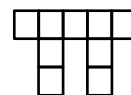


МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 22.02.2015**СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА**

1. Олег и Харитон играют на доске $n \times n$, где n — нечётное число. Олег ставит кружочки, а Харитон — крестики. В начале игры все поля пусты, только в левом нижнем углу стоит кружочек, а в правом верхнем — крестик. Начинает Олег. При своём ходе игрок ставит свой знак на свободное поле, граничащее (по стороне) с полем, на котором уже стоит **его** знак. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

2. Возможно ли в каждую клетку клетчатого поля 9×9 записать одно из чисел от 1 до 9 так, что для каждой фигуры вида как на рисунке справа (фигуру можно поворачивать и переворачивать) все числа в её клетках различны?



3. Дано натуральное k . При каком наибольшем натуральном m можно утверждать, что если из $3k$ различных точек на плоскости не более m лежат на одной прямой, то эти точки можно разбить на k групп по три точки так, чтобы точки в каждой группе не лежали на одной прямой?

4. Положительные числа a, b, x, y удовлетворяют уравнениям $a^2 + x = b^2 + y$ и $a + x^2 = b + y^2$, а также неравенству $a + b + x + y < 2$. Докажите, что $a = b$ и $x = y$.

5. Во всех клетках таблицы 2015×2015 клеток стоят различные вещественные числа. Для каждой строки нашли *медиану* — такое число из этой строки, для которого в строке поровну больших и меньших его чисел. Среди полученных 2015 чисел также выбрали медиану m . Докажите, что более четверти исходных чисел были меньше m .

6. В треугольнике ABC угол B — острый. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D . На стороне AC взята точка P . Докажите, что $\angle BPD < \angle DPC$.

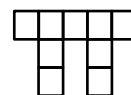
7. Найдите все натуральные a, b, c и простые p такие, что
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и C параллельны, а биссектрисы углов B и D пересекаются под углом 30° . Найдите острый угол между биссектрисами углов A и B .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 22.02.2015**СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА**

1. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди пишут цифры на доске. Первым ходит Петя и он пишет ненулевую цифру. Затем они по очереди приписывают по одной цифре справа, пока не образуется стозначное число. Вася выигрывает, если получившееся число даёт остаток 5 при делении на 11, в противном случае выигрывает Петя. Кто выиграет при правильной игре?

2. Возможно ли в каждую клетку клетчатого поля 9×9 записать одно из чисел от 1 до 9 так, что для каждой фигуры вида как на рисунке справа (фигуру можно поворачивать и переворачивать) все числа в её клетках различны?



3. Дано натуральное k . При каком наибольшем натуральном m можно утверждать, что если из $3k$ различных точек на плоскости не более m лежат на одной прямой, то эти точки можно разбить на k групп по три точки так, чтобы точки в каждой группе не лежали на одной прямой?

4. Положительные числа a, b, x, y удовлетворяют уравнениям $a^2 + x = b^2 + y$ и $a + x^2 = b + y^2$, а также неравенству $a + b + x + y < 2$. Докажите, что $a = b$ и $x = y$.

5. Во всех клетках таблицы 2015×2015 клеток стоят различные вещественные числа. Для каждой строки нашли *медиану* — такое число из этой строки, для которого в строке поровну больших и меньших его чисел. Среди полученных 2015 чисел также выбрали медиану m . Докажите, что более четверти исходных чисел были меньше m .

6. В треугольнике ABC угол B — острый. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D . На стороне AC взята точка P . Докажите, что $\angle BPD < \angle DPC$.

7. Назовем натуральное число n *забавным*, если для любого его натурального делителя d число $d+2$ является простым. Найдите все забавные числа с максимальным количеством делителей.

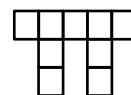
8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и C параллельны, а биссектрисы углов B и D пересекаются под углом 30° . Найдите острый угол между биссектрисами углов A и B .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 22.02.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди пишут цифры на доске. Первым ходит Петя и он пишет ненулевую цифру. Затем они по очереди приписывают по одной цифре справа, пока не образуется стозначное число. Вася выигрывает, если получившееся число делится на 13, в противном случае выигрывает Петя. Кто выиграет при правильной игре?

2. Возможно ли в каждую клетку клетчатого поля 9×9 записать одно из чисел от 1 до 9 так, что для каждой фигуры вида как на рисунке справа (фигуру можно поворачивать и переворачивать) все числа в её клетках различны?



3. На плоскости даны 300 точек, никакие 5 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что эти точки можно разбить на 100 групп по 3 точки так, чтобы в каждой группе точки не лежали на одной прямой.

4. Положительные числа a , b , x , y удовлетворяют уравнениям $a^2 + x = b^2 + y$ и $a + x^2 = b + y^2$, а также неравенству $a + b + x + y < 2$. Докажите, что $a = b$ и $x = y$.

5. Во всех клетках таблицы 2015×2015 клеток стоят различные вещественные числа. Для каждой строки нашли медиану — такое число из этой строки, для которого в строке поровну больших и меньших его чисел. Среди полученных 2015 чисел также выбрали медиану m . Докажите, что более четверти исходных чисел были меньше m .

6. В треугольнике ABC с острым углом B проведены медианы AM и BN . Докажите, что $\angle BNM < \angle MNC$.

7. Назовем натуральное число n забавным, если для любого его натурального делителя d число $d+2$ является простым. Может ли забавное число быть больше 100?

8. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ биссектрисы углов A и C параллельны, а биссектрисы углов B и D пересекаются под углом 30° . Найдите острый угол между биссектрисами углов A и B .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 22.02.2015**МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА**

1. Назовем натуральное число n *забавным*, если для любого его натурального делителя d число $d+2$ является простым. Найдите все забавные числа с максимальным количеством делителей.
2. Есть 30 камней различных весов и специальные весы. На эти весы можно класть только по три камня на каждую чашку, тогда весы информируют, на какой чашке груз больше. Всегда ли с помощью этих весов можно выявить самый лёгкий из данных камней?
3. Слава хочет так отметить крестиками k клеток ($0 \leq k \leq 64$) доски 8×8 , чтобы при любом разрезании доски на прямоугольники 1×2 было четное число доминошек с двумя отмеченными клетками. При каких k ему удастся это сделать?
4. Найдите наибольшее k такое, что если из 300 точек на плоскости никакие k не лежат на одной прямой, то эти точки так можно разбить на 100 троек, что никакие три точки из одной тройки не лежат на одной прямой.
5. В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый из них сыграл ровно одну партию с каждым из остальных. По окончании турнира выяснилось, что каждый из участников хотя бы один раз сыграл вничью. Кроме того, если двое участников сыграли вничью, то каждый из остальных 18 участников обыграл хотя бы одного из этой пары. Докажите, что все участники одержали одинаковое количество побед.
6. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди пишут цифры на доске. Первым ходит Петя и он пишет ненулевую цифру. Затем они по очереди приписывают по одной цифре справа, пока не образуется стозначное число. Вася выигрывает, если получившееся число даёт остаток 5 при делении на 11, в противном случае выигрывает Петя. Кто выигрывает при правильной игре?
7. Для любых положительных чисел докажите неравенство

$$\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} + \frac{bc}{b^2 - bc + c^2} + \frac{ca}{c^2 - ca + a^2} \geq 3.$$
8. Точка M — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC . На стороне AB выбрана точка P , а на стороне AC — точка Q таким образом, что $\angle PMB = \angle QMC$. Докажите, что $BQ = CP$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 22.02.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Назовем натуральное число n *забавным*, если для любого его натурального делителя d число $d+2$ является простым. Какое наибольшее количество делителей может иметь забавное число?
2. Есть 30 камней различных весов и специальные весы. На эти весы можно класть только по 15 камней на каждую чашку, тогда весы информируют, на какой чашке груз больше. Как с помощью этих весов найти пару камней, про которые будет точно известно, какой из них тяжелее?
3. Какое наименьшее количество клеток надо отметить на доске 12×12 таким образом, чтобы во всех квадратах 3×3 кроме, быть может, четырёх, была отмеченная клетка?
4. На плоскости так отмечены 150 точек, что никакие 100 не лежат на одной прямой. Докажите, что эти точки можно так разбить на 50 троек, что никакие три точки из одной тройки не лежат на одной прямой.
5. В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый из них сыграл ровно одну партию с каждым из остальных. По окончании турнира выяснилось, что каждый из участников хотя бы один раз сыграл вничью. Кроме того, если двое участников сыграли вничью, то каждый из остальных 18 участников обыграл хотя бы одного из этой пары. Докажите, что все участники одержали одинаковое количество побед.
6. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди пишут цифры на доске. Первым ходит Петя и он пишет ненулевую цифру. Затем они по очереди приписывают по одной цифре справа, пока не образуется стозначное число. Вася выигрывает, если получившееся число даёт остаток 5 при делении на 11, в противном случае выигрывает Петя. Кто выиграет при правильной игре?
7. Для любых положительных чисел докажите неравенство

$$\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} + \frac{bc}{b^2 - bc + c^2} + \frac{ca}{c^2 - ca + a^2} \geq 3.$$

