастался, что смог составить четыре натуральных числа, первое из которых делится на 36, второе — на 37, третье — на 38, а четвёртое — на 39. При этом цифра 0 в записи чисел не содержится, а цифры 1, 2, …, 9 использованы ровно по одному разу. Не ошибся ли он?

5. В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно двух общих знакомых. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе?

6. На экране компьютера написаны 50 натуральных чисел от 1 до 1000. За одну операцию юзер Вася может указать **целое** число n, выбрать несколько из написанных на экране чисел и прибавить n к выбранным числам. Докажите, что за 10 таких операций Вася может сделать все числа нулями, вне зависимости от исходных чисел.

7. Числа a и b имеют разные знаки. Докажите, что $|x+a|+|x+b| \geq |a|+|b|$ при любом x.

8. Дан треугольник ABC. Известно, что $\angle B = 3\angle C$. На стороне AC отмечены такие точки M и N, что $\angle ABM = \angle MBN = \angle NBC$. Перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую BN, пересекает отрезок BM в точке K. Докажите, что NK — биссектриса угла ANB.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Дан квадрат с нечетной стороной, большей 1000. Докажите, что из него можно вырезать одну клетку таким образом, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×4.

2. У Павиана и Бабуина есть 2016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан и съедает любое число бананов. Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 1017 бананов. Может ли Павиан этого добиться?

3. Кирилл написал на заборе в строчку число 21 ровно 100 раз. Докажите, что полученное число 212121…21 не является точным квадратом.

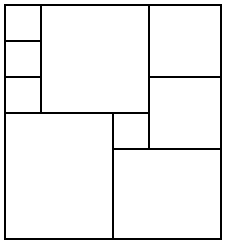
4. Незнайка похвастался, что смог составить четыре натуральных числа, первое из которых делится на 36, второе — на 37, третье — на 38, а четвёртое — на 39. При этом цифра 0 в записи чисел не содержится, а цифры 1, 2, …, 9 использованы ровно по одному разу. Не ошибся ли он?

5. В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно двух общих знакомых. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе?

6. Учитель написал на доске обыкновенную дробь. Сначала к доске вышла Аня и прибавила к её знаменателю числитель. Затем к доске вышел Боря и к числителю новой дроби прибавил её знаменатель. Наконец, к доске вышел Вася и снова прибавил к знаменателю новой дроби её числитель. В итоге оказалось, что на доске написано $\frac{13}{23}$. Какая дробь была на доске изначально?

7. Три школьника зашли в магазин. Алина купила 2 яблока, 7 груш и 1 апельсин, Вова — 5 яблок, 6 груш и 5 апельсинов, Дима — 8 яблок, 4 груши и 9 апельсинов. Все заплатили поровну, но один при оплате воспользовался скидкой. Кто?

8. Квадрат разбит на 9 частей, как показано на рисунке (рисунок может быть немного неточным, но схема разбиения именно такая). Могут ли все 9 частей быть квадратами?



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно одного общего знакомого. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе?

2. Набор гирь будем называть *крепким*, если из этого набора можно удалить гирю так, чтобы средний вес гирь набора не изменился. Есть набор из $n > 2$ гирь. Докажите, что если после удаления любой из гирь этот набор становится крепким, то он изначально крепкий. Средний вес гирь набора — это сумма весов всех гирь набора, делённая на количество гирь в наборе.

3. Дан квадрат со стороной, большей 1000. Докажите, что из него можно вырезать не более 4 клеток таким образом, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×4.

4. Дано натуральное число A, в записи которого нет нулей и девяток и которое состоит из чётного числа цифр. Его цифры расставили в неубывающем порядке, получили число B. Потом его цифры расставили в невозрастающем порядке, получили число C. Оказалось, что $A+B = C$. Докажите, что у числа A найдутся две цифры (возможно, равные), сумма которых равна 8.

5. Петя, Вася и Толя пошли в магазин. Петя купил 6 груш, апельсин и 2 лимона. Вася купил 2 груши, 4 апельсина и 4 лимона. Наконец, Толя купил 5 груш, 2 апельсина и 3 лимона. При этом одному из мальчиков при покупке сделали скидку. В результате оказалось, что все мальчики заплатили поровну. Кому из мальчиков сделали скидку?

6. Кирилл написал на заборе в строчку число 721 ровно 721 раз. Докажите, что полученное число 721721721…721 не является квадратом натурального числа.

7. У Павиана и Бабуина есть 3016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. Может ли Павиан победить?

8. В некоторой школе было проведено 44 олимпиады, на каждой из которых наградили ровно 7 победителей. Оказалось, что для любых двух олимпиад был ровно один школьник, ставший победителем обеих. Докажите, что был школьник, ставший победителем всех 44 олимпиад.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно одного общего знакомого. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе?

2. Есть набор из $n > 2$ гирь попарно различных весов. Докажите, что из него можно удалить одну гирю так, чтобы в полученном наборе ни одна гиря не совпадала по весу со средним весом всех остальных. Средний вес набора гирь — это сумма их весов, делённая на их количество.

3. Дан квадрат со стороной, большей 1000. Докажите, что из него можно вырезать не более 4 клеток таким образом, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×4.

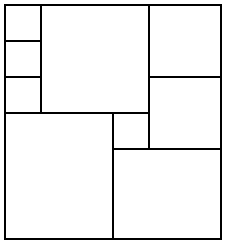
4. Дано натуральное число A, в записи которого нет нулей и девяток и которое состоит из чётного числа цифр. Его цифры расставили в неубывающем порядке, получили число B. Потом его цифры расставили в невозрастающем порядке, получили число C. Оказалось, что $A+B = C$. Докажите, что у числа A найдутся две цифры (возможно, равные), сумма которых равна 8.

5. Три школьника зашли в магазин. Алина купила 2 яблока, 7 груш и 1 апельсин, Вова — 5 яблок, 6 груш и 5 апельсинов, Дима — 8 яблок, 4 груши и 9 апельсинов. Все заплатили поровну, но один при оплате воспользовался скидкой. Кто?

6. Кирилл написал на заборе в строчку число 721 ровно 721 раз. Докажите, что полученное число 721721721…721 не является квадратом натурального числа.

7. У Павиана и Бабуина есть 3016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. Может ли Павиан победить?

8. Квадрат разбит на 9 частей, как показано на рисунке (рисунок может быть немного неточным, но схема разбиения именно такая). Могут ли все 9 частей быть квадратами?



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 21.02.2016

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. В группе людей каждый знает ровно четверых из остальных, а любые двое знакомых имеют ровно двух общих знакомых. Какое наименьшее число людей может быть в такой группе?

