МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.12.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Вещественные числа a, b, c таковы, что $|a–b| \geq |c|$, $|b–c| \geq |a|$, $|c–a| \geq |b|$. Докажите, что одно из этих чисел равно сумме двух других.

2. Муравей ползает по граням куба, переползая с грани на грань через их общее ребро. В некоторый момент оказалось, что на одной грани он побывал 2014 раз, а на остальных — по n раз. При каком наименьшем n такое возможно?

3. Найдите все натуральные $n \geq 2$, для которых число $1/n$ записывается конечной десятичной дробью $\overline{0,a_1a_2...a_k}$, сумма цифр которой $a_1+a_2+...+a_k$ равна n.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, углы BAD и BCD равны, а биссектриса угла ABC проходит через середину отрезка CD. Известно, что $CD = 3AD$. Найдите отношение AB/BC.

5. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. На его сторонах AB и AC выбраны соответственно точки E и F. Прямые BF и CE пересекаются в точке K. Прямая, проведенная через C параллельно AB, и прямая, проведенная через B параллельно CE, пересекаются в точке L. Прямые AM и CL пересекаются в точке N. Докажите, что $KN \parallel FL$.

6. При каких натуральных N рёбра полного графа на N вершинах можно раскрасить в N цветов таким образом, чтобы для любых трёх разных цветов можно было найти три вершины, попарно соединённые рёбрами этих цветов?

7. Петя выписал в ряд все 1008 нечётных чисел, не превосходящих 2015. Вася прибавил к каждому из них одно и то же натуральное число k и тоже выписал на доску получившиеся 1008 чисел. Могло ли при каком-нибудь натуральном k произведение всех 2016 выписанных чисел оказаться квадратом натурального числа?

8. На 27 клетках шахматной доски стоят короли. Докажите, что пять из них можно покрасить в красный цвет, пять — в синий и пять — в зеленый, а остальные 12 убрать с доски так, что одноцветные короли не будут бить друг друга.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.12.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Вещественные числа a, b, c таковы, что $|a-b| \geq |c|$, $|b-c| \geq |a|$, $|c-a| \geq |b|$. Докажите, что одно из этих чисел равно сумме двух других.

2. Муравей ползает по граням куба, переползая с грани на грань через их общее ребро. При этом нельзя переползать через одно и то же ребро два раза подряд. В некоторый момент оказалось, что на одной грани он побывал 2014 раз, а на остальных — по n раз. При каком наименьшем n такое возможно?

3. Решите систему уравнений $2x^2+y^2 = 4$, $2x-2xy = 5$ в вещественных числах.

4. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $\angle CAE = \angle CEA$, $\angle ACB = \angle CED$, $\angle CAD+\angle ECD = 90°$ и $BC = ED$. Докажите, что $AB+BC > AD$.

5. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. На его сторонах AB и AC выбраны соответственно точки E и F. Прямые BF и CE пересекаются в точке K. Прямая, проведенная через C параллельно AB, и прямая, проведенная через B параллельно CE, пересекаются в точке L. Прямые AM и CL пересекаются в точке N. Докажите, что $KN \parallel FL$.

6. На окружности выбрано 100 точек. Можно ли каждый из отрезков, соединяющих эти точки, окрасить в один из 100 данных цветов таким образом, чтобы для любых трёх различных цветов нашёлся треугольник с вершинами в отмеченных точках, стороны которого были бы окрашены в эти три цвета?

7. Петя выписал в ряд все 1008 нечётных чисел, не превосходящих 2015. Вася прибавил к каждому из них одно и то же натуральное число k и тоже выписал на доску получившиеся 1008 чисел. Могло ли при каком-нибудь натуральном k произведение всех 2016 выписанных чисел оказаться квадратом натурального числа?

8. На 27 клетках шахматной доски стоят короли. Докажите, что пять из них можно покрасить в красный цвет, пять — в синий и пять — в зеленый, а остальные 12 убрать с доски так, что одноцветные короли не будут бить друг друга.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.12.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Найдите наименьшую сумму цифр числа вида $3n^2+n+1$, где n — натуральное число.

2. На 27 клетках шахматной доски стоят короли. Докажите, что пять из них можно покрасить в красный цвет, пять — в синий и пять — в зеленый, а остальные 12 убрать с доски так, что одноцветные короли не будут бить друг друга.

3. Докажите, что число $2^{n+2}7^n+1$ при всех натуральных n — составное.

4. Шайка разбойников делила добычу, состоящую из одинаковых монет. Атаман разделил монеты поровну, но 3 монеты оказались лишними, и он забрал их себе. Разбойники рассердились, убили атамана и выбрали нового. Он также разделил монеты поровну, но 2 монеты оказались лишними, и он забрал их себе. Снова разбойники рассердились, убили атамана и выбрали нового. Третий атаман также разделил все монеты поровну, но 1 монета у него осталась, и он забрал её себе. Этого атамана разбойники также убили. Наконец, четвёртый атаман разделил все монеты поровну и каждому из разбойников досталось по 439 монет. Какое наибольшее число монет могли делить разбойники?

5. На окружности выбрано 100 точек. Можно ли каждый из отрезков, соединяющих эти точки, окрасить в один из 100 данных цветов таким образом, чтобы для любых трёх различных цветов нашёлся треугольник с вершинами в отмеченных точках, стороны которого были бы окрашены в эти три цвета?

6. На нескольких карточках написаны положительные числа. Карточки сложены в две стопки. Среднее арифметическое чисел равно 100. В левой стопке карточек больше чем в правой. Обязательно ли в левой стопке найдется карточка, на которой написано число, меньшее чем 200?

7. Целые числа a, b и c удовлетворяют неравенствам $|b-c| \geq |a|$, $|c-a| \geq |b|$ и $|a-b| \geq |c|$. Докажите, что одно из чисел равно сумме двух оставшихся.

8. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $\angle CAE = \angle CEA$, $\angle ACB = \angle CED$, $\angle CAD+\angle ECD = 90°$ и $BC = ED$. Докажите, что $AB+BC > AD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.12.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Найдите наименьшую сумму цифр числа вида $3n^2+n+1$, где n — натуральное число.

2. На 32 клетках шахматной доски стоят короли. Докажите, что семь из них можно покрасить в красный цвет, семь — в синий, а остальных убрать с доски так, что одноцветные короли не будут бить друг друга.

3. Докажите, что число $2^{n+2}7^n+1$ при всех натуральных n — составное.

4. Шайка разбойников делила добычу, состоящую из одинаковых монет. Атаман разделил монеты поровну, но 3 монеты оказались лишними, и он забрал их себе. Разбойники рассердились, убили атамана и выбрали нового. Он также разделил монеты поровну, но 2 монеты оказались лишними, и он забрал их себе. Снова разбойники рассердились, убили атамана и выбрали нового. Третий атаман также разделил все монеты поровну, но 1 монета у него осталась, и он забрал её себе. Этого атамана разбойники также убили. Наконец, четвёртый атаман разделил все монеты поровну и каждому из разбойников досталось по 439 монет. Какое наибольшее число монет могли делить разбойники?

5. Вася записывает на доске в строчку в некотором порядке натуральные числа от 1 до 2014. Затем он каждую минуту между какими-то двумя соседними числами записывает абсолютную величину их разности, а эти два числа стирает. Так он делает до тех пор, пока на доске не останется одно число. Найдите наибольшее возможное значение этого числа.

6. На нескольких карточках написаны положительные числа. Карточки сложены в две стопки. Среднее арифметическое чисел равно 100. В левой стопке карточек больше чем в правой. Обязательно ли в левой стопке найдется карточка, на которой написано число, меньшее чем 200?

7. Различные целые числа a и b удовлетворяют неравенствам $|a-1| \geq |b|$ и $|b-1| \geq |a|$. Докажите, что числа $|a|$ и $|b|$ отличаются на 1.

8. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Известно, что $\angle CAE = \angle CEA$, $\angle ACB = \angle CED$, $\angle CAD+\angle ECD = 90°$ и $BC = ED$. Докажите, что $AB+BC > AD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.12.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Трое мужчин с женами хотят переправиться с левого берега реки на правый. Есть двухместная лодка. Грести могут двое мужей и жена третьего. Ревнивые жены не позволят мужу остаться наедине с другой женщиной (ни в лодке, ни на берегу). Как только муж и жена оказываются оба на правом берегу, они уйдут насовсем. Как им всем переправиться?

2. На 32 клетках шахматной доски стоят короли. Докажите, что семь из них можно покрасить в красный цвет, семь — в синий, а остальных убрать с доски так, что одноцветные короли не будут бить друг друга.

3. Незнайка покрасил некоторые клетки доски 10×20 в синий цвет. Ему удалось разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике оказалось ровно 5 покрашенных клеток. Кроме того, ему удалось разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике оказалось ровно 7 покрашенных клеток. Сможет ли он разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике окажется ровно 6 покрашенных клеток?

4. Шайка разбойников делила добычу, состоящую из одинаковых монет. Атаман разделил монеты поровну, но 2 монеты оказались лишними, и он забрал их себе. Разбойники рассердились, убили атамана и выбрали нового. Новый атаман разделил монеты поровну, но 1 монета у него осталась, и он забрал её себе. Снова разбойники рассердились, убили атамана и выбрали нового. Третий атаман разделил все монеты поровну и каждому из разбойников досталось по 74 монеты. Сколько монет делили разбойники?

5. На доске в порядке возрастания записаны натуральные числа от 1 до 2014. Каждую минуту между какими-то двумя соседними числами записывается разность между большим и меньшим из них (а если числа равны, то записывается 0), а исходные числа стираются. Так делается до тех пор, пока на доске останется одно число. Найдите наибольшее возможное значение этого числа.

6. Подружки Аня и Маша пошли в магазин. Аня заплатила за 2 мыла и 3 шампуня больше 100 рублей, а Маша заплатила за 4 мыла и 5 шампуней меньше 180 рублей. Что дороже: мыло или шампунь?

7. Целые числа a и b удовлетворяют условиям $|a-1| = |b|$ и $|b-1| = |a|$. Найдите $a+b$.

8. Можно ли расставить числа 1, 2, …, 8 в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на всех рёбрах были различны?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.12.2014

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Денежные купюры разного достоинства и разных стран лежат в двух кошельках. Средняя стоимость купюры равна 100 рублей. В левом кошельке купюр больше, чем в правом. Обязательно ли в левом кошельке найдется купюра стоимостью менее 200 рублей?

2. Трое мужчин с женами хотят переправиться с левого берега реки на правый. Есть двухместная лодка. Грести могут двое мужей и жена третьего. Ревнивые жены не позволят мужу остаться наедине с другой женщиной (ни в лодке, ни на берегу). Как только муж и жена оказываются оба на правом берегу, они уйдут насовсем. Как им всем переправиться?

3. Можно ли расставить числа 1, 2, …, ,8 в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на всех рёбрах были различны?

4. На доске в порядке возрастания записаны натуральные числа от 1 до 2014. Каждую минуту между какими-то двумя соседними числами записывается разность между большим и меньшим из них (а если числа равны, то записывается 0), а исходные числа стираются. Так делается до тех пор, пока на доске останется одно число. Найдите наибольшее возможное значение этого числа.

5. На окружности выбрано 100 точек. Можно ли каждый из отрезков, соединяющих эти точки, окрасить в один из 100 данных цветов таким образом, чтобы для любых трёх различных цветов нашёлся треугольник с вершинами в отмеченных точках, стороны которого были бы окрашены в эти три цвета?

6. Петя выписал в ряд все 1008 нечётных чисел, не превосходящих 2015. Вася прибавил к каждому из них одно и то же натуральное число k и тоже выписал на доску получившиеся 1008 чисел. Докажите, что Вася мог так подобрать число k, что произведение всех 2016 выписанных чисел будет квадратом натурального числа.

7. На 32 клетках шахматной доски стоят короли. Докажите, что семь из них можно покрасить в красный цвет, семь — в синий, а остальных убрать с доски так, что одноцветные короли не будут бить друг друга.

8. Какую наименьшую сумму цифр может иметь число вида $3n^2+n+11$, где n — натуральное число?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.12.2014

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Подружки Аня и Маша пошли в магазин. Аня заплатила за 2 мыла и 3 шампуня больше 100 рублей, а Маша заплатила за 4 мыла и 5 шампуней меньше 180 рублей. Что дороже: мыло или шампунь?

2. Трое мужчин с женами хотят переправиться с левого берега реки на правый. Есть двухместная лодка. Грести могут двое мужей и жена третьего. Ревнивые жены не позволят мужу остаться наедине с другой женщиной (ни в лодке, ни на берегу). Как только муж и жена оказываются оба на правом берегу, они уйдут насовсем. Как им всем переправиться?

3. Можно ли расставить числа 1, 2, …, ,8 в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на всех рёбрах были различны?

4. На доске в порядке возрастания записаны натуральные числа от 1 до 2014. Каждую минуту между какими-то двумя соседними числами записывается разность между большим и меньшим из них (а если числа равны, то записывается 0), а исходные числа стираются. Так делается до тех пор, пока на доске останется одно число. Найдите наибольшее возможное значение этого числа.

5. Незнайка покрасил некоторые клетки доски 10×20 в синий цвет. Ему удалось разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике оказалось ровно 5 покрашенных клеток. Кроме того, ему удалось разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике оказалось ровно 7 покрашенных клеток. Сможет ли он разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике окажется ровно 6 покрашенных клеток?

6. В каждой клетке таблицы 4×4 было записано по числу, не равному 0, так, что произведение чисел во всех строчках и столбцах было одинаковым. Школьник Вася оставил числа в восьми клетках (см. рисунок), а остальные стёр. Какое число стояло в клетке, помеченной звёздочкой?

½	32		
	2	8	2
4	1		
		*	16

7. На окружности выбрано 10 точек. Можно ли каждый из отрезков, соединяющих эти точки, окрасить в один из 10 данных цветов таким образом, чтобы для любых трёх различных цветов нашёлся треугольник с вершинами в отмеченных точках, стороны которого были бы окрашены в эти три цвета?

8. Каждый день три дворовые футбольные команды "Драчуны", "Забияки" и "Задиры" играют между собой по одной игре. За победу команде начисляют 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0. Могло ли так получиться, что через несколько дней меньше всех игр проиграли "Задиры", больше всех игр выиграли "Забияки", а больше всех очков набрали "Драчуны"?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 01.12.2014

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Подружки Аня и Маша пошли в магазин. Аня заплатила за 2 мыла и 3 шампуня больше 100 рублей, а Маша заплатила за 4 мыла и 5 шампуней меньше 180 рублей. Что дороже: мыло или шампунь?

2. Трое мужчин с женами хотят переправиться с левого берега реки на правый. Есть двухместная лодка. Грести могут двое мужей и жена третьего. Ревнивые жены не позволят мужу остаться наедине с другой женщиной (ни в лодке, ни на берегу). Как только муж и жена оказываются оба на правом берегу, они уйдут насовсем. Как им всем переправиться?

3. Можно ли расставить числа 1, 2, …, ,8 в вершинах куба так, чтобы суммы чисел на всех рёбрах были различны?

4. На доске в порядке возрастания записаны натуральные числа от 1 до 2014. Каждую минуту между какими-то двумя соседними числами записывается разность между большим и меньшим из них (а если числа равны, то записывается 0), а исходные числа стираются. Так делается до тех пор, пока на доске останется одно число. Найдите наибольшее возможное значение этого числа.

5. Незнайка покрасил некоторые клетки доски 10×20 в синий цвет. Ему удалось разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике оказалось ровно 5 покрашенных клеток. Кроме того, ему удалось разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике оказалось ровно 7 покрашенных клеток. Сможет ли он разрезать доску на прямоугольники так, что в каждом прямоугольнике окажется ровно 6 покрашенных клеток?