8. Точка M — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC . На стороне AB выбрана точка P , а на стороне AC — точка Q таким образом, что $\angle PMB = \angle QMC$. Докажите, что $BQ = CP$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 22.02.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих натуральных делителей, отличных от него самого. Докажите, что если n — совершенное число, то сумма делителей числа $6n$, отличных от него самого, не меньше $7n$.
2. Из 60 точек на плоскости 39 лежат на одной прямой, а остальные не лежат на этой прямой. Докажите, что точки можно разбить на 20 троек таким образом, что никакие три точки из одной тройки не лежат на одной прямой.
3. Какое наименьшее количество клеток надо отметить на доске 12×12 таким образом, чтобы во всех квадратах 3×3 кроме, быть может, четырёх, была отмеченная клетка?
4. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 36 и содержит только цифры 0 и 1.
5. В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый из них сыграл ровно одну партию с каждым из остальных. По окончании турнира выяснилось, что каждый из участников хотя бы один раз сыграл вничью. Кроме того, если двое участников сыграли вничью, то каждый из остальных 18 участников обыграл хотя бы одного из этой пары. Сколько всего ничьих было в турнире?
6. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди пишут цифры на доске. Первым ходит Петя и он пишет ненулевую цифру. Затем они по очереди приписывают по одной цифре справа, пока не образуется стозначное число. Вася выигрывает, если получившееся число делится на 11, в противном случае выигрывает Петя. Кто выиграет при правильной игре?
7. Есть 30 камней различных весов и специальные весы. На эти весы можно класть только по 15 камней на каждую чашку, тогда весы информируют, на какой чашке груз больше. Как с помощью этих весов найти пару камней, про которые будет точно известно, какой из них тяжелее?
8. Точка M — середина основания BC равнобедренного треугольника ABC . На стороне AB выбрана точка P , а на стороне AC — точка Q таким образом, что $\angle PMB = \angle QMC$. Докажите, что $BQ = CP$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 22.02.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди пишут цифры на доске. Первым ходит Петя, и он пишет ненулевую цифру. Затем они по очереди приписывают по одной цифре справа, пока не образуется 100-значное число. Вася выигрывает, если получившееся число даёт остаток 5 при делении на 11, в противном случае выигрывает Петя. Кто выиграет при правильной игре?
2. Найдите наибольшее k такое, что если из 30 точек на плоскости никакие k не лежат на одной прямой, то эти точки можно разбить на 10 троек таким образом, что никакие три точки из одной тройки не лежат на одной прямой.
3. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 48^2 и содержит только цифры 0 и 1.
4. Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих натуральных делителей, отличных от него самого. Докажите, что если n — совершенное число, то сумма делителей числа $6n$, отличных от него самого, не меньше $7n$.
5. Какое наименьшее количество клеток надо отметить на доске 12×12 таким образом, чтобы во всех квадратах 3×3 кроме, быть может, четырёх, была отмеченная клетка?
6. В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый из них сыграл ровно одну партию с каждым из остальных. По окончании турнира выяснилось, что каждый из участников хотя бы один раз сыграл вничью. Кроме того, если двое участников сыграли вничью, то каждый из остальных 18 участников обыграл хотя бы одного из этой пары. Докажите, что все участники одержали одинаковое количество побед.
7. Вася имеет часы с тремя стрелками. Первая из них делает оборот за минуту, вторая за 3 минуты, а третья за 15 минут. Первоначально все стрелки в вертикальном положении. Найдите какой-нибудь момент, когда стрелки разделят циферблат на три равные части.
8. Есть 30 камней различных весов и специальные весы. На эти весы можно класть только по 15 камней на каждую чашку, тогда весы информируют, на какой чашке груз больше. Как с помощью этих весов найти пару камней, про которые будет точно известно, какой из них тяжелее?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 22.02.2015

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди пишут цифры на доске. Первым ходит Петя, и он пишет ненулевую цифру. Затем они по очереди приписывают по одной цифре справа, пока не образуется 100-значное число. Вася выигрывает, если получившееся число даёт остаток 5 при делении на 11, в противном случае выигрывает Петя. Кто выиграет при правильной игре?
2. Из 60 точек на плоскости 39 лежат на одной прямой, а остальные не лежат на этой прямой. Докажите, что точки можно разбить на 20 троек таким образом, что никакие три точки из одной тройки не лежат на одной прямой.
3. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 48^2 и содержит только цифры 0 и 1.
4. Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих натуральных делителей, отличных от него самого. Докажите, что если n — совершенное число, то сумма делителей числа $6n$, отличных от него самого, не меньше $7n$.
5. Какое наименьшее количество клеток надо отметить на доске 12×12 таким образом, чтобы во всех квадратах 3×3 кроме, быть может, двух, была отмеченная клетка?
6. В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый из них сыграл ровно одну партию с каждым из остальных. По окончании турнира выяснилось, что каждый из участников хотя бы один раз сыграл вничью. Кроме того, если двое участников сыграли вничью, то каждый из остальных 18 участников обыграл хотя бы одного из этой пары. Сколько всего ничьих было в турнире?
7. Вася имеет часы с тремя стрелками. Первая из них делает оборот за минуту, вторая за 3 минуты, а третья за 15 минут. Первоначально все стрелки в вертикальном положении. Найдите какой-нибудь момент, когда стрелки разделят циферблат на три равные части.
8. Есть 30 камней различных весов и специальные весы. На эти весы можно класть только по 10 камней на каждую чашку, тогда весы информируют, на какой чашке груз больше. Как с помощью этих весов найти пару камней, про которые будет точно известно, какой из них тяжелее?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 22.02.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди пишут цифры на доске. Первым ходит Петя и он пишет ненулевую цифру. Затем они по очереди приписывают по одной цифре справа, пока не образуется 100-значное число. Вася выигрывает, если получившееся число делится на 11, в противном случае выигрывает Петя. Кто выиграет при правильной игре?
2. Из 60 точек на плоскости 39 лежат на одной прямой, а остальные не лежат на этой прямой. Докажите, что точки можно разбить на 20 троек таким образом, что никакие три точки из одной тройки не лежат на одной прямой.
3. Существует ли натуральное число, которое делится на 48^2 и содержит только цифры 0 и 1?
4. В ряд в порядке возрастания выписали все натуральные числа, сумма цифр которых делится на 5. Найдите миллионное по счёту число в этом ряду.
5. Какое наименьшее количество клеток надо отметить на доске 12×12 таким образом, чтобы во всех квадратах 3×3 кроме, быть может, двух, была отмеченная клетка?
6. В турнире участвовали 20 шахматистов. Каждый из них сыграл ровно одну партию с каждым из остальных. По окончании турнира выяснилось, что каждый из участников хотя бы один раз сыграл вничью. Кроме того, если двое участников сыграли вничью, то каждый из остальных 18 участников обыграл хотя бы одного из этой пары. Сколько всего ничьих было в турнире?
7. Вася имеет часы с тремя стрелками. Первая из них делает оборот за минуту, вторая за 3 минуты, а третья за 15 минут. Первоначально все стрелки в вертикальном положении. Найдите какой-нибудь момент, когда стрелки разделят циферблат на три равные части.
8. Есть 30 камней различных весов и специальные весы. На эти весы можно класть только по 10 камней на каждую чашку, тогда весы информируют, на какой чашке груз больше. Как с помощью этих весов найти пару камней, про которые будет точно известно, какой из них тяжелее?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 23.02.2015**СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА**

1. Васе задали сложить две несократимые дроби a/b и c/d с натуральными числителями и знаменателями. Он разделил числа a и c на их наибольший общий делитель k , получив числа a_1 и c_1 , а числа b и d на их наибольший общий делитель m , получив числа b_1 и d_1 , потом записал дробь $(a_1d_1+b_1c_1)/(bd_1)$, сократил её и, наконец, умножил числитель на k . Вася говорит, что таким способом наверняка получит правильный ответ в несократимой записи. Прав ли он?

2. Какое наименьшее количество полосок $1 \times n$ можно разместить по клеточкам на доске $2n \times 2n$ ($n \geq 3$) так, чтобы нельзя было добавить ещё одну такую полоску, не перекрывающуюся с уже положенными?

3. Последовательность (x_n) задана условиями $x_1 = 2014$, $x_2 = 2015$, $x_{n+1} = x_n(x_n - 1) + 2$ при $n \geq 2$. Докажите, что

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) \dots (x_{2014}^2 + 1) - 1 = (x_{2015} - 1)^2.$$

4. Точка D на стороне AC треугольника ABC такова, что $AC = BD$ и $\angle A : \angle C : \angle CBD = 3 : 4 : 2$. Найдите углы треугольника ABC .