2. Учитель написал на доске обыкновенную дробь. Сначала к доске вышла Аня и прибавила к её знаменателю числитель. Затем к доске вышел Боря и к числителю новой дроби прибавил её знаменатель. Наконец, к доске вышел Вася и снова прибавил к знаменателю новой дроби её числитель. В итоге оказалось, что на доске написано $\frac{13}{23}$. Какая дробь была на доске изначально?

3. Дан квадрат с нечетной стороной, большей 1000. Докажите, что из него можно вырезать одну клетку таким образом, что остаток можно разрезать на прямоугольники 1×4.

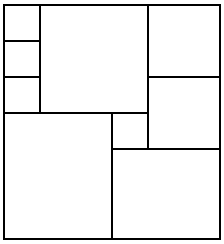
4. Дано четырёхзначное число A, в записи которого нет нулей и девяток. Его цифры расставили в неубывающем порядке, получили число B. Потом его цифры расставили в невозрастающем порядке, получили число C. Могло ли оказаться, что $C–B = A$?

5. У Павиана и Бабуина есть 3016 бананов. Они по очереди съедают несколько бананов, причем каждый может съесть на один банан меньше или на один банан больше, чем перед этим съел другой (совсем ничего не есть нельзя). Первым ходит Павиан (и может этим ходом съесть сколько угодно). Он хочет, чтобы после какого-то хода Бабуина осталось 2016 или 1016 бананов. Может ли Павиан победить?

6. Кирилл написал на заборе в строчку число 24 ровно 300 раз. Докажите, что полученное число 242424…24 не является точным квадратом.

7. Три школьника зашли в магазин. Алина купила 2 яблока, 7 груш и 1 апельсин, Вова — 5 яблок, 6 груш и 5 апельсинов, Дима — 8 яблок, 4 груши и 9 апельсинов. Все заплатили поровну, но один при оплате воспользовался скидкой. Кто?

8. Квадрат разбит на 9 частей, как показано на рисунке (рисунок может быть немного неточным, но схема разбиения именно такая). Могут ли все 9 частей быть квадратами?



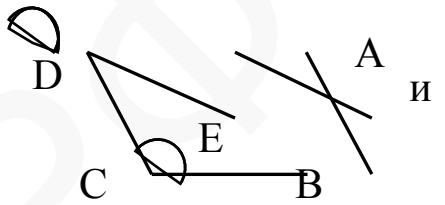
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Пусть $A = 11\ldots11$ (1526 единиц). При каком наибольшем n не существует натурального числа B, кратного A, сумма цифр которого равна n?

2. Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

3. Дан невыпуклый равносторонний пятиугольник $ABCDE$ (см. рис.). Оказалось, что углы ABC, BCD и DEA равны. Чему?



4. У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число, либо сокращать дробь. Какие числа может получить Петя такими операциями?

5. У Ани есть электронный таракан. Таракан работает так: Аня вводит в таракана любое положительное число $a \le 1$, а таракан проползает a см на север, юг, запад или восток. Направление таракан выбирает сам с одним ограничением: среди любых 100 последовательных передвижений должно быть хотя бы по одному в каждом из четырёх направлений. Аня хочет, чтобы таракан отполз хотя бы на 1 м от своего места, на котором она хочет поиграть. Сможет ли Аня отогнать таракана?

6. В оздоровительный лагерь приехало 175 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что любых шестерых школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, что все школьники, оказавшиеся в одной комнате, будут знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло оказаться среди приехавших в лагерь?

7. Дан треугольник ABC, где $\angle A = 70°$, $\angle B = 30°$ и $\angle C = 80°$. Точка D внутри треугольника такова, что $\angle DAB = 30°$ и $\angle DBA = 10°$. Найдите угол DCB.

8. Даны вещественные числа a_1, a_2, ..., a_{2016} и b_1, b_2, ..., b_{2016}. Обозначим через x_n число $[na_1+b_1]+[na_2+b_2]+...+[na_{2016}+b_{2016}]$. Нашлось такое число d, что для любого натурального k выполнено $x_{k+1}-x_k = d$. Докажите, что число $a_1+a_2+...+a_{2016}$ — целое. Здесь через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x.

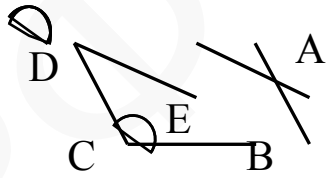
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Существует ли натуральное число B, кратное 11111, сумма цифр которого равна 36?

2. Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

3. Дан невыпуклый равносторонний пятиугольник $ABCDE$ (см. рис.). Оказалось, что углы ABC, BCD и DEA равны. Чему?



4. У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число, либо сокращать дробь. Может ли Петя получить дробь 3/5?

5. У Ани есть электронный таракан. Таракан работает так: Аня вводит в таракана любое положительное число $a \le 1$, а таракан проползает a см на север, юг, запад или восток. Направление таракан выбирает сам с одним ограничением: среди любых 100 последовательных передвижений должно быть хотя бы по одному в каждом из четырёх направлений. Аня хочет, чтобы таракан отполз хотя бы на 1 м от своего места, на котором она хочет поиграть. Сможет ли Аня отогнать таракана?

6. В оздоровительный лагерь приехало 175 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что любых шестерых школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, что все школьники, оказавшиеся в одной комнате, будут знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло оказаться среди приехавших в лагерь?

7. Пусть AM — медиана треугольника ABC; P — основание перпендикуляра из точки B на биссектрису угла BMA; Q — основание перпендикуляра из точки C на биссектрису угла CMA. Отрезки AM и PQ пересекаются в точке S. Докажите, что $PS = QS$.

8. Даны вещественные числа a и b. Нашлось такое число d, что для любого натурального n выполнено $[a(n+1)+b]-[an+b] = d$. Докажите, что число a — целое. Здесь через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x.

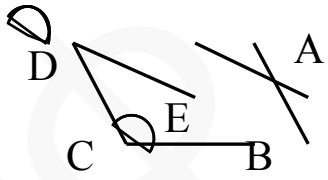
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Какую сумму цифр не может иметь натуральное число, кратное 11? Перечислите все варианты и объясните, почему других нет.

2. Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов?

3. Дан невыпуклый равносторонний пятиугольник *ABCDE* (см. рис.). Оказалось, что углы *ABC*, *BCD* и *DEA* равны. Чему?



4. У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число, либо сокращать дробь. Может ли Петя получить дробь 5/7?

5. У Ани есть электронный таракан. Таракан работает так: Аня вводит в таракана любое натуральное число $a \le 100$, а таракан проползает a см вправо или влево. Направление таракан выбирает сам с одним ограничением: среди любых 5 последовательных передвижений должно быть хотя бы по одному в каждом из направлений. Аня хочет, чтобы таракан отполз хотя бы на 1 км от своего места, на котором она хочет поиграть. Сможет ли Аня отогнать таракана?