6. В каждой клетке таблицы 4×4 было записано по числу, не равному 0, так, что произведение чисел во всех строчках и столбцах было одинаковым. Школьник Вася оставил числа в восьми клетках (см. рисунок), а остальные стёр. Какое число стояло в клетке, помеченной звёздочкой?

½	32		
	2	8	2
4	1		
		*	16

7. Три брата Петя, Вася и Толя забыли, сколько лет их папе. Они обозначили его возраст через x и сделали следующие заявления. Петя: «Число x делится на 3. Число x чётное». Вася: «Число x делится на 3. Последняя цифра числа x равна 5». Толя: «Число x делится на 5. Сумма цифр числа x равна 12». Папа внимательно выслушал трёх сыновей и сказал: «Каждый из вас один раз сказал правду, а один раз ошибся. Если понимать под числом x возраст Вашего дедушки, то тоже окажется, что каждый из вас один раз сказал правду, а один раз ошибся. И то же самое получится, если понимать под числом x возраст Вашего прадедушки». Сколько лет папе, дедушке и прадедушке? Известно, что папа очень умный и никогда не ошибается, а прадедушка ещё не достиг столетнего возраста.

8. Каждый день три дворовые футбольные команды "Драчуны", "Забияки" и "Задиры" играют между собой по одной игре. За победу команде начисляют 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0. Могло ли так получиться, что через несколько дней меньше всех игр проиграли "Задиры", больше всех игр выиграли "Забияки", а больше всех очков набрали "Драчуны"?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.12.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Правильный треугольник со стороной n (n — чётное натуральное число) разбит прямыми, параллельными его сторонам, на n^2 правильных треугольников со стороной 1. Оказалось, что этот треугольник можно разбить на n равных фигур, каждая из которых состоит из n единичных треугольников. Докажите, что n делится на 4.

2. Докажите, что для каждого нечётного $n > 1$ существуют три взаимно простых в совокупности натуральных числа a, b, c таких, что $a^2+2b^2+4c^2 = 3^n$.

3. В треугольнике ABC выполняется равенство $BC = 2AC$. На стороне BC выбрана точка D так, что $\angle CAD = \angle CBA$. Прямая AD пересекает биссектрису внешнего угла при вершине C в точке E. Докажите, что угол BEC прямой.

4. Хулиган Вася разрезал прямоугольный портрет директора школы по прямой. После этого он разрезал по прямой один из получившихся кусков. Потом он сделал то же с одним из новых кусков и т.д. После ста таких разрезаний появился директор школы и поставил Васе по двойке за каждый четырёхугольный кусок и по две двойки за каждый треугольный. Докажите, что Вася получил больше 100 двоек.

5. 1007 черных и 1007 белых шаров, занумерованных всеми натуральными числами от 1 до 2014, складывают в мешок на глазах у Васи (так что Вася видит, какого цвета шар с каждым номером). Затем Вася один раз в минуту вслепую вынимает из мешка один шар и кладёт его на стол, после чего при желании может взять со стола два разноцветных шара (если найдёт) и спрятать их в сундук — тогда он получает количество очков, равное разности большего и меньшего чисел на этих двух шарах. Сколько очков Вася может заработать наверняка за 2014 минут?

6. На доске написаны пять различных положительных чисел. Оказалось, что для любых трёх разных чисел a, b, c на доске число $ab+bc+ca$ рационально. Докажите, что отношение любых двух чисел на доске рационально.

7. На полоске написаны по порядку числа от 1 до 2014. Полоску разрезали на несколько частей, и оказалось, что среднее арифметическое всех чисел первой части равно некоторому натуральному k, второй части — $2k$, третьей — $3k$ и т.д. При каких k это возможно?

8. В четырехугольнике $ABCD$ выполнены равенства $\angle BCA+\angle CAD = 180°$ и $AB = AD+BC$. Докажите, что $\angle BAC+\angle ACD = \angle CDA$.

Ягубов.рф

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.12.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Правильный треугольник со стороной n (n — чётное натуральное число) разбит прямыми, параллельными его сторонам, на n^2 правильных треугольников со стороной 1. Оказалось, что этот треугольник можно разбить на n равных фигур, каждая из которых состоит из n единичных треугольников. Докажите, что n делится на 4.

2. Целые числа a, b, c удовлетворяют условию $ab+bc+ca = 1$. Докажите, что число $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ — точный квадрат.

3. В треугольнике ABC выполняется равенство $BC = 2AC$. На стороне BC выбрана точка D так, что $\angle CAD = \angle CBA$. Прямая AD пересекает биссектрису внешнего угла при вершине C в точке E. Докажите, что угол BEC прямой.

4. Хулиган Вася разрезал прямоугольный портрет директора школы по прямой. После этого он разрезал по прямой один из получившихся кусков. Потом он сделал то же с одним из новых кусков и т.д. После ста таких разрезаний появился директор школы и поставил Васе по двойке за каждый четырёхугольный кусок и по две двойки за каждый треугольный. Докажите, что Вася получил больше 100 двоек.

5. 1007 черных и 1007 белых шаров, занумерованных всеми натуральными числами от 1 до 2014, складывают в мешок на глазах у Васи (так что Вася видит, какого цвета шар с каждым номером). Затем Вася один раз в минуту вслепую вынимает из мешка один шар и кладёт его на стол, после чего при желании может взять со стола два разноцветных шара (если найдёт) и спрятать их в сундук — тогда он получает количество очков, равное разности большего и меньшего чисел на этих двух шарах. Докажите, что Вася сможет набрать не менее 4000 очков.

6. Положительные вещественные числа a и b таковы, что число $\dfrac{a-b}{a+b}$ рационально. Докажите, что число $\dfrac{2a-b}{2a+b}$ также рационально.

7. На полоске написаны по порядку числа от 1 до 2014. Полоску разрезали на несколько частей, и оказалось, что среднее арифметическое всех чисел первой части равно некоторому натуральному k, второй части — $2k$, третьей — $3k$ и т.д. При каких k это возможно?

8. В четырехугольнике $ABCD$ выполнены равенства $\angle BCA+\angle CAD = 180°$ и $AB = AD+BC$. Докажите, что $\angle BAC+\angle ACD = \angle CDA$.

Ягубов.рф

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.12.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В диком лесу жили 6 вурдалаков, 17 единорогов и 55 пауков. Вурдалак ест пауков и единорогов, но не ест других вурдалаков, паук ест единорогов, но не ест вурдалаков и других пауков, а единорог не может есть никого. Когда вурдалак съедает паука, он превращается в единорога, а когда съедает единорога, он превращается в паука. Кроме того, когда паук съедает единорога, он становится вурдалаком. Какое наибольшее количество существ может оставаться в лесу, когда никто никого не в состоянии съесть?

2. На бумажной полоске написаны по порядку числа от 1 до 605. Полоску разрезали на несколько частей. Каждая из частей содержит нечетное количество чисел. Затем на каждой части отметили среднее число. Оказалось, что на первой части отмечено число k, на второй части — число $2k$, третьей — $3k$ и т.д. При каких k это возможно?

3. Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске 2014×2014 таким образом, чтобы в любом квадрате 1008×1008 на обеих диагоналях были отмеченные клетки?

4. В шахматном турнире принимали участие шестиклассники и семиклассники, причём шестиклассников было в 3 раза больше, чем семиклассников. Каждый участник турнира встречался с каждым ровно один раз. При подведении итогов турнира оказалось, что шестиклассники набрали вместе на 20% очков больше, чем семиклассники. Сколько школьников могло участвовать в турнире? За победу в шахматах даётся 1 очко, за ничью — 1/2 очка, а за поражение — 0 очков?

5. Произведение четырёх последовательных нечётных натуральных чисел оканчивается на цифру 9. Какие две цифры могли стоять перед этой девяткой?

6. На плоскости проведено 8 прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Можно ли в 28 их точках пересечения расставить числа от 1 до 28 по одному разу таким образом, чтобы на всех прямых суммы семи написанных чисел были одинаковы?

7. Для целых чисел a и b докажите неравенство $a^2+b^2+a^2b^2 \geq 3(a+b)^2/4$.