5. В ряд выписаны 2^n натуральных чисел, среди которых не более n различных. Докажите, что можно найти несколько чисел, выписанных подряд, произведение которых — точный квадрат.

6. $3m$ шариков пронумерованы $1, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, m, m, m$ и разбросаны в 8 коробок так, что для любых двух коробок найдется номер, который есть в обеих. Найдите наименьшее значение m .

7. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник. Известно, что $AB + CD = \sqrt{2} AC$ и $BC + DA = \sqrt{2} BD$. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.

8. Дано натуральное n . Докажите, что неравенство $|x! - x^y| \leq n$ выполняется только для конечного числа пар натуральных чисел $x > 1, y$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 23.02.2015**СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА**

1. Васе задали сложить две несократимые дроби a/b и c/d с натуральными числителями и знаменателями. Он разделил числа a и c на их наибольший общий делитель k , получив числа a_1 и c_1 , а числа b и d на их наибольший общий делитель m , получив числа b_1 и d_1 , потом записал дробь $(a_1d_1+b_1c_1)/(bd_1)$, сократил её и, наконец, умножил числитель на k . Вася говорит, что таким способом наверняка получит правильный ответ в несократимой записи. Прав ли он?

2. Клетчатая доска 10×10 замощена фигурками вида  и  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Какое наибольшее количество фигурок  могло быть использовано?

3. Последовательность (x_n) задана условиями $x_1 = 2014$, $x_2 = 2015$, $x_{n+1} = x_n(x_n - 1) + 2$ при $n \geq 2$. Докажите, что

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) \dots (x_{2014}^2 + 1) - 1 = (x_{2015} - 1)^2.$$

4. Точка D на стороне AC треугольника ABC такова, что $AC = BD$ и $\angle A : \angle C : \angle CBD = 3 : 4 : 2$. Найдите углы треугольника ABC .

5. В ряд выписаны 2^n натуральных чисел, среди которых не более n различных. Докажите, что можно найти несколько чисел, выписанных подряд, произведение которых — точный квадрат.

6. $3m$ шариков пронумерованы $1, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, m, m, m$ и разбросаны в 8 коробок так, что для любых двух коробок найдется номер, который есть в обеих. Найдите наименьшее значение m .

7. Точка D лежит на стороне AB равностороннего треугольника ABC . На прямой, проходящей через D параллельно AC , нашлась точка E такая, что $BE = CD$, а точки C и E лежат по разные стороны от прямой AB . Докажите, что $AD = ED$.

8. Дано натуральное n . Докажите, что неравенство $|x! - x^y| \leq n$ выполняется только для конечного числа пар натуральных чисел $x > 1, y$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 23.02.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Васе задали сложить две несократимые дроби a/b и c/d с натуральными числителями и знаменателями. Он разделил числа a и c на их наибольший общий делитель k , получив числа a_1 и c_1 , а числа b и d на их наибольший общий делитель m , получив числа b_1 и d_1 , потом записал дробь $(a_1d_1+b_1c_1)/(bd_1)$, сократил её и, наконец, умножил числитель на k . Вася говорит, что таким способом наверняка получит правильный ответ в несократимой записи. Прав ли он?

2. Клетчатая доска 10×10 замощена фигурками вида  и  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Какое наибольшее количество фигурок  могло быть использовано?

3. В мебельном салоне при покупке более чем на 50000 рублей полагается скидка. В свой день рождения салон объявил ещё об одной скидке. Воспользовавшись двумя последовательными скидками, покупатель приобрёл гарнитур, стоящий 69000 руб., всего за 60306 руб. На сколько процентов были скидки, если известно, что каждая составляла целое число процентов, меньшее 10?

4. Точка D на стороне AC треугольника ABC такова, что $AC = BD$ и $\angle A : \angle C : \angle CBD = 3 : 4 : 2$. Найдите углы треугольника ABC .

5. Вдумчивый мальчик Тоомас выписал на бумагу всевозможные 20-значные числа, в записи которых каждая из цифр 3, 4, 5 и 6 стоит по 5 раз подряд. Докажите, что среди записанных на бумаге чисел можно выбрать два таких, разность которых будет делиться на 207.

6. $3m$ шариков пронумерованы $1, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, m, m, m$ и разбросаны в 7 коробок так, что для любых двух коробок найдется номер, который есть в обеих. Найдите наименьшее значение m .

7. Точка D лежит на стороне AB равностороннего треугольника ABC . На прямой, проходящей через D параллельно AC , нашлась точка E такая, что $BE = CD$, а точки C и E лежат по разные стороны от прямой AB . Докажите, что $AD = ED$.

8. На бумагу записывают подряд числа от 1 до n . Затем стирают все числа, заканчивающиеся на 4 и 9, а между остальными записывают поочерёдно знаки $-$ и $+$. В заключение после каждого знака $-$ записывают открывающую скобку, а в конец всего выражения записывают соответствующее количество

закрывающих скобок: $1-(2+3-(5+6-(7+8-(10+\dots))))$. Найдите все числа n , при которых значение этого выражения равно 13.

ЯГубов.РФ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 23.02.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Найдите все такие пары простых чисел p и q , что значение выражения $p^2+5pq+4q^2$ является квадратом целого числа.
2. Имеется палочка единичной длины. От палочки отламывается кусок длины r , а оставшаяся часть разламывается на три кусочка, длины которых не больше r . Оказалось, что ни из каких трех из четырёх получившихся кусков нельзя сложить треугольник. При каком наименьшем r такое возможно?
3. Какое наименьшее количество полосок 1×100 можно вырезать из доски 200×200 так, чтобы из остатка нельзя было вырезать ещё одну такую полоску?
4. Тарик и Султан играют в следующую игру. Тарик загадывает число, большее 100. Султан называет натуральное число s , большее 1. Если число Тарика делится на s , то Султан выиграл. В противном случае Тарик уменьшает свое число на s . Затем Султан называет новое число и т.д.. Султан не может называть число, которое он называл ранее. Если число Тарика становится отрицательным, то он выиграл. Кто из игроков победит при правильной игре?
5. У Маши есть шарики 47 цветов по 5 шариков каждого цвета. Она разложила их в 30 коробочек. Может ли оказаться так, что для любой пары коробочек найдется такой цвет, что в каждой из коробочек пары есть шарик этого цвета?
6. В ряд выписаны 2^n натуральных чисел, среди которых не более n различных. Докажите, что можно найти несколько чисел, выписанных подряд, произведение которых — точный квадрат.
7. вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют условиям $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4$ и $ab+cd = 1$. Докажите, что какие-то два из них отличаются не менее чем на 1, а какие-то два из них отличаются не более чем на 1.
8. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL , LM — медиана треугольника ALB , а LH — высота треугольника BLC . Известно, что $3\angle CAB = 180^\circ + \angle ACB$. Докажите, что $ML+BL/2 \geq AH$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 23.02.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Решите в натуральных числах уравнение $m!+n! = 5^k$. (Как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n . Например, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.)
2. Имеется палочка единичной длины. От палочки отламывается кусок длины r , а оставшаяся часть разламывается на три кусочка, длины которых не больше r . Оказалось, что ни из каких трех из четырёх получившихся кусков нельзя сложить треугольник. При каком наименьшем r такое возможно?
3. Какое наименьшее количество прямоугольников 1×50 можно вырезать по клеточкам из доски 100×100 таким образом, чтобы из остатка нельзя было бы вырезать по клеточкам прямоугольник 1×51 ?
4. Тарик и Султан играют в следующую игру. Тарик загадывает число, большее 100. Султан называет натуральное число s , большее 1. Если число Тарика делится на s , то Султан выиграл. В противном случае Тарик уменьшает свое число на s . Затем Султан называет новое число и т.д.. Султан не может называть число, которое он называл ранее. Если число Тарика становится отрицательным, то он выиграл. Кто из игроков победит при правильной игре?
5. У Маши есть шарики 47 цветов по 5 шариков каждого цвета. Она разложила их в 30 коробочек. Может ли оказаться так, что для любой пары коробочек найдется такой цвет, что в каждой из коробочек пары есть шарик этого цвета?
6. В ряд выписаны 100 букв, среди которых не более шести различных. Докажите, что можно найти несколько букв, выписанных подряд, среди которых каждая буква встречается чётное число раз.
7. вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют условиям $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4$ и $ab+cd = 1$. Докажите, что какие-то два из них отличаются не менее чем на 1, а какие-то два из них отличаются не более чем на 1.
8. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL , LM — медиана треугольника ALB , а LH — высота треугольника BLC . Известно, что $3\angle CAB = 180^\circ + \angle ACB$. Докажите, что $ML + BL/2 \geq AH$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 23.02.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Решите в натуральных числах уравнение $m! + n! = 5^k$. (Как обычно, $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n . Например, $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.)
6. Имеется палочка единичной длины. От палочки отламывается кусок длины r , а оставшаяся часть разламывается на три кусочка, длины которых не больше r . Оказалось, что ни из каких трех из четырёх получившихся кусков нельзя сложить треугольник. При каком наименьшем r такое возможно?
3. Из квадрата 100×100 по клеточкам вырезали 101 прямоугольник 1×50 . Всегда ли из оставшейся части можно вырезать ещё хотя бы один?
4. Петя и Вася играют в игру на доске 9×9 . Они по очереди ставят фишки на свободные клетки этой доски. Первую фишку Петя ставит куда угодно, а каждая из остальных фишек должна быть соседней по стороне ровно с одной из уже поставленных фишек. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?
5. 96 шариков пронумерованы $1, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, 32, 32, 32$ и разбросаны в 14 коробок таким образом, что в каждой коробочке шарики с разными номерами. Докажите, что можно выбрать две коробки таким образом, чтобы на всех шариках в этих коробках были бы написаны разные номера.
6. По кругу расставлено 11 натуральных чисел. Может ли случиться так, что каждое из этих чисел, кроме самого большого, равно разности своих соседей?
7. К произведению цифр двузначного натурального числа прибавили его сумму цифр и получили само это число. Найдите все такие числа.
8. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL . LH — высота треугольника BLC . Известно, что $3\angle CAB = 180^\circ + \angle ACB$. Докажите, что $AB \geq LH$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 23.02.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. К произведению цифр натурального числа прибавили его сумму цифр и получили само это число. Найдите все такие числа.
2. По кругу расставлено 11 натуральных чисел. Может ли случиться так, что каждое из этих чисел, кроме самого большого, равно разности своих соседей?
3. Петя и Вася играют в игру на шахматной доске 8×8 . Они по очереди ставят фишки на свободные клетки этой доски. Первую фишку Петя ставит куда угодно, а каждая из остальных фишек должна быть соседней по стороне ровно с одной из уже поставленных фишек. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?
4. Рассмотрим все 80-значные натуральные числа, в записи которых все цифры от 0 до 7 встречаются по 10 раз, а никакие две цифры одной чётности не стоят рядом. Докажите, что сумма любых двух таких чисел — составное число.
5. 96 шариков пронумерованы $1, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, 32, 32, 32$ и разбросаны в 14 коробок таким образом, что в каждой коробочке шарики с разными номерами. Докажите, что можно выбрать две коробки таким образом, чтобы на всех шариках в этих коробках были бы написаны разные номера.
6. Имеется палочка единичной длины. От палочки отламывается кусок длины r , а оставшаяся часть разламывается на три кусочка, длины которых не больше r . Оказалось, что ни из каких трех из четырех полученных кусков нельзя сложить треугольник. При каком наименьшем r такое возможно? (Из трёх палочек можно составить треугольник тогда и только тогда, когда сумма длин любых двух из этих палочек больше длины третьей.)
7. Из квадрата 100×100 по клеточкам вырезали 101 прямоугольник 1×50 . Всегда ли из оставшейся части можно вырезать ещё хотя бы один?
8. В ряд выписаны 2^{10} букв, среди которых не более десяти различных. Докажите, что можно найти несколько букв, выписанных подряд, среди которых каждая буква встречается чётное число раз.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 23.02.2015