6. В первый класс пришли 25 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых четырёх школьников есть две непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло оказаться среди первоклассников?

7. Пусть *AM* — медиана треугольника *ABC*; *P* — основание перпендикуляра из точки *B* на биссектрису угла *BMA*; *Q* — основание перпендикуляра из точки *C* на биссектрису угла *CMA*. Отрезки *AM* и *PQ* пересекаются в точке *S*. Докажите, что *PS* = *QS*.

8. Найдите все такие вещественные числа x, что оба числа $x+\sqrt{5}$ и $x^2+\sqrt{5}$ — рациональные.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В оздоровительный лагерь приехало 175 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что любых шестерых школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, что все школьники, оказавшиеся в одной комнате, будут знакомы между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло быть среди приехавших в лагерь?

2. На плоскости проведено n прямых. Каждая прямая пересекается ровно с 49 другими. Найдите все возможные значения n.

3. У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число, либо сокращать дробь. Какие числа может получить Петя такими операциями?

4. Число n назовём *хорошим*, если все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами. Могут ли для какого-то натурального n числа n, $n+4$ и $n+8$ быть хорошими?

5. Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

6. 6 идущих подряд натуральных чисел каким-то образом разбивают на две тройки чисел. Затем считают произведения чисел в этих тройках и из большего произведения вычитают меньшее. (Например, взяв числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и разбив их на тройки — (1, 5, 6) и (2, 3, 4), мы получим $30-24=6$.) Какое наименьшее значение может принимать результат?

7. Положительные числа a, b, c и d удовлетворяют неравенствам $ab(c+d) \geq (a+b)cd$ и $ab+cd \geq (a+b)(c+d)$. Докажите, что $a+b > c+d$.

8. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного на отрезок AM из точки B. На отрезке AM выбрана такая точка Q, что $AQ = 2PM$. Докажите, что $\angle CQM = \angle BAM$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В оздоровительном лагере отдыхают 225 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых шестерых школьников есть три непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло быть среди отдыхающих в лагере?

2. На плоскости проведено n прямых. Каждая прямая пересекается ровно с 49 другими. Найдите все возможные значения n.

3. У Пети есть дробь 5/8. Он может или прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Может ли Петя с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5?

4. Число n назовём *хорошим*, если все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами. Могут ли для какого-то натурального n числа n, $n+4$ и $n+8$ быть хорошими?

5. Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

6. 6 идущих подряд натуральных чисел каким-то образом разбивают на две тройки чисел. Затем считают произведения чисел в этих тройках и из большего произведения вычитают меньшее. (Например, взяв числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и разбив их на тройки — (1, 5, 6) и (2, 3, 4), мы получим $30-24=6$.) Какое наименьшее значение может принимать результат?

7. Попарно различные положительные числа a, b, c и d удовлетворяют неравенствам $ab(c+d) \geq (a+b)cd$ и $ab+cd \geq (a+b)(c+d)$. Какое из чисел ab и $3cd$ больше?

8. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного на отрезок AM из точки B. На отрезке AM выбрана такая точка Q, что $AQ = 2PM$. Докажите, что $\angle CQM = \angle BAM$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В оздоровительном лагере отдыхают 225 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых шестерых школьников есть три непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло быть среди отдыхающих в лагере?

2. На плоскости проведено n прямых. Каждая прямая пересекается ровно с 49 другими. Найдите все возможные значения n.

3. У Пети есть дробь 5/8. Он может или прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Может ли Петя с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5?

4. Число n назовём *хорошим*, если все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами. Докажите, что если числа n и $n+1$ — хорошие, то их произведение — удвоенный квадрат натурального числа.

5. Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

6. 4 идущих подряд натуральных числа каким-то образом разбивают на две пары чисел. Затем считают произведения чисел в этих парах и из большего произведения вычитают меньшее. (Например, взяв числа 5, 6, 7, 8 и разбив их на пары — (5, 6) и (7, 8), мы получим $56-30=26$.) Какое наименьшее значение может принимать результат? Минимум берётся по всем четвёркам и всем разбиениям.

7. Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов?

8. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного на отрезок AM из точки B. На отрезке AM выбрана такая точка Q, что $AQ = 2PM$. Докажите, что $\angle CQM = \angle BAM$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. В первый класс пришли 25 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых четырёх школьников есть две непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло быть среди пришедших?

2. Число N назовём *особым*, если на плоскости можно провести N прямых, каждая из которых пересекается ровно с 10 другими. Найдите 4 особых числа.

3. У Пети есть дробь 5/8. Он может или прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Может ли Петя с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5?

4. Существует ли такое натуральное число, что все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами?

5. Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

6. 4 идущих подряд натуральных числа каким-то образом разбивают на две пары чисел. Затем считают произведения чисел в этих парах и из большего произведения вычитают меньшее. (Например, взяв числа 5, 6, 7, 8 и разбив их на пары — (5, 6) и (7, 8), мы получим $56-30=26$.) Какое наименьшее значение может принимать результат? Минимум берётся по всем четвёркам и всем разбиениям.

7. Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов?

8. Тестирование по математике на острове лжецов и рыцарей проходили 100 учеников, каждый из которых либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Первые 60 учеников, по очереди выходя после тестирования, заявили: «Среди оставшихся в аудитории учеников лжецов больше, чем рыцарей». Сколько рыцарей проходило тестирование?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Тестирование по математике на острове лжецов и рыцарей проходили 100 учеников, каждый из которых либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Первые 60 учеников, по очереди выходя после тестирования, заявили: «Среди оставшихся в аудитории учеников лжецов больше, чем рыцарей». Сколько рыцарей проходило тестирование?

2. Даны 6 идущих подряд натуральных чисел. Их разбили на две тройки чисел, в каждой тройке числа перемножили и вычли из большего произведения меньшее. Какое наименьшее значение может принимать эта разность? Минимум берётся по всем шестёркам чисел и всем их разбиениям.

3. В первый класс пришли 30 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых восьмерых школьников есть четыре непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников может быть в классе?

4. Число n назовём *хорошим*, если все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами. Докажите, что если числа n и $n+1$ — хорошие, то их произведение — удвоенный квадрат натурального числа.

5. Петя написал на первой доске число 5, а на второй — число 8. За один ход оба написанных числа разрешается либо увеличить на 1, либо умножить на какое-нибудь натуральное число, либо разделить на какой-нибудь их натуральный общий делитель. Можно ли несколькими такими операциями добиться, чтобы на первой доске было написано число 3, а на второй — число 5?

6. Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

7. На плоскости проведено n различных прямых. Каждая прямая пересекается ровно с 49 другими. Найдите все возможные значения n.

8. Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Тестирование по математике на острове лжецов и рыцарей проходили 100 учеников, каждый из которых либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Первые 60 учеников, по очереди выходя после тестирования, заявили: «Среди оставшихся в аудитории учеников лжецов больше, чем рыцарей». Сколько рыцарей проходило тестирование?

2. Даны 6 идущих подряд натуральных чисел. Их разбили на две тройки чисел, в каждой тройке числа перемножили и вычли из большего произведения меньшее. Какое наименьшее значение может принимать эта разность? Минимум берётся по всем шестёркам чисел и всем их разбиениям.

3. В первый класс пришли 25 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых четырех школьников есть две непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников может быть в классе?

4. Натуральное число назовём *хорошим*, если все его натуральные делители, отличные от единицы, можно разбить на две группы с равными суммами. Докажите, что число 100! не является хорошим. (100! — это произведение всех натуральных чисел от 1 до 100, взятых по одному разу.)

5. У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Может ли Петя с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5?

6. Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

7. На плоскости проведено n различных прямых. Каждая прямая пересекается ровно с 49 другими. Найдите все возможные значения n.

8. Имеются 11 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 22.02.2016

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Тестирование по математике на острове лжецов и рыцарей проходили 100 учеников, каждый из которых либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Первые 60 учеников, по очереди выходя после тестирования, заявили: «Среди оставшихся в аудитории учеников лжецов больше, чем рыцарей». Сколько рыцарей проходило тестирование?

2. Можно ли какие-нибудь 6 идущих подряд натуральных чисел разбить на две группы по 3 числа с равными произведениями?

3. В первый класс пришли 25 школьников. Некоторые дети знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Известно, что среди любых четырёх школьников есть две непересекающиеся пары знакомых между собой. Какое наименьшее число пар знакомых школьников могло быть среди пришедших?

4. Два узника сидят в двух одиночных камерах. Им устраивают испытание. Каждому в камеру приносят кота. Кот может быть чёрным или белым. Каждый пытается угадать, какого цвета кот у его товарища. Если хотя бы один из узников угадает, то их отпустят на свободу, иначе – казнят. Перед испытанием узники могут пообщаться и договориться о своих действиях. Могут ли они гарантированно освободиться?

5. У Пети есть дробь 5/8. Он может либо прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно, либо умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число. Может ли Петя с помощью этих действий получить дробь, равную 3/5?

6. Каждая клетка доски 8×8 покрашена в черный или белый цвет. Оказалось, что в каждом квадрате 3×3 ровно a черных клеток, а в каждом прямоугольнике 2×4 или 4×2 — ровно b черных клеток. При каких a и b это возможно? Укажите все варианты и докажите, что других нет.

7. Число N называется *особым*, если на плоскости можно провести N различных прямых, каждая из которых пересекается ровно с 10 другими. Найдите 4 особых числа.

8. Имеются 10 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов. Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В последовательности натуральных чисел a_0, a_1, … для каждого натурального n число $a_{n-1}a_{n+1}$ делится на число a_n^2. Оказалось, что для некоторого натурального k числа a_k и a_1 взаимно просты. Докажите, что a_0 делится на a_1.

2. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA отмечены точки X, Y и Z соответственно. Отрезки AY, BZ и CX пересекаются в точке P. Докажите, что $AB+BC+CA > 2(PX+PY+PZ)$.

3. У Амбарцума есть восемь кубиков 1×1×1. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 12 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 4 грани. Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб 2×2×2 таким образом, чтобы на его поверхности было по 2 квадрата каждого цвета.

4. По кругу стоят несколько гирь, среди которых есть гири разного веса (веса не обязательно целые). В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на три.

5. В треугольнике ABC, где $AB < AC < BC$, AD — высота, AM — медиана. Точка E симметрична точке B относительно точки D. Перпендикуляр к BC в точке E пересекает отрезок AC в точке P. Докажите, что если BP и AM перпендикулярны, то треугольник ABC — прямоугольный.

6. На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят по одной хорде, соединяющей пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника?

7. Решите в натуральных числах уравнение $n^2m^5-2^n5^m = 2015+4nm$.

8. Сколькими способами можно вырезать из клетчатого прямоугольника 2×2017 две клетки так, чтобы остаток можно было разрезать на уголки из трёх клеток? Ответ требуется дать в виде числа в десятичной записи.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В последовательности натуральных чисел a_0, a_1, … для каждого натурального n число $a_{n-1}a_{n+1}$ делится на число a_n^2. Оказалось, что для некоторого натурального k числа a_k и a_1 взаимно просты. Докажите, что a_0 делится на a_1.

2. Дан ромб $ABCD$. Внутри треугольника BCD отмечена точка P. Прямая, проходящая через A параллельно PB, пересекает прямую CD в точке X; прямая, проходящая через A параллельно PD, пересекает прямую BC в точке Y. Докажите, что прямая AP делит отрезок XY пополам.

3. У Амбарцума есть восемь кубиков 1×1×1. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 24 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 2 грани. Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб 2×2×2 таким образом, чтобы на его поверхности был квадрат каждого цвета.

4. По кругу стоят несколько гирь, среди которых есть гири разного веса (веса не обязательно целые). В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на 3.

5. В треугольнике ABC, где $AB < AC < BC$, AD — высота, AM — медиана. Точка E симметрична точке B относительно точки D. Перпендикуляр к BC в точке E пересекает отрезок AC в точке P. Докажите, что если BP и AM перпендикулярны, то треугольник ABC — прямоугольный.

6. На окружности стоят 99 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят по одной хорде, соединяющей пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника?

7. Хан сказал Чаку натуральные числа n и d. Чак выписал все натуральные числа, а после этого подчеркнул все числа, дающие такой же остаток при делении на d, как и число $2^{2^n}+1$. Нашлось такое натуральное число $m \neq n$, что число $2^{2^m}+1$ подчёркнуто. Докажите, что найдется такое натуральное число k, отличное от m и n, что число $2^{2^k}+1$ подчёркнуто.

8. Сколькими способами можно вырезать из клетчатого прямоугольника 2×2015 одну клетку так, чтобы остаток можно было разрезать на уголки из трёх клеток? Ответ требуется дать в виде числа в десятичной записи.

ЯГУБОВ.РФ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе.

2. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c по крайней мере одно из чисел $(a+b+c)^2-8bc$, $(a+b+c)^2-8ca$ и $(a+b+c)^2-8ab$ положительно.