8. В четырехугольнике $ABCD$ выполнены равенства $\angle BCA+\angle CAD = 180°$ и $AB = AD+BC$. Докажите, что $\angle BAC+\angle ACD = \angle CDA$.

Ягубов.рф

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.12.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В диком лесу жили 6 вурдалаков, 17 единорогов и 55 пауков. Вурдалак ест пауков и единорогов, но не ест других вурдалаков, паук ест единорогов, но не ест вурдалаков и других пауков, а единорог не может есть никого. Когда вурдалак съедает паука, он превращается в единорога, а когда съедает единорога, он превращается в паука. Кроме того, когда паук съедает единорога, он становится вурдалаком. В какой–то момент в лесу оказалось, что никто никого не в состоянии съесть. Животные какого вида могли остаться в тот момент?

2. На бумажной полоске написаны по порядку числа от 1 до 605. Полоску разрезали на несколько частей. Каждая из частей содержит нечетное количество чисел. Затем на каждой части отметили среднее число. Оказалось, что на первой части отмечено число k, на второй части — число $2k$, третьей — $3k$ и т.д. При каких k это возможно?

3. Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске 2015×2015 таким образом, чтобы в любом квадрате 1008×1008 на обеих диагоналях были отмеченные клетки?

4. В шахматном турнире принимали участие шестиклассники и семиклассники, причём шестиклассников было в 3 раза больше, чем семиклассников. Каждый участник турнира встречался с каждым ровно один раз. При подведении итогов турнира оказалось, что шестиклассники набрали вместе на 20% очков больше, чем семиклассники. Докажите, что наибольшее количество очков в этом турнире набрал семиклассник. За победу в шахматах даётся 1 очко, за ничью — 1/2 очка, а за поражение — 0 очков?

5. Произведение четырёх последовательных нечётных натуральных чисел оканчивается на цифру 9. Какие две цифры могли стоять перед этой девяткой?

6. На плоскости проведено 8 прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Можно ли в 28 их точках пересечения расставить числа от 1 до 28 по одному разу таким образом, чтобы на всех прямых суммы семи написанных чисел были одинаковы?

7. Для целых чисел a и b докажите неравенство $a^2+b^2+a^2b^2 \geq 3(a+b)^2/4$.

8. В четырехугольнике $ABCD$ выполнены равенства $\angle BCA+\angle CAD = 180°$ и $AB = AD+BC$. Докажите, что $\angle BAC+\angle ACD = \angle CDA$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.12.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В турнире участвовали 78 теннисистов, все разного возраста. Всего было сыграно 310 матчей, причём никакие двое не играли между собой более одного раза. Докажите, что можно выбрать четырёх теннисистов так, что либо самый молодой в этой четвёрке обыграл остальных трёх, либо самый старший в этой четвёрке обыграл остальных трёх.

2. Решите уравнение $\frac{n}{2014}=\frac{11}{p}$, где n — натуральное, а p — простое.

3. Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске 15×15 таким образом, чтобы в любом квадрате 8×8 на обеих диагоналях были отмеченные клетки?

4. Незнайка, Пончик и Сиропчик купили по большому тяжёлому арбузу и стали их взвешивать. После взвешивания Пончик сказал: «Если заменить мой арбуз арбузом, который в три раза тяжелее, то вес всех арбузов увеличится в 2 раза». Сиропчик сказал: «То же самое можно сказать и про мой арбуз». А Незнайка сказал, что весы работают неправильно. Почему он сделал такой вывод?

5. Произведение четырёх последовательных нечётных натуральных чисел оканчивается на цифру 9. Какая цифра могла стоять перед этой девяткой?

6. На плоскости проведено 8 прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Можно ли в 28 их точках пересечения расставить числа от 1 до 28 по одному разу таким образом, чтобы на всех прямых суммы семи написанных чисел были одинаковы?

7. На доске написаны три одинаковых натуральных числа. Вася прибавил к каждому из чисел его натуральный делитель и получил три различных числа. Петя прибавил к каждому из новых чисел его натуральный делитель. Мог ли Петя получить снова три одинаковых числа?

8. Малыш подарил Карлсону пакетик с шоколадными конфетами и пакетик с карамельками. Карлсон сначала съел три четверти всех шоколадных конфет и две трети всех карамелек, а потом съел две трети оставшихся шоколадных конфет и три четверти оставшихся карамелек. Фрекен Бок установила, что Карлсон получил в подарок меньше 200 конфет, а не съеденными осталось больше 15 конфет (карамельки — тоже конфеты). Сколько конфет съел Карлсон?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.12.2014

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Произведение четырёх последовательных нечётных натуральных чисел оканчивается на цифру 9. Какие две цифры могли стоять перед этой девяткой?

2. На ленте написаны подряд числа 1, 2, 3, …, n. Для каких натуральных n эту ленту можно разрезать на 3 куска таким образом, чтобы на всех кусках было нечётное количество чисел, при этом на первом куске число, стоящее в середине, было вдвое меньше, чем аналогичное среднее число во втором куске и втрое меньше, чем аналогичное среднее в третьем куске?

3. На доске написаны 5 одинаковых натуральных чисел. Вася прибавил к каждому из чисел его натуральный делитель и получил 5 различных чисел. Петя прибавил к каждому из новых чисел его натуральный делитель. Мог ли Петя получить снова 5 одинаковых чисел?

4. На плоскости проведено 8 прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Можно ли в 28 их точках пересечения расставить числа от 1 до 28 по одному разу таким образом, чтобы на всех прямых суммы семи написанных чисел были одинаковы?

5. Незнайка, Пончик и Сиропчик купили по большому тяжёлому арбузу и стали их взвешивать. После взвешивания Пончик сказал: «Если заменить мой арбуз арбузом, который в три раза тяжелее, то вес всех арбузов увеличится в 2 раза». Сиропчик сказал: «То же самое можно сказать и про мой арбуз». А Незнайка сказал, что так не бывает. Почему он сделал такой вывод?

6. Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске 10×10 таким образом, чтобы в любом квадрате 6×6 на обеих диагоналях были отмеченные клетки?

7. В диком лесу жили 6 троллей, 17 вампиров и 85 злых хомячков. Когда хомячок ловит тролля, то тут же сжирает его и превращается в вампира. Когда хомячок ловит вампира, то сжирает его и превращается в тролля. А когда вампир ловит тролля, то сжирает его и превращается в злого хомячка. Через некоторое время в лесу остались существа только одного вида. Какого?

8. В турнире участвовали 78 теннисистов, все разного возраста. Всего было сыграно 310 матчей, причём никакие двое не играли между собой более одного раза. Докажите, что можно выбрать четырёх теннисистов так, что либо самый молодой в этой четвёрке обыграл остальных трёх, либо самый старший в этой четвёрке обыграл остальных трёх.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.12.2014

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Произведение четырёх последовательных нечётных натуральных чисел оканчивается на цифру 9. Какая цифра могла стоять перед этой девяткой?

2. На бумажной ленте написаны числа 1, 2, 3,…, 2014. Ленту разрезали на несколько кусков и на каждом куске подсчитали среднее арифметическое чисел. Оказалось, что значения этих средних: k, $2k$, $3k$, … При каких k это возможно?

3. На доске написаны 3 одинаковых натуральных числа. Вася прибавил к каждому из чисел его натуральный делитель и получил 3 различных числа. Петя прибавил к каждому из новых чисел его натуральный делитель. Мог ли Петя получить снова 3 одинаковых числа?

4. На плоскости проведено 8 прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Можно ли в 28 их точках пересечения расставить числа от 1 до 28 по одному разу таким образом, чтобы на всех прямых суммы семи написанных чисел были одинаковы?

5. Незнайка, Пончик и Сиропчик купили по большому тяжёлому арбузу и стали их взвешивать. После взвешивания Пончик сказал: «Если заменить мой арбуз арбузом, который в три раза тяжелее, то вес всех арбузов увеличится в 2 раза». Сиропчик сказал: «То же самое можно сказать и про мой арбуз». А Незнайка сказал, что так не бывает. Почему он сделал такой вывод?

6. Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске 11×11 таким образом, чтобы любой ряд из шести клеток, идущих подряд в направлении, параллельном любой из диагоналей, содержал отмеченную клетку?

7. В диком лесу жили 6 троллей, 17 вампиров и 85 злых хомячков. Когда хомячок ловит тролля, то тут же сжирает его и превращается в вампира. Когда хомячок ловит вампира, то сжирает его и превращается в тролля. А когда вампир ловит тролля, то сжирает его и превращается в злого хомячка. Через некоторое время в лесу остались существа только одного вида. Какого?

8. 9 теннисистов, все разного возраста, сыграли однокруговой турнир. Докажите, что можно выбрать четырёх теннисистов так, что либо самый молодой в этой четвёрке обыграл остальных трёх, либо самый старший в этой четвёрке обыграл остальных трёх.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 02.12.2014

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Кролик написал на длинной полоске бумаги все четырёхзначные числа, делящиеся на 17, в порядке возрастания. Винни-Пух просматривает этот ряд чисел и, как только находит пару соседних чисел с разными цифрами в разряде сотен, получает от Кролика воздушный шарик. Сколько шариков получит Винни-Пух в результате?

2. В турнире участвовали 78 теннисистов, все разного возраста. Всего было сыграно 310 матчей, причём никакие двое не играли между собой более одного раза. Докажите, что можно выбрать четырёх теннисистов так, что либо самый молодой в этой четвёрке обыграл остальных трёх, либо самый старший в этой четвёрке обыграл остальных трёх.

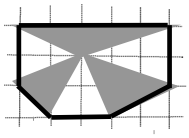
3. На доске написаны три одинаковых натуральных числа. Вася прибавил к каждому из чисел его натуральный делитель и получил три различных числа. Петя прибавил к каждому из новых чисел его натуральный делитель. Мог ли Петя получить снова три одинаковых числа?

4. На плоскости проведено 8 прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны. Можно ли в 28 их точках пересечения расставить числа от 1 до 28 по одному разу таким образом, чтобы на всех прямых суммы семи написанных чисел были равными?

5. Незнайка, Пончик и Сиропчик купили по большому тяжёлому арбузу и стали их взвешивать. После взвешивания Пончик сказал: «Если заменить мой арбуз арбузом, который в три раза тяжелее, то вес всех арбузов увеличится в 2 раза». Сиропчик сказал: «То же самое можно сказать и про мой арбуз». А Незнайка сказал, что весы работают неправильно. Почему он сделал такой вывод?

6. Малыш подарил Карлсону пакетик с шоколадными конфетами и пакетик с карамельками. Карлсон сначала съел три четверти всех шоколадных конфет и две трети всех карамелек, а потом съел две трети оставшихся шоколадных конфет и три четверти оставшихся карамелек. Фрекен Бок установила, что Карлсон получил в подарок меньше 200 конфет, а не съеденными осталось больше 15 конфет (карамельки — тоже конфеты). Сколько конфет съел Карлсон?

7. На клетчатой бумаге нарисовали шестиугольник и частично закрасили его серым цветом (см. рисунок). Какая часть шестиугольника имеет большую площадь: закрашенная или незакрашенная?



8. Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске 11×11 таким образом, чтобы любой ряд из шести клеток, идущих подряд в направлении, параллельном любой из диагоналей, содержал отмеченную клетку?

Ягубов.РФ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.12.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Точка N на стороне AB такова, что $LN \parallel AC$, K — точка пересечения CN и AL. Докажите, что если $BN = AC$, то $CL = CK$.

2. У двух игроков А и В имеется неограниченный запас фигурок трёх видов: (1) (2) (3) . Они по очереди (начинает А) ставят фигурки на доску размером 2013×2014 клеточек, причём А при своём ходе должен поставить одну фигурку вида (1), а В — по одной фигурке каждого из видов (1), (2) и (3) (фигурки можно поворачивать). Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

3. Длины сторон n-угольника ($n \geq 3$) равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а периметр равен p. Докажите, что $\frac{a_1}{p-a_1}+\frac{a_2}{p-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{p-a_n}<2$.

4. Найдите все натуральные $n > 1$ такие, что для каждого целого k, $0 \leq k < n$, найдётся число, кратное n, сумма цифр которого даёт остаток k при делении на n.

5. Несколько семейных пар встретились на день Св. Валентина. Каждый муж подарил всем жёнам (в том числе, конечно, своей) розы. Каждая жена обижается, если получает от своего мужа не большее число роз, чем он подарил всем остальным жёнам, вместе взятым. Оказалось, однако, что для каждой жены можно разбить всех мужчин на две группы так, что суммарные количества роз, полученных ею от этих групп, равны. Докажите, что хотя бы одна жена обиделась.

6. Решите уравнение $m^6+5n^2 = m+n^3$ в натуральных числах.

7. В треугольнике ABC с $AB > AC$ точки P и Q — основания перпендикуляров, опущенных на биссектрису угла A из точек B и C соответственно. Докажите, что прямые BQ, PC и перпендикуляр к AP, восставленный в точке A, пересекаются в одной точке.

8. Для каждой пары натуральных чисел a, b введена операция $a \oplus b$ с таким свойствами: 1) $a \oplus a = a+2$; 2) $a \oplus b = b \oplus a$; 3) $\frac{a \oplus (a+b)}{a \oplus b} = \frac{a+b}{b}$. Найдите $3 \oplus 5$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.12.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Точка N на стороне AB такова, что $LN \parallel AC$, K — точка пересечения CN и AL. Докажите, что если $BN = AC$, то $CL = CK$.

2. У двух игроков А и В имеется неограниченный запас фигурок трёх видов: (1) (2) (3) . Они по очереди (начинает А) ставят фигурки на доску размером 2013×2014 клеточек, причём А при своём ходе должен поставить одну фигурку вида (1), а В — по одной фигурке каждого из видов (1), (2) и (3) (фигурки можно поворачивать). Проигрывает не имеющий хода. Кто выиграет при правильной игре?

3. Длины сторон n-угольника ($n \geq 3$) равны $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а периметр равен p. Докажите, что $\frac{a_1}{p-a_1}+\frac{a_2}{p-a_2}+\ldots+\frac{a_n}{p-a_n}<2$.

4. Числа от 1 до 63 разбиты на 10 групп, в каждой группе подсчитано произведение входящих в неё чисел. Какое наибольшее значение может иметь наибольший общий делитель получившихся произведений?

5. Несколько семейных пар встретились на день Св. Валентина. Каждый муж подарил всем жёнам (в том числе, конечно, своей) розы. Каждая жена обижается, если получает от своего мужа не большее число роз, чем он подарил всем остальным жёнам, вместе взятым. Оказалось, однако, что для каждой жены можно разбить всех мужчин на две группы так, что суммарные количества роз, полученных ею от этих групп, равны. Докажите, что хотя бы одна жена обиделась.

6. Докажите, что ни при каком натуральном n число $2(n^2+1)-n$ не является точным квадратом.

7. В треугольнике ABC с $AB > AC$ точки P и Q — основания перпендикуляров, опущенных на биссектрису угла A из точек B и C соответственно. Прямые BQ и PC пересекаются в точке D. Докажите, что угол DAP — прямой.

8. Для каждой пары натуральных чисел a, b введена операция $a \oplus b$ с таким свойствами: 1) $a \oplus a = a+2$; 2) $a \oplus b = b \oplus a$; 3) $\frac{a \oplus (a+b)}{a \oplus b} = \frac{a+b}{b}$. Найдите $3 \oplus 5$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.12.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На 41 клетке шахматной доски стоят короли. Докажите, что пять из них можно покрасить в красный цвет, пять — в синий и пять — в зеленый, а остальные 26 убрать с доски так, что разноцветные короли не будут бить друг друга.

2. Несколько семейных пар встретились на день Св. Валентина. Каждый мужчина подарил каждой женщине розы. Каждая женщина обижается, если получает от своего мужа не большее число роз, чем он подарил всем остальным женщинам, вместе взятым. Оказалось, что для каждой женщины можно разбить всех мужчин на две группы так, что суммарные количества роз, полученных ею от этих групп, равны. Докажите, что хотя бы одна женщина обиделась.