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. К произведению цифр двузначного натурального числа прибавили его сумму цифр и получили само это число. Найдите все такие числа.
2. По кругу расставлено 11 натуральных чисел. Может ли случиться так, что каждое из этих чисел, кроме самого большого, равно разности своих соседей?
3. Петя и Вася играют в игру на шахматной доске 8×8 . Они по очереди ставят фишки на свободные клетки этой доски. Первую фишку Петя ставит куда угодно, а каждая из остальных фишек должна быть соседней по стороне ровно с одной из уже поставленных фишек. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?
4. Рассмотрим все 80-значные числа, в записи которых все цифры от 0 до 7 встречаются по 10 раз, а никакие две цифры одной чётности не стоят рядом. Докажите, что сумма любых двух таких чисел — составное число.
5. 96 шариков пронумерованы $1, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, 32, 32, 32$ и разбросаны в 14 коробок таким образом, что в каждой коробочке шарики с разными номерами. Докажите, что можно выбрать две коробки таким образом, чтобы на всех шариках в этих коробках были бы написаны разные номера.
6. Имеется палочка единичной длины. От палочки отламывается кусок длины r , а оставшаяся часть разламывается на три кусочка, длины которых не больше r . Оказалось, что ни из каких трех из четырёх получившихся кусков нельзя сложить треугольник. При каком наименьшем r такое возможно? (Из трёх палочек можно составить треугольник тогда и только тогда, когда сумма длин любых двух из этих палочек больше длины третьей.)
7. Какое наименьшее количество прямоугольников 1×50 можно вырезать по клеточкам из доски 100×100 таким образом, чтобы из остатка нельзя было вырезать по клеточкам прямоугольник 1×51 ?
8. В ряд выписаны 100 букв, среди которых не более шести различных. Докажите, что можно найти несколько букв, выписанных подряд, среди которых каждая буква встречается чётное число раз.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 23.02.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. К произведению цифр двузначного натурального числа прибавили его сумму цифр и получили само это число. Найдите все такие числа.
2. По кругу расставлено 11 натуральных чисел. Может ли случиться так, что каждое из этих чисел, кроме самого большого, равно разности своих соседей?
3. Петя и Вася играют в игру на шахматной доске 9×9 . Они по очереди ставят фишки на свободные клетки этой доски. Первую фишку Петя ставит куда угодно, а каждая из остальных фишек должна быть соседней по стороне ровно с одной из уже поставленных фишек. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?
4. Рассмотрим все 60-значные числа, в записи которых все цифры от 0 до 5 встречаются по 10 раз. Докажите, что ни одно из таких чисел не делится на другое.
5. 33 шарика пронумерованы 1, 1, 1, 2, 2, 2, ..., 11, 11, 11 и разбросаны в 9 коробок таким образом, что в каждой коробочке шарiki разных цветов. Докажите, что можно выбрать две коробки таким образом, чтобы на всех шариках в этих коробках были бы написаны разные номера.
6. Имеется 4 отрезка. Самый короткий имеет длину 1, следующий – длину 1,5. Известно, что ни из каких трёх нельзя составить треугольник. Какая наименьшая возможная сумма длин двух самых длинных отрезков? (Из трёх отрезков можно составить треугольник тогда и только тогда, когда сумма длин любых двух из этих отрезков больше длины третьего.)
7. Какое наименьшее количество прямоугольников 1×50 можно вырезать по клеточкам из доски 100×100 таким образом, чтобы из остатка нельзя было вырезать по клеточкам прямоугольник 1×51 ?
8. Клетчатая доска 10×10 замощена фигурками вида  и  (фигурки можно поворачивать и переворачивать). Какое наибольшее количество фигурок  могло быть использовано?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 25.02.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Числа x и y — натуральные. Число $x^2 - 4y + 1$ делится на $(x-2y)(1-2y)$. Докажите, что $|x-2y|$ — точный квадрат.
2. В чемпионате по футболу участвовали десять команд. Каждые две команды сыграли между собой один матч. За победу в матче команде присуждалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В сумме все команды набрали в чемпионате 119 очков. Докажите, что была команда, сыгравшая вничью не менее 4 раз.
3. В каждом из 120 мешков лежит по 100 монет: в одном мешке фальшивые, весом по 9 г, а в остальных — настоящие, весом по 10 г. В нашем распоряжении весы, показывающие вес груза в граммах. Класть на весы можно не более 100 монет. Какого наименьшего количества взвешиваний заведомо хватит, чтобы определить мешок с фальшивыми монетами?
4. При каких натуральных n существуют $2n$ различных натуральных чисел таких, что сумма первых n равна сумме остальных, а произведение первых n равно произведению остальных чисел?
5. На доске написаны $n \geq 4$ натуральных чисел. Разрешается стереть любые два числа a и b , ни одно из которых не делится на другое, и вместо них написать их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Докажите, что таких операций удастся сделать не более n^2 .
6. Точки D, E, F лежат на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC соответственно. Точки X, Y, Z — середины отрезков EF, FD и DE соответственно. Точки P, Q и R симметричны точкам X, Y и Z относительно вершин A, B и C соответственно. Докажите, что $S_{PQR} = 3S_{ABC} + S_{XYZ}$.
7. В треугольнике ABC $\angle A = 110^\circ$, $\angle C = 50^\circ$, AH — высота, CL — биссектриса. Биссектриса угла LAN пересекает LH в точке M . Найдите $\angle AMB$.
8. Найдите все тройки вещественных чисел x, y, z , для которых $x(y^2 + 2z^2) = y(z^2 + 2x^2) = z(x^2 + 2y^2)$ и $xyz = 8$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 25.02.2015**СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА**

$$\frac{m}{n} + n + \frac{1}{m} = 3$$

1. Решите в целых числах уравнение $\frac{m}{n} + n + \frac{1}{m} = 3$.