3. В очередь на экзамен к профессору Прохладному выстроилась группа из 20 студентов, а заходить в аудиторию им страшно. Поэтому студенты стали тянуть жребий: они написали на бумажках числа от 1 до 20, сложили в ёмкость, и наугад разобрали бумажки. Студент, получивший бумажку с числом 1, пошел в аудиторию. Затем оставшиеся 19 студентов повторили процесс: написали на бумажках числа от 1 до 19, сложили в ёмкость, и наугад разобрали бумажки. Студент, получивший бумажку с числом 1, пошел в аудиторию. Всего жребий тянули 20 раз, пока все студенты не зашли в аудиторию. Чудесным образом оказалось, что для каждого студента все вытянутые им номера различны. Украшение группы Ольга в первый раз вытащила число 14. Какой по счету она пошла отвечать?

4. По кругу стоят несколько гирь, среди которых есть гири разного веса (веса не обязательно целые). В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на 3.

5. В треугольнике ABC, где $AB < AC < BC$, AD — высота, AM — медиана. Точка E симметрична точке B относительно точки D. Перпендикуляр к BC в точке E пересекает отрезок AC в точке P. Докажите, что если BP и AM перпендикулярны, то треугольник ABC — прямоугольный.

6. На окружности стоят 99 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят по одной хорде, соединяющей пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника?

7. Хан сказал Чаку натуральные числа n и d. Чак выписал все натуральные числа, а после этого подчеркнул все числа, дающие такой же остаток при делении на d, как и число $2^{2^n}+1$. Нашлось такое натуральное число $m \neq n$, что число $2^{2^m}+1$ подчёркнуто. Докажите, что найдется такое натуральное число k, отличное от m и n, что число $2^{2^k}+1$ подчёркнуто.

8. Сколькими способами можно вырезать из клетчатого прямоугольника 2×2015 одну клетку так, чтобы остаток можно было разрезать на уголки из трёх клеток? Ответ требуется дать в виде числа в десятичной записи.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. По кругу стоят 100 точек, покрашенных в 100 разных цветов. На каждом ходу разрешается проделывать одну из трёх операций:

(i) Между любыми двумя разноцветными точками можно вставить точку, совпадающую по цвету с любой из этих двух.

(ii) Из любых трёх последовательных точек, среди которых есть одноцветные, можно удалить среднюю.

(iii) Между любыми двумя одноцветными точками можно вставить точку любого цвета.

Может ли через несколько таких операций остаться 99 точек?

2. Даны натуральные числа n и d. Чак выписал все натуральные числа, дающие такой же остаток при делении на d, как и число $2^{2^n}+1$. Нашлось такое натуральное число m, не равное n, что число $2^{2^m}+1$ выписано. Докажите, что найдется такое натуральное число k, отличное от m и n, что число $2^{2^k}+1$ также выписано.

3. По кругу стоят несколько гирь, не все они одного веса, и веса не обязательно целые. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на 3.

4. На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны иметь общую точку (хотя бы конец). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть, независимо от игры соперника?

5. У Амбарцума есть восемь кубиков 1×1×1. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 12 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 4 грани. Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб 2×2×2 таким образом, чтобы на его поверхности было по 2 квадрата каждого цвета.

6. В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе.

7. Положительные числа x, y и a удовлетворяют соотношению $x^6+y^6 = ax^2y^2$. Докажите, что $x^4+y^4 \le a^2/2$.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ сторона BC больше диагонали AC. Точка M — середина диагонали AC. Точка K — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок AM, а точка L — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на отрезок CM. Оказалось, что $AK = LM$. Докажите неравенство $AB+CD > AD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. По кругу стоят красная, синяя и зелёная точки. На каждом ходу разрешается проделывать одну из трёх операций:

(i) Между любыми двумя разноцветными точками можно вставить точку, совпадающую по цвету с любой из этих двух.

(ii) Из любых трёх последовательных точек, среди которых есть одноцветные, можно удалить среднюю.

(iii) Между любыми двумя одноцветными точками можно вставить точку любого цвета.

После нескольких таких операций осталось снова 3 точки. Докажите, что это снова красная, синяя и зелёная точки.

2. Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 66?

3. По кругу стоят несколько гирь, не все они одного веса, и веса не обязательно целые. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на 3.

4. На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны иметь общую точку (хотя бы конец). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть, независимо от игры соперника?

5. Все натуральные числа окрашены в красный и белый цвета (оба цвета присутствуют). Известно, что, если число a белое, то число $a+10$ также белое. А если число b красное, то число $b+15$ также красное. При каком наименьшем натуральном n можно наверняка утверждать, что среди чисел от 1 до n есть хотя бы 400 белых чисел?

6. В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе.

7. Положительные числа x, y и a удовлетворяют соотношению $x^3+y^3 = axy$. Докажите, что $x+y \le a$.

8. Дан треугольник ABC с наибольшей стороной AC. Из точки A опущена высота, ее основание H лежит на стороне BC. Докажите, что $AB > 2BH$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На чёрных клетках шахматной доски 10×10 расставлено 15 белых и 15 чёрных фишек. Белые фишки занимают три первых горизонтали, чёрные — три последних. За один ход можно одновременно сдвинуть две фишки одного цвета на соседние с ними по диагонали свободные поля. Можно ли такими ходами поменять местами белые фишки с чёрными?

2. Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 66?

3. По кругу стоят 5 гирь. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в этой тройке. Докажите, что все гири весят одинаково.

4. На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны иметь общую точку (хотя бы конец). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника?

5. Все натуральные числа окрашены в красный и белый цвета (оба цвета присутствуют). Известно, что, если число a белое, то число a+10 также белое. А если число b красное, то число b+15 также красное. При каком наименьшем натуральном n можно наверняка утверждать, что среди чисел от 1 до n есть хотя бы 400 белых чисел?

6. В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе.

7. Натуральные числа a и b таковы, что число $\dfrac{a^2}{a+2016b}$ — целое. Докажите, что число $\dfrac{2016^2 b^3}{a+2016b}$ — также целое.

8. Дан треугольник ABC с наибольшей стороной AC. Из точки A опущена высота, ее основание H лежит на стороне BC. Докажите, что $AB > 2BH$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. На чёрных клетках шахматной доски 10×10 расставлено 15 белых и 15 чёрных фишек. Белые фишки занимают три первых горизонтали, чёрные — три последних. За один ход можно одновременно сдвинуть две фишки одного цвета на соседние с ними по диагонали свободные поля. Можно ли такими ходами поменять местами белые фишки с чёрными?

2. Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 4?

3. По кругу стоят 5 гирь. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в этой тройке. Докажите, что все гири весят одинаково.