3. Докажите, что для любого натурального числа k, меньшего 20142014, существует число n, делящееся на 20142014, сумма цифр которого даёт остаток k при делении на 20142014.

4. В ряд стоит $n > 2$ лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который при нажатии изменяет состояние лампочки. Изначально все лампочки выключены. Петя может одновременно нажимать на два выключателя соседних лампочек. При каких n он может такими переключениями добиться того, что среди любых трёх идущих подряд лампочек ровно одна будет включена?

5. Каждый житель Острова Сомнения произносит правдивые и лживые утверждения поочерёдно. Однажды правитель Острова произнёс подряд 99 фраз, каждая из которых звучала либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины жителей острова», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины мужчин, живущих на острове», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины женщин, живущих на острове». При этом все три фразы прозвучали. Какое наибольшее число раз могла прозвучать первая фраза?

6. Натуральное число называется *незначительным*, если все его простые делители не превосходят 50. Делитель d натурального числа n называется *значительным*, если $d < n$ и $d^2 > n$. Сколько незначительных натуральных чисел имеет ровно один значительный делитель?

7. Для чисел $x > 1$ докажите неравенство $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right) < [2x]$. Здесь $[a]$ обозначает целую часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a.

8. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Точка N на стороне AB такова, что $\angle BNL = \angle BAC$. K — точка пересечения CN и AL. Докажите, что если $BN = AC$, то $CL = CK$.

Ягубов.РФ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.12.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На 41 клетке шахматной доски стоят короли. Докажите, что пять из них можно покрасить в красный цвет, пять — в синий и пять — в зеленый, а остальные 26 убрать с доски так, что разноцветные короли не будут бить друг друга.

2. Несколько семейных пар встретились на день Св. Валентина. Каждый мужчина подарил каждой женщине розы. Каждая женщина обижается, если её муж подарил какой-то из остальных женщин не меньше роз, чем ей. Оказалось, что для каждой женщины есть мужчина, который ей подарил столько же роз, сколько ее муж. Докажите, что хотя бы одна женщина обиделась.

3. Числа A и B записываются одними восьмёрками, может ли сумма цифр числа AB равняться миллиону?

4. По кругу стоит $n > 2$ лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который при нажатии изменяет состояние лампочки. Изначально все лампочки выключены. Петя может одновременно нажимать на два выключателя соседних лампочек. При каких n он может такими переключениями добиться того, что среди любых трёх идущих подряд лампочек ровно одна будет включена?

5. Каждый житель Острова Сомнения произносит правдивые и лживые утверждения поочерёдно. Однажды правитель Острова произнёс подряд 99 фраз, каждая из которых звучала либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины жителей острова», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины мужчин, живущих на острове», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины женщин, живущих на острове». При этом все три фразы прозвучали. Какое наибольшее число раз могла прозвучать первая фраза?

6. Натуральное число называется *незначительным*, если все его простые делители не превосходят 50. Делитель d натурального числа n называется *значительным*, если $d < n$ и $d^2 > n$. Сколько незначительных натуральных чисел имеет ровно один значительный делитель?

7. Для чисел $x > 1$ докажите неравенство $\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right) \le [2x]$. Здесь $[a]$ обозначает целую часть числа a, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее a.

8. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Точка N на стороне AB такова, что $\angle BNL = \angle BAC$. K — точка пересечения CN и AL. Докажите, что если $BN = AC$, то $CL = CK$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.12.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В стране Лемурии ходят две валюты: динары и сольдо. Если лемур заплатит 20 динаров, то ему дадут холодильник и 4 сольдо сдачи. Если лемур заплатит 15 динаров, то ему дадут холодильник и 1 сольдо сдачи. Сколько динаров сдачи получит лемур, если заплатит за холодильник 14 сольдо?

2. Несколько семейных пар встретились на день Св. Валентина. Каждый мужчина подарил каждой женщине розы. Каждая женщина обижается, если её муж подарил какой-то из остальных женщин не меньше роз, чем ей. Оказалось, что для каждой женщины есть мужчина, который ей подарил столько же роз, сколько ее муж. Докажите, что хотя бы одна женщина обиделась.

3. Число A записывается одними восьмёрками, а сумма цифр числа $8A$ составляет 2014. Сколько восьмёрок содержится в записи числа A?

4. В ряд стоит несколько (больше двух) лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который при нажатии изменяет состояние лампочки. Изначально все лампочки выключены. Петя может одновременно нажимать на два выключателя соседних лампочек. Докажите, что такими переключениями он может добиться того, что среди любых трёх идущих подряд лампочек ровно одна будет выключена.

5. Каждый житель Острова Сомнения произносит правдивые и лживые утверждения поочерёдно. Однажды правитель Острова произнёс подряд 99 фраз, каждая из которых звучала либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины жителей острова», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины мужчин, живущих на острове», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины женщин, живущих на острове». При этом все три фразы прозвучали. Какое наибольшее число раз могла прозвучать первая фраза?

6. Натуральное число называется *незначительным*, если все его простые делители не превосходят 30. Простой делитель натурального числа называется *значительным*, если его квадрат больше данного числа. Сколько незначительных натуральных чисел имеет ровно один значительный простой делитель?

7. Мальчик Петя попал в сказочный зверинец волшебника Мерлина, в котором содержатся 100 зверей, каждый из которых на год старше предыдущего. Петя может спрашивать Мерлина, какова разница в возрасте двух выбранных им (Петей) зверей. Сможет ли он за 100 вопросов найти пару зверей, один из которых самый молодой, а другой самый старый?

8. Существуют ли такие натуральные x и y, при которых $(x^2+x+1)^2+(y^2+y+1)^2$ — квадрат натурального числа?

Ягубов.РФ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.12.2014

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. По кругу стоит $n > 2$ лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который при нажатии изменяет состояние лампочки. Изначально все лампочки выключены. Петя может одновременно нажимать на два выключателя соседних лампочек. При каких n он может такими переключениями добиться того, что среди любых трёх идущих подряд лампочек ровно одна будет включена?

2. Существуют ли четыре различных натуральных числа таких, что если к произведению любых двух из них добавить единицу, то получится квадрат натурального числа?

3. Каждый житель Острова Сомнения произносит правдивые и лживые утверждения поочерёдно. Однажды правитель Острова произнёс подряд 99 фраз, каждая из которых звучала либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины жителей острова», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины мужчин, живущих на острове», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины женщин, живущих на острове». При этом все три фразы прозвучали. Какое наибольшее число раз могла прозвучать первая фраза?

4. В футбольном турнире участвуют 6 команд. Чемпионат проходит в 5 туров, в каждом туре команды разбиваются на пары и играют друг с другом, любые две команды в течение чемпионата играют ровно 1 раз. После очередного тура больше всех очков имела команда «Тамбовские волки». Капитан этой команды обнаружил, что если эта команда в оставшихся турах наберёт ровно n очков, то выиграет турнир. Верно ли, что если эта команда наберёт больше n очков, то тоже выиграет турнир? (В футболе за победу даётся 3 очка, за ничью 1 очко, за поражение 0 очков. В случае делёжки мест победитель определяется жребием.)

5. Натуральное число называется *незначительным*, если все его простые делители не превосходят миллиона. Простой делитель натурального числа называется *значительным*, если его квадрат больше данного числа. Докажите, что количество незначительных натуральных чисел, имеющих ровно один простой значительный делитель, нечётно.

6. На листе клетчатой бумаги нарисован квадрат 100×100. В каждую клетку записали одно из натуральных чисел от 1 до 100. При этом ни в одной строке нет двух одинаковых чисел и ни в одном столбце нет двух одинаковых чисел. Докажите, что найдётся квадрат 10×10, в котором есть два одинаковых числа.