2. В чемпионате по футболу участвовали десять команд. Каждые две команды сыграли между собой один матч. За победу в матче команде присуждалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В сумме все команды набрали в чемпионате 119 очков. Докажите, что была команда, сыгравшая вничью не менее 4 раз.

3. В каждом из 120 мешков лежит по 100 монет: в одном мешке фальшивые, весом по 9 г, а в остальных — настоящие, весом по 10 г. В нашем распоряжении весы, показывающие вес груза в граммах. Класть на весы можно не более 100 монет. Какого наименьшего количества взвешиваний заведомо хватит, чтобы определить мешок с фальшивыми монетами?

4. При каких натуральных n существуют $2n$ различных натуральных чисел таких, что сумма первых n равна сумме остальных, а произведение первых n равно произведению остальных чисел?

5. На доске написаны $n \geq 4$ натуральных чисел. Разрешается стереть любые два числа a и b , ни одно из которых не делится на другое, и вместо них написать их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Докажите, что таких операций удастся сделать не более n^2 .

6. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D . Точка E — середина отрезка BD , точки P и Q симметричны точке E относительно вершин A и C соответственно. Найдите площадь треугольника BPQ , если площадь треугольника ABC равна 7.

7. В треугольнике ABC $\angle A = 110^\circ$, $\angle C = 50^\circ$, AN — высота, CL — биссектриса. Биссектриса угла LAN пересекает LH в точке M . Найдите $\angle AMB$.

8. Найдите все тройки вещественных чисел x , y , z , для которых $x(y^2+2z^2) = y(z^2+2x^2) = z(x^2+2y^2)$ и $xyz = 8$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 25.02.2015**СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА**

$$\frac{m}{n} + n + \frac{1}{m} = 3$$

1. Решите в целых числах уравнение $\frac{m}{n} + n + \frac{1}{m} = 3$.

2. В чемпионате по футболу участвовали десять команд. Каждые две команды сыграли между собой один матч. За победу в матче команде присуждалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В сумме все команды набрали в чемпионате 119 очков. Докажите, что была команда, сыгравшая вничью не менее 4 раз.

3. В каждом из 60 мешков лежит по 20 монет: в одном мешке фальшивые, весом по 9 г, а в остальных — настоящие, весом по 10 г. В нашем распоряжении весы, показывающие вес груза в граммах. Класть на весы можно не более 100 монет. Как за два взвешивания на этих весах определить, в каком мешке фальшивые монеты?

4. Существуют ли 200 различных натуральных чисел таких, что сумма первых ста равна сумме остальных, а произведение первых ста равно произведению остальных чисел?

5. На доске написаны $n \geq 4$ натуральных чисел. Разрешается стереть любые два числа a и b , ни одно из которых не делится на другое, и вместо них написать их наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Докажите, что таких операций удастся сделать не более $(n-1)!$.

6. На стороне AC треугольника ABC отметили точку D . Точка E — середина отрезка BD , точки P и Q симметричны точке E относительно вершин A и C соответственно. Найдите площадь треугольника BPQ , если площадь треугольника ABC равна 7.

7. В треугольнике ABC $\angle A = 110^\circ$, $\angle C = 50^\circ$, AH — высота, CL — биссектриса. Найдите $\angle LHB$.

8. Найдите все тройки вещественных чисел x , y , z , для которых $x(y^2+2z^2) = y(z^2+2x^2) = z(x^2+2y^2)$ и $xyz = 8$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 25.02.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Решите в простых числах уравнение $p^{2q} + q^{2p} + 4 = r$.
2. Несколько учеников участвуют в чемпионате школы по игре «в Чапаева». Чемпионат проводится по следующей схеме. В каждом туре выбирают двух игроков. Проигравший выбывает, а победитель получает два очка, если у соперника было больше очков, одно, если столько же, и ноль, если меньше. Ничьих не бывает. По окончании турнира оказалось, что победитель набрал 10 очков. Какое наименьшее количество школьников могло участвовать в турнире?
3. На доске написано натуральное число. Каждую минуту с ним проделывают следующую операцию: если на доске написано число $a_1 a_2 a_3 \text{ К } a_{n-1} a_n$, то вместо него пишут число $a_1 a_2 a_3 \text{ К } a_{n-1} + 4a_n$ (если число однозначное, то его просто умножают на 4). В какой-то момент на доске оказалось число 2015. Докажите, что перед этим все числа на доске были составными.
4. На доске 10×10 закрасили несколько клеток таким образом, что в любой фигуре, состоящей из трёх клеток, расположенных «углом», есть хотя бы одна незакрашенная клетка. Докажите, что доску можно так разрезать на прямоугольники 1×2 , чтобы в каждом прямоугольнике была незакрашенная клетка.
5. По кругу расставлено 100 шариков: 50 белых и 50 черных. Шарик каждого цвета пронумерованы числами от 1 до 50. Изначально шарик черного и белого цвета чередуются. Двое играют в игру по следующим правилам. За ход можно поменять местами два разноцветных шарика (не обязательно стоящих рядом), если эти шарик не менялись друг с другом раньше. Запрещается ставить подряд три шарика одного цвета. Игрок, не имеющий хода, проигрывает. Игроки ходят по очереди. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?
6. В каждом из 70 мешков лежит по 100 монет: в одном мешке фальшивые, весом по 7 г, а в остальных — настоящие, весом по 8 г. В нашем распоряжении весы, показывающие вес груза в граммах. Класть на весы можно не более 125 монет. За какое наименьшее количество взвешиваний на этих весах можно определить, в каком мешке фальшивые монеты?
7. вещественные числа a, b, c и d удовлетворяют условиям $a+c = b+d = 1$. Докажите неравенство $a^2 b + c^2 d \geq bd$.