4. На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны иметь общий конец. Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника?

5. Все натуральные числа окрашены в красный и белый цвета (оба цвета присутствуют). Известно, что, если число a белое, то число a+10 также белое. А если число b красное, то число b+15 также красное. При каком наименьшем натуральном n можно наверняка утверждать, что среди чисел от 1 до n есть хотя бы 400 белых чисел?

6. Незнайка сложил все двузначные числа, которые можно получить из его семизначного телефонного номера (не содержащего нулей) вычёркиванием 5 цифр. Мог ли он в результате получить число 1000?

7. Натуральные числа a и b таковы, что число $\dfrac{a^2}{a+2016b}$ — целое. Докажите, что число $\dfrac{2016^2 b^3}{a+2016b}$ — также целое.

8. Дан треугольник ABC с наибольшей стороной AC. Из точки A опущена высота, ее основание H лежит на стороне BC. Докажите, что $AB > 2BH$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника?

2. Незнайка сложил все двузначные числа, которые можно получить из его семизначного телефонного номера (не содержащего нулей) вычёркиванием 5 цифр. Мог ли он в результате получить число 1000?

3. По кругу стоят красная, синяя и зелёная точки (именно в таком порядке по часовой стрелке). На каждом ходу разрешается проделывать одну из трёх операций:

(i) Между любыми двумя разноцветными точками можно вставить точку, совпадающую по цвету с любой из этих двух.

(ii) Из любых трёх последовательных точек, среди которых есть одноцветные, можно удалить среднюю.

(iii) Между любыми двумя одноцветными точками можно вставить точку любого цвета.

После нескольких таких операций осталось снова 3 точки. Докажите, что это снова красная, синяя и зелёная точки (именно в таком порядке по часовой стрелке).

4. На чёрных клетках шахматной доски 10×10 расставлено 15 белых и 15 чёрных фишек. Белые фишки занимают три первых горизонтали, чёрные — три последних. За один ход можно одновременно сдвинуть две фишки одного цвета на соседние с ними по диагонали свободные поля. Можно ли такими ходами поменять местами белые фишки с чёрными?

5. Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 4?

6. В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе.

7. По кругу стоят 100 натуральных чисел. В каждой тройке подряд стоящих чисел одно из этих чисел равно полусумме двух других. Докажите что все числа равны.

8. У Амбарцума есть восемь кубиков 1×1×1. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 24 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 2 грани (возможно, разных кубиков). Докажите, что из этих кубиков Наири, друг

Амбарцума, может сложить куб 2×2×2 таким образом, чтобы на его поверхности встретились все 24 цвета.

ЯГУБОВ.РФ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На окружности стоят 99 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника?

2. Незнайка сложил все двузначные числа, которые можно получить из его семизначного телефонного номера (не содержащего нулей) вычёркиванием 5 цифр. Мог ли он в результате получить число 1000?

3. По кругу стоят красная, синяя и зелёная точки. На каждом ходу разрешается проделывать одну из трёх операций:

(i) Между любыми двумя разноцветными точками можно вставить точку, совпадающую по цвету с любой из этих двух.

(ii) Из любых трёх последовательных точек, среди которых есть одноцветные, можно удалить среднюю.

(iii) Между любыми двумя одноцветными точками можно вставить точку любого цвета.

Может ли случиться, что после нескольких таких операций останутся точки только двух цветов?

4. На чёрных клетках шахматной доски 10×10 расставлено 15 белых и 15 чёрных фишек. Белые фишки занимают три первых горизонтали, чёрные — три последних. За один ход можно одновременно сдвинуть две фишки одного цвета на соседние с ними по диагонали свободные поля. Можно ли такими ходами поменять местами белые фишки с чёрными?

5. Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 2?

6. В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе.

7. Можно ли расставить по кругу числа 1, 2, ..., 99 по одному разу так, чтобы в каждой тройке подряд стоящих чисел одно из них равнялось полусумме двух других?

8. У Амбарцума есть восемь кубиков 1×1×1. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 24 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 2 грани (возможно, разных кубиков). Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб 2×2×2 таким образом, чтобы на его поверхности встретились все 24 цвета.

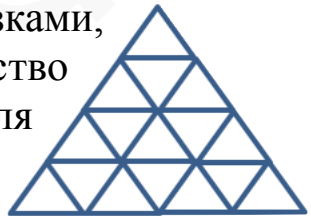
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 24.02.2016

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. На чёрных клетках шахматной доски 10×10 расставлено 15 белых и 15 чёрных фишек. Белые фишки занимают три первых горизонтали, чёрные — три последних. За один ход можно одновременно сдвинуть две фишки одного цвета на соседние с ними по диагонали свободные поля. Можно ли такими ходами поменять местами белые фишки с чёрными?

2. Незнайка сложил все двузначные числа, которые можно получить из его семизначного телефонного номера (не содержащего нулей) вычёркиванием 5 цифр. Мог ли он в результате получить число 1000?

3. Треугольник разделён на 16 треугольничков отрезками, параллельными сторонам. В какое наибольшее количество цветов можно раскрасить эти треугольнички, чтобы для любой пары различных цветов нашлись треугольнички этих цветов, имеющие общую сторону?



4. На окружности стоят 99 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника?

5. Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 2?

6. Какое наименьшее натуральное значение может принимать разность двух пятизначных чисел: ВЯТКА – КИРОВ ?

7. По кругу стоят 4 гири. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в этой тройке. Докажите, что все гири весят одинаково.

8. Из 27 одинаковых стеклянных кубиков сложен куб 3×3×3. Прожектор, установленный в кубике, может освещать 3 кубика, расположенных в одном ряду с прожектором в каждом из трёх направлений (всего 7 кубиков, включая прожектор). Какого наименьшего количества прожекторов хватит для освещения всех кубиков?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Пусть d_1, d_2, ..., d_k ($k > 1$) — некоторые различные натуральные делители натурального числа n. Оказалось, что $d_k - d_{k-1} = d_{k-1} - d_{k-2} = \ldots = d_2 - d_1$ и $n = d_1 + d_2 + \ldots + d_k$. При каких n это возможно?

2. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB + \angle ABC = 90°$; M — середина CD. Пусть $AD = a$, $BC = b$. Выразите через a и b значение $S_{ABM} - S_{DAM} - S_{BCM}$.

3. У продавца есть неограниченный запас гирь весом 1, 2, 4, 8, ..., 1024 г. Он положил на правую чашу весов батон колбасы, и хочет класть на левую чашу или снимать с неё гири (по одной за ход). Он хочет выяснить, правда ли, что батон весит строго больше 682 г, но строго меньше 1365 г. Может ли он справиться за 11 ходов?