7. Несколько семейных пар встретились на день Св. Валентина. Каждый муж подарил всем жёнам (в том числе, конечно, своей) розы. Каждая жена обижается, если получает от своего мужа не большее число роз, чем он подарил всем остальным жёнам в сумме. Оказалось, что для каждой жены можно разбить всех мужчин на две группы так, что суммарные количества роз, полученных ею от этих групп, равны. Докажите, что хотя бы одна жена обиделась.

8. Число A записывается одними восьмёрками, а сумма цифр числа $8A$ составляет 2014. Сколько восьмёрок содержится в записи числа A?

Ягубов.РФ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.12.2014

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. По кругу стоит $n > 2$ лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который при нажатии изменяет состояние лампочки. Изначально все лампочки выключены. Петя может одновременно нажимать на два выключателя соседних лампочек. При каких n он может такими переключениями добиться того, что среди любых трёх идущих подряд лампочек ровно одна будет включена?

2. Натуральное число называется *незначительным*, если все его простые делители не превосходят миллиона. Простой делитель натурального числа называется *значительным*, если его квадрат больше данного числа. Докажите, что количество незначительных натуральных чисел, имеющих ровно один простой значительный делитель, нечётно.

3. Каждый житель Острова Сомнения произносит правдивые и лживые утверждения поочерёдно. Однажды правитель Острова произнёс подряд 99 фраз, каждая из которых звучала либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины жителей острова», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины мужчин, живущих на острове», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины женщин, живущих на острове». При этом все три фразы прозвучали. Какое наибольшее число раз могла прозвучать первая фраза?

4. На листе клетчатой бумаги нарисован квадрат 100×100. В каждую клетку записали одно из натуральных чисел от 1 до 100. При этом ни в одной строке нет двух одинаковых чисел и ни в одном столбце нет двух одинаковых чисел. Докажите, что найдётся квадрат 10×10, в котором есть два одинаковых числа.

5. Клетчатый прямоугольник разбит на уголки из трёх клеток. Докажите, что каждый из этих уголков можно окрасить в синий или красный цвет таким образом, чтобы никакие два одноцветных уголка не имели общего отрезка длины 2.

6. Число A записывается одними восьмёрками, а сумма цифр числа $8A$ составляет 2014. Сколько восьмёрок содержится в записи числа A?

7. Хулиган Вася на экзамене по математике получил прямоугольный бланк, взял ножницы и начал резать его на части прямолинейными разрезами. Каждым разрезом он режет какой-нибудь из имеющихся кусков на две части. За время экзамена Вася успел сделать ровно 2014 разрезов. Вася утверждает, что среди полученных кусков оказалась ровно 403 восьмиугольника? Мог ли он оказаться прав?

8. Мальчик Петя попал в сказочный зверинец волшебника Мерлина, в котором содержатся 100 зверей, каждый из которых на год старше предыдущего. Петя может спрашивать Мерлина, какова разница в возрасте двух выбранных им

(Петей) зверей. Сможет ли он за 100 вопросов найти пару зверей, один из которых самый молодой, а другой самый старый?

Ягубов.РФ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 04.12.2014

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Натуральное число называется *незначительным*, если все его простые делители не превосходят миллиона. Простой делитель натурального числа называется *значительным*, если его квадрат больше данного числа. Докажите, что количество незначительных натуральных чисел, имеющих ровно один простой значительный делитель, нечётно.

2. Каждый житель Острова Сомнения произносит правдивые и лживые утверждения поочерёдно. Однажды правитель Острова произнёс подряд 99 фраз, каждая из которых звучала либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины жителей острова», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины мужчин, живущих на острове», либо: «На выборах за меня проголосовали больше половины женщин, живущих на острове». При этом все три фразы прозвучали. Какое наибольшее число раз могла прозвучать первая фраза?

3. На листе клетчатой бумаги нарисован квадрат 100×100. В каждую клетку записали одно из натуральных чисел от 1 до 100. При этом ни в одной строке нет двух одинаковых чисел и ни в одном столбце нет двух одинаковых чисел. Докажите, что найдётся квадрат 10×10, в котором есть два одинаковых числа.

4. В стране Лемурии ходят две валюты: динары и сольдо. Если лемур заплатит 20 динаров, то ему дадут холодильник и 4 сольдо сдачи. Если лемур заплатит 15 динаров, то ему дадут холодильник и 1 сольдо сдачи. Сколько динаров сдачи получит лемур, если заплатит за холодильник 14 сольдо?

5. Число A записывается одними восьмёрками, а сумма цифр числа $8A$ составляет 2014. Сколько восьмёрок содержится в записи числа A?

6. Хулиган Вася на экзамене по математике получил прямоугольный бланк, взял ножницы и начал резать его на части прямолинейными разрезами. Каждым разрезом он режет какой-нибудь из имеющихся кусков на две части. За время экзамена Вася успел сделать ровно 2014 разрезов. Вася утверждает, что среди полученных кусков оказалась ровно 403 восьмиугольника? Мог ли он оказаться прав?

7. Мальчик Петя попал в сказочный зверинец волшебника Мерлина, в котором содержатся 100 зверей, каждый из которых на год старше предыдущего. Петя может спрашивать Мерлина, какова разница в возрасте двух выбранных им (Петей) зверей. Сможет ли он за 100 вопросов найти пару зверей, один из которых самый молодой, а другой самый старый?

8. По кругу стоит $n > 2$ лампочек. У каждой лампочки есть выключатель, который при нажатии изменяет состояние лампочки. Изначально все лампочки выключены. Петя может одновременно нажимать на два выключателя

соседних лампочек. При каких n он может такими переключениями добиться того, что среди любых трёх идущих подряд лампочек ровно одна будет включена?

Ягубов.РФ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.12.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. При каких натуральных n существуют различные ненулевые числа a_1, a_2, ..., a_n такие, что набор чисел $a_i - \frac{(-1)^i}{a_i}$ совпадает с набором чисел a_i?

2. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке O под прямым углом. Известно, что $AB > CD$ и $\angle A = 90°$. Биссектриса угла AOD пересекает AD в точке E, а прямая, проходящая через точку E параллельно AB, пересекает прямую BC в точке F. Докажите, что $EF = AD$.

3. Аяз выкладывает в ряд 52 карты обычной колоды, 26 красных и 26 чёрных. Если между двумя картами одного цвета нет других карт, их можно убрать. Сколько существует первоначальных расположений, при которых Аяз сможет убрать все карты?

4. В треугольнике ABC AD — биссектриса. Точка E на стороне AC такова, что $\angle EBC = \angle BCA + \angle BAC$. Докажите, что ED — биссектриса угла BEC.

5. Числа $x \geq 5$, $y \geq 6$ и $z \geq 7$ удовлетворяют условию $x^2+y^2+z^2 \geq 125$. Найдите наименьшее возможное значение $x+y+z$.

6. Натуральные числа a, b, c и d попарно взаимно просты. Число $(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$ делится на каждое из чисел $x = ab+cd$, $y = ac+bd$ и $z = ad+bc$. Докажите, что хотя бы одно из чисел x, y и z чётно.

7. Сумма чисел $x_1, x_2, ..., x_{1007}$ равна 2014^2. Известно, что

$$\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \frac{x_3}{x_3+5} = \mathrm{K} = \frac{x_{1007}}{x_{1007}+2013}.$$ Найдите x_6.

8. В стране n городов, некоторые из которых соединены беспосадочными авиалиниями (действующими в обоих направлениях). Ни один город не соединён прямыми авиарейсами со всеми остальными. Оказалось, что для любых двух городов существует единственный способ добраться из одного в другой, сделав не более одной пересадки. Докажите, что $n-1$ — точный квадрат.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.12.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Петя и Вася по очереди берут из двух кучек камни. За один ход можно взять либо два камня из большей кучки, либо один камень из меньшей. Если кучки равны, то можно из одной кучки взять один или два камня. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре, если сначала в кучках было 1914 и 2014 камней?

2. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке O под прямым углом. Известно, что $AB > CD$ и $\angle A = 90°$. Биссектриса угла AOD пересекает AD в точке E, а прямая, проходящая через точку E параллельно AB, пересекает прямую BC в точке F. Докажите, что $EF = AD$.