8. Дан прямоугольник $ABCD$. Биссектриса угла ABC пересекает сторону CD в точке K , а продолжение стороны AD в точке L . В треугольнике DKL проведена биссектриса DM . Отрезки AM и CD пересекаются в точке N . Прямая CM пересекает отрезок DL в точке P . Докажите, что $DP=KN$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 25.02.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Решите в простых числах уравнение $p^{2q} + q^{2p} + 4 = r$.
2. Несколько учеников участвуют в чемпионате школы по игре «в Чапаева». Чемпионат проводится по следующей схеме. В каждом туре выбирают двух игроков. Проигравший выбывает, а победитель получает два очка, если у соперника было больше очков, одно, если столько же, и ноль, если меньше. Ничьих не бывает. По окончании турнира оказалось, что победитель набрал 10 очков. Какое наименьшее количество школьников могло участвовать в турнире?
3. Даны натуральные числа a , k и n . Известно, что при некотором натуральном n число a^n делится на k . Докажите, что a^k делится на k .
4. На доске 10×10 закрасили несколько клеток таким образом, что в любой фигуре, состоящей из трёх клеток, расположенных «углом», есть хотя бы одна незакрашенная клетка. Докажите, что доску можно так разрезать на прямоугольники 1×2 , чтобы в каждом прямоугольнике была незакрашенная клетка.
5. По кругу расставлено 250 шариков: 125 белых и 125 черных. Шарiki каждого цвета пронумерованы числами от 1 до 125. Изначально шарiki черного и белого цвета чередуются. Двое играют в игру по следующим правилам. За ход можно поменять местами два соседних шарика, если они разных цветов и не менялись друг с другом раньше. Запрещается ставить подряд три шарика одного цвета. Игрок, не имеющий хода, проигрывает. Игроки ходят по очереди. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?
6. В каждом из 60 мешков лежит по 20 монет: в одном мешке фальшивые, весом по 9 г, а в остальных — настоящие, весом по 10 г. В нашем распоряжении весы, показывающие вес груза в граммах. Класть на весы можно не более 100 монет. Как за два взвешивания на этих весах определить, в каком мешке фальшивые монеты?
7. вещественные числа a , b , c и d удовлетворяют условиям $a+c = b+d = 1$. Докажите неравенство $a^2b + c^2d \geq bd$.
8. Дан прямоугольник $ABCD$. Биссектриса угла ABC пересекает сторону CD в точке K , а продолжение стороны AD в точке L . В треугольнике DKL проведена биссектриса DM . Отрезки AM и CD пересекаются в точке N . Прямая CM пересекает отрезок DL в точке P . Докажите, что $DP = KN$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 25.02.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Решите в простых числах уравнение $p^{2q} + q^{2p} + 4 = r$.
2. В чемпионате по футболу участвовали десять команд. Каждые две команды сыграли между собой один матч. За победу в матче команде присуждалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В сумме все команды набрали в чемпионате 119 очков. Докажите, что была команда, сыгравшая вничью не менее 4 раз.
3. Существуют ли 8 различных натуральных чисел таких, что сумма первых четырёх равна сумме остальных, а произведение первых четырёх равно произведению остальных чисел?
4. На доске 10×10 закрасили несколько клеток таким образом, что в любой фигуре, состоящей из трёх клеток, расположенных «углом», есть хотя бы одна незакрашенная клетка. Докажите, что доску можно так разрезать на прямоугольники 1×2 , чтобы в каждом прямоугольнике была незакрашенная клетка.
5. По кругу расставлено 100 шариков: 50 белых и 50 черных. Шарик каждого цвета пронумерованы числами от 1 до 50. Изначально шарик черного и белого цвета чередуются. Двое играют в игру по следующим правилам. За ход можно поменять местами два соседних шарика, если они разных цветов и не менялись друг с другом раньше. Запрещается ставить подряд три шарика одного цвета. Игрок, не имеющий хода, проигрывает. Игроки ходят по очереди. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?
6. В каждом из 60 мешков лежит по 20 монет: в одном мешке фальшивые, весом по 9 г, а в остальных — настоящие, весом по 10 г. В нашем распоряжении весы, показывающие вес груза в граммах. Класть на весы можно не более 100 монет. Как за два взвешивания на этих весах определить, в каком мешке фальшивые монеты?
7. Аня написала на доске 2015 натуральных чисел, причем среднее арифметическое любых трех из них тоже написано на доске. Докажите, что все числа на доске равны.
8. В прямоугольнике $ABCD$. биссектриса угла ABC пересекает сторону CD в точке K , а продолжение стороны AD в точке L . В треугольнике DKL проведена биссектриса DM . Найдите угол MCA .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 25.02.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Существуют ли 60 различных натуральных чисел таких, что сумма первых 30 равна сумме остальных, а произведение первых 30 равно произведению остальных чисел?
2. Правила *интересной* игры в крестики-нолики следующие. По окружности, чередуясь, расположены 49 фишек в форме крестиков и 49 фишек в форме ноликов. За ход разрешается поменять местами крестик и нолик (не обязательно соседние), если только соответствующие фишки еще не менялись друг с другом местами. Если после хода игрока образовалось три одинаковых знака подряд, то он проиграл. Также проигрывает игрок, не имеющий хода. Петя и Вася играют в *интересные* крестики-нолики, Петя начинает. Кто выигрывает при правильной игре?
3. На доске 10×10 закрасили несколько клеток таким образом, что в любой фигуре, состоящей из трёх клеток, расположенных «углом», есть хотя бы одна незакрашенная клетка. Докажите, что доску можно разрезать на «доминошки» из двух клеток таким образом, чтобы в каждой доминошке была незакрашенная клетка.
4. В чемпионате по футболу участвовали десять команд. Каждые две команды сыграли между собой один матч. За победу в матче команде присуждалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В сумме все команды набрали в чемпионате 119 очков. Докажите, что была команда, сыгравшая вничью не менее 4 раз.
5. Найдите такое натуральное число n , что для любого 100-значного числа k сумма цифр числа kn равна сумме цифр числа n .
6. На доске написано натуральное число. Каждую минуту с ним проделывают следующую операцию: если на доске написано число $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n}$, то вместо него пишут число $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} + 4a_n}$ (если число однозначное, то его просто умножают на 4). В какой-то момент на доске оказалось число 2015. Докажите, что перед этим все числа на доске были составными.
7. Аня написала на доске 2015 натуральных чисел, причем если сумму любых трех из них разделить на три, то полученное число тоже окажется написанным на доске. Докажите, что все числа на доске равны.
8. В каждом из 60 мешков лежит по 20 монет: в одном мешке фальшивые, весом по 9 г, а в остальных — настоящие, весом по 10 г. В нашем распоряжении весы, показывающие вес груза в граммах. Класть на весы

можно не более 100 монет. Как за два взвешивания на этих весах определить, в каком мешке фальшивые монеты?

ЯГубов.РФ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 25.02.2015

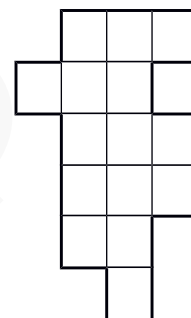
ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Существуют ли 60 различных натуральных чисел таких, что сумма первых 30 равна сумме остальных, а произведение первых 30 равно произведению остальных чисел?
2. В куче 2015 камней. За один ход можно взять из кучи от 1 до 10 камней, но не больше того, что соперник взял на предыдущем ходу. Кто вынужден взять последний камень, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?
3. На доске 10×10 закрасили несколько клеток таким образом, что в любой фигуре, состоящей из трёх клеток, расположенных «углом», есть хотя бы одна незакрашенная клетка. Докажите, что доску можно разрезать на «доминошки» из двух клеток таким образом, чтобы в каждой доминошке была незакрашенная клетка.
4. В чемпионате по футболу участвовали десять команд. Каждые две команды сыграли между собой один матч. За победу в матче команде присуждалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В сумме все команды набрали в чемпионате 119 очков. Докажите, что была команда, сыгравшая вничью не менее 4 раз.
5. Найдите такое натуральное число n , что для любого десятизначного числа k сумма цифр числа kn равна сумме цифр числа n .
6. Даны четырёхзначные числа БАКУ и КУБА (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые) причём Б больше, чем К. Какое наименьшее значение может иметь разность БАКУ–КУБА?
7. Аня написала на доске 2015 натуральных чисел, причем если сумму любых трех из них разделить на три, то полученное число тоже окажется написанным на доске. Докажите, что все числа на доске равны.
8. В каждом из 60 мешков лежит по 20 монет: в одном мешке фальшивые, весом по 9 г, а в остальных — настоящие, весом по 10 г. В нашем распоряжении весы, показывающие вес груза в граммах. Класть на весы можно не более 100 монет. Как за два взвешивания на этих весах определить, в каком мешке фальшивые монеты?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 25.02.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Существуют ли 6 различных натуральных чисел таких, что сумма первых трёх равна сумме остальных, а произведение первых трёх равно произведению остальных чисел?
2. В куче 2015 камней. За один ход можно взять из кучи 1 или 2 камня, но не больше того, что соперник взял на предыдущем ходу. Кто вынужден взять последний камень, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?
3. Можно ли вырезать из фигурки справа одну клетку, после чего разрезать её по линиям сетки на две равные части?
4. В чемпионате по футболу участвовали десять команд. Каждые две команды сыграли между собой один матч. За победу в матче команде присуждалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В сумме все команды набрали в чемпионате 119 очков. Докажите, что была команда, сыгравшая вничью не менее 4 раз.
5. Найдите наименьшее натуральное число N , которое при умножении на любое двузначное число даёт результат, сумма цифр которого такая же, как у N .
6. Даны четырёхзначные числа БАКУ и КУБА (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые) причём Б больше, чем К. Какое наименьшее значение может иметь разность БАКУ–КУБА?
7. Аня написала на доске 2015 натуральных чисел, причем если сумму любых трех из них разделить на три, то полученное число тоже окажется написанным на доске. Докажите, что все числа на доске равны.
8. В каждом из 60 мешков лежит по 20 монет: в одном мешке фальшивые, весом по 9 г, а в остальных — настоящие, весом по 10 г. В нашем распоряжении весы, показывающие вес груза в граммах. Класть на весы можно не более 100 монет. Как за два взвешивания на этих весах определить, в каком мешке фальшивые монеты?



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 26.02.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Докажите, что для бесконечно многих пар (a, b) натуральных чисел $a \neq b$, $a, b > 1$ и $a^a + b$ кратно $b^b + a$.

2. Периметр выпуклого четырёхугольника P окрашен в красный цвет. Требуется разрезать P на 4 многоугольника и сложить из них многоугольник, равный P , но не имеющий красных отрезков на границе (красные точки допускаются). Всегда ли это можно сделать?

3. Даны положительные числа x, y, z . Докажите неравенство

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq m^2,$$

$$m = \min \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right).$$

где

4. В стране 36 городов. Каждые два из них соединены (двусторонним) рейсом одной из пяти авиакомпаний. Упорядоченную тройку городов A, B, C назовём *правильной*, если между A и B и между B и C летает одна и та же авиакомпания. Какое наименьшее количество правильных троек городов может быть в этой стране?

5. По точкам плоскости с целыми координатами прыгает блоха. Может ли оказаться, что блоха посетит каждую точку с целыми координатами ровно один раз, а длины всех её прыжков — целые и различные?

6. В ящике лежат игрушечные котики. Голова каждого котика покрашена в один из 2015 цветов. Хвост каждого котика тоже покрашен в один из этих 2015 цветов — возможно, в тот же, что и голова, а возможно, и в другой. Набор из 2015 котиков называется *правильным*, если все их головы разного цвета и все хвосты тоже разного цвета. Известно, что в ящике можно выбрать правильный набор котиков более чем одним способом. Докажите, что можно оставить в ящике несколько котиков (возможно, всех) так, что из них правильный набор удастся выбрать ровно двумя способами.

7. Через вершину X прямого угла прямоугольного треугольника XYZ проводится переменная прямая d . Точки U и V — проекции на d точек Y и Z соответственно. Перпендикуляр к XU , проведенный через точку U , и перпендикуляр к XV , проведенный через точку V , пересекаются в точке W . Найдите геометрическое место точек W .