4. На первый этап Олимпиады по закрытию скобочек пришло 2016 участников. Согласно новому Порядку, если на второй этап прошли a участников, на третий — b участников, а на четвертый — c участников, то $a - b$ должно равняться $b - c$. Поскольку участник очередного этапа должен быть участником и предыдущего, $a \geq b \geq c$. Сколькими способами жюри олимпиады может выбрать участников этапов, согласно новому Порядку? Варианты считаются различными, если они отличаются составом участников хотя бы на одном этапе.

5. При каких натуральных n выражение $m^3 - 3m$ (m — натуральное) даёт все возможные остатки при делении на n?

6. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $abcd = 1$. Докажите неравенство $ab + bc + cd + da \leq \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} + \dfrac{1}{d^2}$.

7. Дан остроугольный разносторонний треугольник. С помощью циркуля и линейки проведите две прямые, делящие данный треугольник на четыре части так, что из них можно сложить прямоугольник, и ни одна из прямых не параллельна стороне треугольника.

8. В треугольнике ABC ($AB < AC$) биссектриса угла A пересекает BC в точке D, M — середина BC. Точка P — основание высоты из точки B на отрезок AD. Прямая BP пересекает отрезок AM в точке Q. Докажите, что $DQ \parallel AB$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Найдите все натуральные a и b, для которых a^3+1 и b^3+1 делятся на a^2+b^2.

2. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB+\angle ABC = 90°$; M — середина CD. Пусть $AD = a$, $BC = b$. Выразите через a и b значение $S_{ABM}-S_{DAM}-S_{BCM}$.

3. У продавца есть неограниченный запас гирь весом 1, 2, 4, 8, ..., 1024 г. Он положил на правую чашу весов батон колбасы, и хочет класть на левую чашу или снимать с неё гири (по одной за ход). Он хочет выяснить, правда ли, что батон весит строго больше 682 г, но строго меньше 1365 г. Может ли он справиться за 11 ходов?

4. Дана клетчатая доска 37×37. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 5×5 клеток и отметить все 5 клеток любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 90 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена.

5. При каких натуральных n выражение m^3-3m (m — натуральное) даёт все возможные остатки при делении на n?

6. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $abcd = 1$. Докажите неравенство $ab+bc+cd+da \le \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}$.

7. Дан остроугольный разносторонний треугольник. С помощью циркуля и линейки проведите две прямые, делящие данный треугольник на четыре части так, что из них можно сложить прямоугольник, и ни одна из прямых не параллельна стороне треугольника.

8. В треугольнике ABC ($AB < AC$) биссектриса угла A пересекает BC в точке D, M — середина BC. Прямая, параллельная AB, проходящая через точку D, пересекает отрезок AM в точке Q. Докажите, что BQ перпендикулярно AD.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Найдите все натуральные a и b, для которых a^3+1 и b^3+1 делятся на a^2+b^2.

2. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle DAB+\angle ABC = 90°$; M — середина CD, $AD = BC = 1$. Найдите значение $S_{ABM}-S_{DAM}-S_{BCM}$.

3. У продавца есть неограниченный запас гирь весом 1, 2, 4, 8, ..., 1024 г. Он положил на правую чашу весов батон колбасы, и хочет класть на левую чашу или снимать с неё гири (по одной за ход). Он хочет выяснить, правда ли, что батон весит строго больше 682 г, но строго меньше 1365 г. Может ли он справиться за 11 ходов?

4. Дана клетчатая доска 37×37. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 5×5 клеток и отметить все 5 клеток любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 80 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена.

5. При каких натуральных n выражение $m^2-3m+10$ (m — натуральное) даёт все возможные остатки при делении на n?

6. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $abcd = 1$. Докажите неравенство $ab+bc+cd+da \le \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}$.

7. На плоскости дана точка A. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку по одной прямой (все прямые должны быть различными). Проигрывает тот, после хода которого угол между какими-то двумя из проведённых прямых станет меньше 1°. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?

8. В треугольнике ABC ($AB < AC$) биссектриса угла A пересекает BC в точке D, M — середина BC. Прямая, параллельная AB, проходящая через точку D, пересекает отрезок AM в точке Q. Докажите, что BQ перпендикулярно AD.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. На плоскости дана точка A. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку различные прямые. Проигрывает тот, после хода которого угол между какими–то из проведённых прямых станет меньше 1°. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?

2. Натуральные числа m, n и простое число p удовлетворяют условиям: $m^2+n^2 = p$ и m^3+n^3+4 делится на p. Найдите m и n.

3. Дана клетчатая доска 37×37. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 5×5 клеток и отметить все 5 клеток любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 90 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена.

4. В стране города соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого города можно выехать не более, чем по 7 дорогам. Докажите, что эту страну можно так разбить на 11 республик, что ни в одной республике нет города, из которого выходят две дороги в города этой республики.

5. При каких натуральных n среди чисел вида k^3-3k, где k — произвольное целое число, встречаются числа, дающие всевозможные остатки при делении на n?

6. Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими?

7. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют соотношению $xy+x+y = 1$. Докажите неравенство $x^2y^2+x+y \geq 5xy$.

8. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL. Точка P — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок AL. Из точки P на сторону AB опущена высота PQ. На стороне AB выбрана такая точка R, что $RQ = AC/4$. Докажите, что $AB+BC \geq 4PR$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА. ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА. ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА.

1. На плоскости дана точка A. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку различные прямые. Проигрывает тот, после хода которого угол между какими–то из проведённых прямых станет меньше 1°. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?

2. Петя написал в ряд в каком-то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти 3 стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы.

3. Дана клетчатая доска 25×25. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 3×3 клеток и отметить все три клетки любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 60 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена.

4. В стране города соединены дорогами с односторонним движением. Из каждого города можно выехать не более, чем по 7 дорогам. Докажите, что эту страну можно так разбить на 11 республик, что ни в одной республике нет города, из которого выходят две дороги в города этой республики.

5. При каких натуральных n среди чисел вида k^3-3k, где k — произвольное целое число, встречаются числа, дающие всевозможные остатки при делении на n?

6. Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими?

7. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют соотношению $xy+x+y=1$. Докажите неравенство $x^2y^2+1 \geq 6xy$.

8. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Точка K — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на отрезок AC. На стороне AC выбрана такая точка L, что $KL = AC/4$. Докажите, что $AB+BC \geq 4LM$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА. ПЕВРАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7-8 МЕСТА. ВТОРАЯ ЛИГА.

1. На плоскости дана точка A. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку различные прямые. Проигрывает тот, после хода которого угол между какими–то из проведённых прямых станет меньше 1°. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?