8. Найдите все натуральные k и m такие, что $(1+2+\dots+n)^k = 1^m + 2^m + \dots + n^m$ при всех натуральных n .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 26.02.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Сколько существует натуральных чисел вида $\overline{abcdabcd}$, которые кратны 18769?

2. Периметр выпуклого четырёхугольника P окрашен в красный цвет. Требуется разрезать P на 4 многоугольника и сложить из них многоугольник, равный P , но не имеющий красных отрезков на границе (красные точки допускаются). Всегда ли это можно сделать?

3. Даны положительные числа x, y, z . Докажите неравенство

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 + \frac{(x - y)^2}{x^2 + y^2} + \frac{(y - z)^2}{y^2 + z^2} + \frac{(z - x)^2}{z^2 + x^2},$$

$$m = \min \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}, \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \right),$$

где

4. В стране 36 городов. Каждые два из них соединены (двусторонним) рейсом одной из пяти авиакомпаний. Упорядоченную тройку городов A, B, C назовём *правильной*, если между A и B и между B и C летает одна и та же авиакомпания. Какое наименьшее количество правильных троек городов может быть в этой стране?

5. По точкам плоскости с целыми координатами прыгает блоха. Может ли оказаться, что блоха посетит каждую точку с целыми координатами ровно один раз, а длины всех её прыжков — целые и различные?

6. На 99 картах написали числа от 1 до 99 (каждое число написано ровно на одной карте). Карты положили на стол числами вниз в каком-то порядке. Вася может выбрать любое простое число $p < 99$ и указать любой набор из p карт. После этого Васе сообщают, делится ли сумма указанных чисел на p . Как Васе точно определить хотя бы одно из чисел, написанных на картах?

7. Через вершину X прямого угла прямоугольного треугольника XYZ проводится переменная прямая d . Точки U и V — проекции на d точек Y и Z соответственно. Перпендикуляр к XU , проведенный через точку U , и перпендикуляр к XV , проведенный через точку V , пересекаются в точке W . Найдите геометрическое место точек W .

8. Найдите все натуральные k и m такие, что $(1+2+\dots+n)^k = 1^m + 2^m + \dots + n^m$ при всех натуральных n .

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 26.02.2015

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Сколько существует натуральных чисел вида $\overline{abcdabcd}$, которые кратны 18769?
2. Периметр треугольника P окрашен в красный цвет. Требуется разрезать P на 4 многоугольника и сложить из них многоугольник, равный P , но не имеющий красных отрезков на границе (красные точки допускаются). Всегда ли это можно сделать?
3. Положительные числа x и y удовлетворяют условию $y(y+1) \leq (x+1)^2$. Докажите неравенство $y(y-1) \leq x^2$.
4. Клетки доски 100×100 покрашены в желтый и зеленый цвета так, что никакие три последовательные клетки в любой строке, столбце и на диагонали не могут быть одного цвета. Докажите, что в любом квадрате 3×3 ровно две угловые клетки — желтые.
5. На клетчатой плоскости отмечены $4n^2$ узлов, образующие квадрат размером $(2n-1) \times (2n-1)$. Аня и Боря по очереди красят по одному узлу в красный цвет так, чтобы после каждого хода, начиная с третьего, все красные узлы были вершинами выпуклого многоугольника. Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?
6. На 99 картах написали числа от 1 до 99 (каждое число написано ровно на одной карте). Карты положили на стол числами вниз в каком-то порядке. Вася может выбрать любое простое число $p < 99$ и указать любой набор из p карт. После этого Васе сообщают, делится ли сумма указанных чисел на p . Как Васе точно определить хотя бы одно из чисел, написанных на картах?
7. Через вершину X прямого угла прямоугольного треугольника XYZ проводится переменная прямая d . Точки U и V — проекции на d точек Y и Z соответственно. Перпендикуляр к XU , проведенный через точку U , и перпендикуляр к XZ , проведенный через точку V , пересекаются в точке W . Найдите геометрическое место точек W .
8. Найдите все натуральные k и m такие, что $1^m + 2^m + 3^m = 6^k$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 26.02.2015**МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА**

1. На закрытии турнира девушка-яблонька и 100 девушек-яблочек хотят как можно дольше развлекать зрителей. Изначально 49 яблочек вращаются против часовой стрелки, а все остальные, включая яблоньку, вращаются по часовой стрелке. Каждую минуту яблонька сталкивается с какими-то двумя яблочками, и все три начинают вращаться в противоположную сторону. Танец заканчивается, как только повторилось количество девушек, вращающихся по часовой стрелке. Как долго будет длиться танец?
2. Простые числа p , q и r удовлетворяют соотношению $p+q+1 = r^2$. Докажите, что $pq+34$ — составное.
3. Петя пишет на доске 1000 натуральных чисел. Вася может после этого многократно проделывать следующую операцию: брать два написанных числа, стирать их, а вместо этого записывать на доску их разность или произведение. Так Вася делает до тех пор, пока не останется одно число. Докажите, что Вася может действовать так, что оставшееся число будет делиться на 2^{3000} .
4. На 99 картах написали числа от 1 до 99 (каждое число написано ровно на одной карте). Карты положили на стол числами вниз в каком-то порядке. Вася может выбрать любое простое число $p < 99$ и указать любой набор из p карт. После этого Васе сообщают, делится ли сумма указанных чисел на p . Как Васе точно определить хотя бы одно из чисел, написанных на картах?
5. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 999. Петя и Вася играют, начинает Петя. Каждым ходом надо стереть пять чисел с суммой 2500. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?
6. В ящике лежат игрушечные котик. Голова каждого котика покрашена в один из 2015 цветов. Хвост каждого котика тоже покрашен в один из этих 2015 цветов — возможно, в тот же, что и голова, а возможно, и в другой. Набор из 2015 котиков называется *правильным*, если все их головы разного цвета и все хвосты тоже разного цвета. Известно, что в ящике можно выбрать правильный набор котиков более чем одним способом. Докажите, что можно оставить в ящике несколько котиков (возможно, всех) так, что из них правильный набор удастся выбрать ровно двумя способами.
7. Положительные числа x и y удовлетворяют условию $y(y+1) \leq (x+1)^2$. Докажите неравенство $y(y-1) \leq x^2$.
8. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбраны точки D и E , а на отрезке CE — точка F так, что

$\angle ACD = \angle BCE = \angle ABF = \angle BAC - \angle ABC$. Оказалось, что $\angle BFD = \angle BAC$.
Докажите, что $AF = BE$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 26.02.2015**МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА**

1. На закрытии турнира девушка–яблонька и 99 девушек–яблочек хотят как можно дольше развлекать зрителей. Изначально 49 яблочек вращаются против часовой стрелки, а все остальные, включая яблоньку, вращаются по часовой стрелке. Каждую минуту яблонька сталкивается с какими–то двумя яблочками, и все три начинают вращаться в противоположную сторону. Танец заканчивается, как только повторилось количество девушек, вращающихся по часовой стрелке. Как долго будет длиться танец?
2. Простые числа p , q и r удовлетворяют соотношению $p+q+1 = r^2$. Докажите, что $pq+34$ — составное.
3. Петя пишет на доске 1000 натуральных чисел. Вася может после этого многократно проделывать следующую операцию: брать два написанных числа, стирать их, а вместо этого записывать на доску их разность или произведение. Так Вася делает до тех пор, пока не останется одно число. Докажите, что Вася может действовать так, что оставшееся число будет делиться на 2^{2000} .
4. Вова хочет покрасить каждое натуральное число в какой-нибудь цвет таким образом, чтобы любые два числа, разность которых — простое число, были покрашены в разные цвета. Каким наименьшим количеством цветов может обойтись Вова?
5. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 100. Петя и Вася играют, начинает Петя. Каждым ходом надо стереть восемь чисел с суммой 404. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?
6. Клетки доски 100×100 покрашены в желтый и зеленый цвета так, что никакие три последовательные клетки в любой строке, столбце и на диагонали не могут быть одного цвета. Докажите, что в любом квадрате 3×3 ровно две угловые клетки — желтые.
7. Положительные числа x и y удовлетворяют условию $y(y+2) \leq (x+2)^2$. Докажите неравенство $y(y-2) \leq x^2$.
8. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана такая точка D , что $\angle ACD = 30^\circ$. А внутри треугольника ABC выбрана такая E , что $\angle CBE = 10^\circ$ и $\angle BED = 70^\circ$. Найдите $\angle BAE$, если известно, что $\angle ABC = 40^\circ$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 26.02.2015