2. Петя написал в ряд в каком-то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти 3 стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы.

3. Дана клетчатая доска 25×25. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 3×3 клеток и отметить все три клетки любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 60 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена.

4. Найдите количество троек натуральных чисел (a, b, c) таких, что $a < b < c < 2016$ и $a–b = b–c$.

5. В каждой клетке таблицы $n \times n$ записано число. Оказалось, что для всех k сумма чисел, стоящих в k-ом столбце, отличается от суммы чисел, стоящих в k-й строке, ровно на 1. При каких n такое возможно?

6. Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими?

7. Неотрицательные числа x и y удовлетворяют соотношению $xy+x+y = 1$. Докажите неравенство $x^2y^2+x+y \geq 3xy$.

8. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. На отрезке HC отмечена такая точка N, что $HN = AC/2$. Докажите, что $AB+BC \geq 2BN$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016

МЛАДШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Можно ли при помощи только скобок сделать равенство $1:2:3:4:5:6:7:8:9:10 = 2016$ верным?

2. Петя написал в ряд в каком–то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти 3 стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы.

3. В каждой клетке таблицы $n\times n$ записано число. Для всех k сумма чисел k-го столбца отличается от суммы чисел k-й строки ровно на 1. При каких n такое возможно?

4. Найдите количество троек натуральных чисел (a,b,c), таких, что $a < b < c < 2016$ и $a–b = b–c$.

5. Квадрат 9×9 замощён прямоугольниками 1×3. Докажите, что какой–то квадрат 3×3 внутри данного квадрата замощён тремя такими прямоугольниками.

6. Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими?

7. Число 124 представили в виде суммы натуральных чисел (не обязательно различных), произведение которых также равно 124. Каким может быть количество этих натуральных чисел?

8. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. На отрезке HC отмечена такая точка N, что $HN = AC/2$. Докажите, что $AB+BC \geq 2BN$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. На плоскости дана точка A. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку по одной прямой (все прямые должны быть различными). Проигрывает тот, после хода которого угол между какими-то двумя из проведённых прямых станет меньше 1°. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?

2. Петя написал в ряд в каком-то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти три стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы.

3. Можно ли в квадрате 8×8 провести ломаную, проходящую по границам клеток (включая край), которая проходит ровно по одному разу по всем узлам (включая граничные) и делит квадрат на 4 части, в каждой из которых находится ровно по 2 клетки диагонали, соединяющей левый нижний угол с правым верхним?

4. Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими? (При каждой проверке можно пользоваться результатами всех предыдущих.)

5. При каких натуральных $n > 1$ среди чисел, представимых в виде a^7+5a^6, где a — натуральное, найдутся числа, дающие все возможные остатки от деления на n?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел a и b, не делящихся на 10, что $2ab = \overline{ab}$, где $\overline{ab}$ означает число, полученное приписыванием числа b справа к числу a. Числа a и b не могут начинаться с 0.

7. На турнир приехало $n > 5$ спортсменов. Оказалось, что среди любых пяти из них найдётся тот, кто знает остальных четверых. При каких n можно наверняка утверждать, что кто-то из спортсменов знает всех остальных?

8. Дана клетчатая доска 37×37. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 5×5 клеток и отметить все 5 клеток любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 90 Васиных ходов найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016

ГРУППА «СТАРТ». ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 5-8 МЕСТА. ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На плоскости дана точка A. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку по одной прямой (все прямые должны быть различными). Проигрывает тот, после хода которого угол между какими-то двумя из проведённых прямых станет меньше 1°. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?

2. Петя написал в ряд в каком-то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти три стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы.

3. Можно ли в квадрате 8×8 провести ломаную, проходящую по границам клеток (включая край), которая проходит ровно по одному разу по всем узлам (включая граничные) и делит квадрат на 4 части, в каждой из которых находится ровно по 2 клетки диагонали, соединяющей левый нижний угол с правым верхним?

4. Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи не более 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими? (При каждой проверке можно пользоваться результатами всех предыдущих.)

5. При каких натуральных $n > 1$ среди чисел, представимых в виде a^2+3a, где a — натуральное, найдутся числа, дающие все возможные остатки от деления на n?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел a и b, что $2ab = \overline{ab}$, где $\overline{ab}$ означает число, полученное приписыванием числа b справа к числу a. Числа a и b не могут начинаться с 0.

7. На турнир приехало 47 спортсменов. Оказалось, что среди любых пяти из них найдётся тот, кто знает остальных четверых. Можно ли наверняка утверждать, что кто-то из спортсменов знает всех остальных?

8. Дана клетчатая доска 37×37. Вася за один ход может выбрать любой квадрат 5×5 клеток и отметить все 5 клеток любой из двух его главных диагоналей (одну клетку можно отмечать дважды). Докажите, что после 80 Васиных ходов

найдётся неотмеченная клетка, у которой ни одна из соседних по стороне клеток тоже не отмечена.

ЯГУБОВ.РФ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 25.02.2016

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. На плоскости дана точка A. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) проводят через эту точку по одной прямой (все прямые должны быть различными). Проигрывает тот, после хода которого угол между какими-то двумя из проведённых прямых станет меньше 1°. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?

2. Петя написал в ряд в каком-то порядке все нечётные числа, меньшие 2016. Вася под каждыми двумя соседними Петиными числами написал их произведение, получив ряд из 1007 чисел. Докажите, что среди Васиных чисел можно найти 3 стоящих подряд, любые два из которых имеют общий делитель, больший единицы.

3. Квадрат 9×9 замощён прямоугольниками 1×3. Докажите, что какой-то квадрат 3×3 внутри данного квадрата замощён тремя такими прямоугольниками.

4. Есть лампочка и 10 пронумерованных кнопок. Известно, что ровно три из этих кнопок действующие. За одну попытку разрешается одновременно нажать любые три кнопки. Если хотя бы одна из нажимаемых кнопок действующая, то лампочка загорается. Как при помощи 9 проверок выяснить, какие кнопки являются действующими?

5. Имеется таблица $N\times N$, в каждой клетке которой записано число. Для всех i сумма чисел i-го столбца отличается от суммы чисел i-й строки ровно на 1. Для каких N такое возможно?

6. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел a и b, что $2ab = \overline{ab}$, где $\overline{ab}$ означает число, полученное приписыванием числа b сзади к числу a. Числа a и b не могут начинаться с 0.

7. Число 20 представили в виде суммы натуральных чисел (не обязательно различных), произведение которых также равно 20. Каким может быть количество этих натуральных чисел?

8. Можно ли при помощи только скобок сделать равенство 1:2:3:4:5:6:7:8 = 2016:5 верным?