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. На закрытии турнира девушка–яблонька и 9 девушек–яблочек хотят как можно дольше развлекать зрителей. Изначально 4 яблочка вращаются против часовой стрелки, а все остальные, включая яблоньку, вращаются по часовой стрелке. Каждую минуту яблонька сталкивается с какими-то двумя яблочками, и все три начинают вращаться в противоположную сторону. Танец заканчивается, как только повторилось количество девушек, вращающихся по часовой стрелке. Как долго будет длиться танец?
2. В Сумбулистане в ходу только два вида монет — достоинством в 11 тугриков и достоинством в 12 тугриков. Однажды в Сумбулистане 11 грабителей взломали сейф и похитили 594000 тугриков, но им не удалось разделить деньги поровну. Докажите, что все похищенные монетки — одного типа.
3. Петя пишет на доске 100 натуральных чисел. Вася может после этого многократно проделывать следующую операцию: брать два написанных числа, стирать их, а вместо этого записывать на доску их разность или произведение. Так Вася делает до тех пор, пока не останется одно число. Докажите, что Вася может действовать так, что оставшееся число будет делиться на 2^{150} .
4. Вова хочет покрасить каждое натуральное число от 1 до 1000 в какой-нибудь цвет таким образом, чтобы любые два числа, разность которых — простое число, были покрашены в разные цвета. Каким наименьшим количеством цветов может обойтись Вова?
5. На доске написаны числа 12, 13, 14, ..., 210. Петя и Вася играют, начинает Петя. Каждым ходом надо стереть три числа с суммой 333. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?
6. Клетки доски 100×100 покрашены в желтый и зеленый цвета так, что никакие три последовательные клетки в любой строке, столбце и на диагонали не могут быть одного цвета. Докажите, что в любом квадрате 3×3 ровно две угловые клетки — желтые.
7. 18–значное число возрастает при перестановке любой пары его соседних цифр, кроме, быть может, одной пары. Сколько всего таких чисел?
8. На боковой стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана такая точка D , что $\angle ACD = 30^\circ$. А внутри треугольника ABC

выбрана такая E , что $\angle CBE = 10^\circ$ и $\angle BED = 70^\circ$. Найдите $\angle BAE$, если известно, что $\angle ABC = 40^\circ$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 26.02.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Из 27 кубиков составлен куб $3 \times 3 \times 3$. Пронумеруйте кубики числами от 1 до 27 так, чтобы в любом ряду из трёх кубиков, параллельном одному из рёбер куба, номер одного из крайних кубиков равнялся полусумме номеров двух других кубиков.
2. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 100. Петя и Вася играют в игру, ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом надо стереть восемь чисел с суммой 404. Кто не может сделать ход, тот проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?
3. В Сумбулистане в ходу только два вида монет — достоинством в 11 тугриков и достоинством в 12 тугриков. Однажды в Сумбулистане 11 грабителей взломали сейф и похитили 594000 тугриков, но им не удалось разделить деньги поровну. Сколько монеток по 12 тугриков могло быть похищено?
4. Петя пишет на доске 1000 натуральных чисел. Вася может после этого многократно проделывать следующую операцию: брать два написанных числа, стирать их, а вместо этого записывать на доску их разность или произведение. Так Вася делает до тех пор, пока не останется одно число. Докажите, что Вася может действовать так, что оставшееся число будет делиться на 2^{3000} .
5. Каждая клетка квадрата 100×100 окрашена в один из трёх цветов, причём все клетки на границе квадрата окрашены в красный цвет. Квадратик 2×2 называется *хорошим*, если он содержит клетки всех трёх цветов, а также две соседние по стороне одноцветные клетки. Может ли среди всех квадратов 2×2 быть ровно 2015 хороших?
6. На закрытии турнира девушка-яблонька и 100 девушек-яблочек хотят как можно дольше развлекать зрителей. Изначально 49 яблочек вращаются против часовой стрелки, а все остальные, включая яблоньку, вращаются по часовой стрелке. Каждую минуту яблонька сталкивается с какими-то двумя яблочками, и все три начинают вращаться в противоположную сторону. Танец заканчивается, как только повторилось количество девушек, вращающихся по часовой стрелке. Как долго будет длиться танец?
7. В классе 30 учеников. Оказалось, что любые двое учеников из этого класса имеют хотя бы двух общих знакомых одноклассников. Докажите, что в этом классе есть ученик, имеющий не менее 9 знакомых одноклассников.
8. На 99 картах написали числа от 1 до 99 (каждое число написано ровно на одной карте). Карты положили на стол числами вниз в каком-то порядке. Вася может выбрать любое простое число $p < 99$ и указать любой набор из p карт. После этого Васе сообщают, делится ли сумма указанных чисел на p . Как Васе точно определить хотя бы одно из чисел, написанных на картах?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 26.02.2015

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Из 27 кубиков составлен куб $3 \times 3 \times 3$. Пронумеруйте кубики числами от 1 до 27 так, чтобы в любом ряду из трёх кубиков, параллельном одному из рёбер куба, номер одного из крайних кубиков равнялся полусумме номеров двух других кубиков.
2. В Сумбулистане в ходу только два вида монет — достоинством в 11 тугриков и достоинством в 12 тугриков. Однажды в Сумбулистане 11 грабителей взломали сейф и похитили 594000 тугриков, но им не удалось разделить деньги поровну. Докажите, что все похищенные монетки — одного типа.
3. Петя пишет на доске 100 натуральных чисел. Вася может после этого многократно проделывать следующую операцию: брать два написанных числа, стирать их, а вместо этого записывать на доску их разность или произведение. Так Вася делает до тех пор, пока не останется одно число. Докажите, что Вася может действовать так, что оставшееся число будет делиться на 2^{200} .
4. Клетки доски 100×100 покрашены в желтый и зеленый цвета так, что никакие три последовательные клетки в любой строке, столбце и на диагонали не могут быть одного цвета. Докажите, что в любом квадрате 3×3 ровно две угловые клетки — желтые.
5. 18-значное число возрастает при перестановке любой пары его соседних цифр, кроме, быть может, одной пары. Сколько всего таких чисел?
6. На доске написаны числа 12, 13, 14, ..., 210. Петя и Вася играют, начинает Петя. Каждым ходом надо стереть три числа с суммой 333. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?
7. На закрытии турнира девушка-яблонька и 99 девушек-яблочек хотят как можно дольше развлекать зрителей. Изначально 49 яблочек вращаются против часовой стрелки, а все остальные, включая яблоньку, вращаются по часовой стрелке. Каждую минуту яблонька сталкивается с какими-то двумя яблочками, и все три начинают вращаться в противоположную сторону. Танец заканчивается, как только повторилось количество девушек, вращающихся по часовой стрелке. Как долго будет длиться танец?
8. В классе 30 учеников. Оказалось, что любые двое учеников из этого класса имеют хотя бы двух общих знакомых одноклассников. Докажите, что в этом классе есть ученик, имеющий не менее 9 знакомых одноклассников.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 26.02.2015

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Из 27 кубиков составлен куб $3 \times 3 \times 3$. Пронумеруйте кубики числами от 1 до 27 так, чтобы в любом ряду из трёх кубиков, параллельном одному из рёбер куба, номер одного из крайних кубиков равнялся полусумме номеров двух других кубиков.
2. В Сумбулистане в ходу только два вида монет — достоинством в 11 тугриков и достоинством в 12 тугриков. Однажды в Сумбулистане 11 грабителей взломали сейф и похитили 594000 тугриков, но им не удалось разделить деньги поровну. Докажите, что все похищенные монетки — одного типа.
3. Петя пишет на доске три натуральных числа. Вася может после этого дважды проделать следующую операцию: брать два написанных числа, стирать их, а вместо этого записывать на доску их сумму, разность или произведение. Вася хочет, чтобы оставшееся число делилось на возможно большую степень двойки. Какой результат он может гарантированно получить?
4. Клетки бесконечной клетчатой доски покрашены в желтый и зеленый цвета так, что никакие три последовательные клетки в любой строке, столбце и на диагонали не могут быть одного цвета. Докажите, что в любом клетчатом квадрате 3×3 ровно две угловые клетки — желтые.
5. 19-значное число возрастает при перестановке любой пары его соседних цифр, кроме, быть может, одной пары. Сколько всего таких чисел?
6. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 99. Петя и Вася играют, начинает Петя. Каждым ходом надо стереть три числа с суммой 150. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?
7. На закрытии турнира девушка-яблонька и 9 девушек-яблочек хотят как можно дольше развлекать зрителей. Изначально 4 яблочка вращаются против часовой стрелки, а все остальные, включая яблоньку, вращаются по часовой стрелке. Каждую минуту яблонька сталкивается с какими-то двумя яблочками, и все три начинают вращаться в противоположную сторону. Танец заканчивается, как только повторилось количество девушек, вращающихся по часовой стрелке. Как долго будет длиться танец?
8. Назовём *дружным треугольником* троих людей, попарно дружащих друг с другом. В классе среди любых четырёх учеников есть дружный треугольник. Докажите, что одного ученика можно исключить таким образом, чтобы среди оставшихся любые трое образовывали дружный треугольник.