3. По кругу лежат 2014 карамелек: желтых и зеленых. Леша может съесть две одноцветные конфеты, между которыми нет других конфет. Дима заметил, что таким способом Леша может съесть все конфеты, и поменял местами две соседние разноцветные конфеты. Докажите, что теперь Леша не сможет съесть все конфеты.

4. В треугольнике ABC AD — биссектриса. Точка E на стороне AC такова, что $\angle EBC = \angle BCA + \angle BAC$. Докажите, что ED — биссектриса угла BEC.

5. Числа $x \geq 5$ и $y \geq 6$ удовлетворяют условию $x^2+y^2 \geq 125$. Найдите наименьшее возможное значение $x+y$.

6. Сумма цифр одного натурального числа равна 10, а другого — 20. Какую наименьшую сумму цифр может иметь их разность (вычитается из большего числа меньшее)?

7. Сумма чисел $x_1, x_2, ..., x_{1007}$ равна 2014^2. Известно, что

$$\frac{x_1}{x_1+1} = \frac{x_2}{x_2+3} = \frac{x_3}{x_3+5} = \ldots = \frac{x_{1007}}{x_{1007}+2013}.$$ Найдите x_6.

8. В стране n городов, некоторые из которых соединены беспосадочными авиалиниями (действующими в обоих направлениях). Ни один город не соединён прямыми авиарейсами со всеми остальными. Оказалось, что для любых двух городов существует единственный способ добраться из одного в другой, сделав не более одной пересадки. Докажите, что $n-1$ — точный квадрат.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.12.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. По кругу лежат 2014 карамелек: желтых и зеленых. Леша может съесть две одноцветные конфеты, между которыми нет других конфет. Дима заметил, что таким способом Леша может съесть все конфеты, и поменял местами две соседние разноцветные конфеты. Докажите, что теперь Леша не сможет съесть все конфеты.

2. Петя и Вася по очереди берут из двух кучек камни. За один ход можно взять либо два камня из большей кучки, либо один камень из меньшей. Если кучки равны, то можно из одной кучки взять один или два камня. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре, если сначала в кучках было 1914 и 2014 камней?

3. Дано натуральное число n. Оказалось, что сумма цифр числа $3n$ не меньше утроенной суммы цифр числа n. Докажите, что сумма цифр числа $4n$ не меньше суммы цифр числа n.

4. В стране n городов, некоторые из которых соединены беспосадочными авиалиниями (действующими в обоих направлениях). Ни один город не соединён прямыми авиарейсами со всеми остальными. Оказалось, что для любых двух городов существует единственный способ добраться из одного в другой, сделав не более одной пересадки. Докажите, что $n-1$ — точный квадрат.

5. Докажите, что если число $23a^2+ab-b^2$ делится на 31, то число $a-2b$ также делится на 31.

6. Имеется 8 золотых монет, среди которых одна фальшивая, и 8 серебряных, среди которых тоже одна фальшивая. Золотые монеты весят по 2 г, серебряные — по 1 г, а фальшивые монеты на 1 мг легче настоящих. Есть двухчашечные весы без гирь. На левую чашу разрешается класть только золотые, на правую — только серебряные монеты. Как за 6 взвешиваний выявить обе фальшивые монеты?

7. Для любых положительных чисел a и b докажите неравенство $(2a+b)^4 \geq (2a-b)^4+64a^2b^2$.

8. На стороне AC треугольника ABC выбрана такая точка E, что $\angle EBC = \angle BCA+\angle BAC$. На стороне BC выбрана произвольная точка D. Докажите, что $AD+DE > AB+BE$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.12.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. По кругу лежат 2014 карамелек: желтых и зеленых. Леша может съесть две одноцветные конфеты, между которыми нет других конфет. Дима заметил, что таким способом Леша может съесть все конфеты, и поменял местами две соседние разноцветные конфеты. Докажите, что теперь Леша не сможет съесть все конфеты.

2. Петя и Вася по очереди берут из двух кучек камни. За один ход можно взять либо два камня из большей кучки, либо один камень из меньшей. Если кучки равны, то можно из одной кучки взять один или два камня. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре, если сначала в кучках было 2013 и 2014 камней?

3. Дано натуральное число n. Оказалось, что сумма цифр числа $3n$ не меньше утроенной суммы цифр числа n. Докажите, что сумма цифр числа $4n$ не меньше суммы цифр числа n.

4. Имеется восемь кубиков $1\times1\times1$, на гранях которых написаны натуральные числа от 1 до 6 так, что на каждом кубике все эти числа встречаются по одному разу (при этом на разных кубиках числа могут быть расставлены по-разному). Можно ли сложить из этих кубиков куб $2\times2\times2$ так, чтобы на любой паре соприкасающихся граней были одинаковые числа, а суммы чисел, оказавшихся на гранях большого куба оказались бы шестью последовательными натуральными числами в некотором порядке?

5. Докажите, что если число $7a^2+ab-b^2$ делится на 29, то число $a-2b$ также делится на 29.

6. Имеется 8 золотых монет, среди которых одна фальшивая, и 8 серебряных, среди которых тоже одна фальшивая. Золотые монеты весят по 2 г, серебряные — по 1 г, а фальшивые монеты на 1 мг легче настоящих. Есть двухчашечные весы без гирь. На левую чашу разрешается класть только золотые, на правую — только серебряные монеты. Как за 6 взвешиваний выявить обе фальшивые монеты?

7. Для любых положительных чисел a и b докажите неравенство $(2a+b)^4 \geq (2a-b)^4+64a^2b^2$.

8. На стороне AC треугольника ABC выбрана такая точка E, что $\angle EBC = \angle BCA+\angle BAC$. На стороне BC выбрана произвольная точка D. Докажите, что $AD+DE > AB+BE$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.12.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Есть два натуральных числа. Если прибавить их произведение к большему числу, получится 391. Какое число получится, если прибавить это произведение к меньшему числу?

2. Дан клетчатый квадрат 16×16. Вася выделил в нём 800 клетчатых прямоугольников. Может ли так случиться, что ни один из этих прямоугольников не накрывает другой?

3. Дано натуральное число n. Оказалось, что сумма цифр числа $3n$ не меньше утроенной суммы цифр числа n. Докажите, что сумма цифр числа $4n$ не меньше суммы цифр числа n.

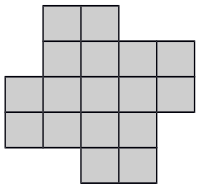
4. Имеется восемь кубиков 1×1×1, на гранях которых написаны натуральные числа от 1 до 6 так, что на каждом кубике все эти числа встречаются по одному разу (при этом на разных кубиках числа могут быть расставлены по-разному). Можно ли сложить из этих кубиков куб 2×2×2 так, чтобы на любой паре соприкасающихся граней были одинаковые числа, а суммы чисел, оказавшихся на гранях большого куба оказались бы шестью последовательными натуральными числами в некотором порядке?

5. Петя и Вася по очереди берут из двух кучек камни. За один ход можно взять либо два камня из большей кучки, либо один камень из меньшей. Если кучки равны, то можно из одной кучки взять один или два камня. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре, если сначала в кучках было 2013 и 2014 камней?

6. Имеется 8 золотых монет, среди которых одна фальшивая, и 8 серебряных, среди которых тоже одна фальшивая. Золотые монеты весят по 2 г, серебряные — по 1 г, а фальшивые монеты на 1 мг легче настоящих. Есть двухчашечные весы без гирь. На левую чашу разрешается класть только золотые, на правую — только серебряные монеты. Как за 6 взвешиваний выявить обе фальшивые монеты?

7. Целые числа a и b удовлетворяют условию $|a|+|b| = 1000$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $|a-1000|+|b+1000|$?

8. Разрежьте нарисованную справа фигуру на 5 частей и сложите из получившихся кусков квадрат.



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.12.2014

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Вася задумал натуральное число a, меньшее 1000, а Петя хочет его узнать. Для этого он называет какое-то натуральное число b, а Вася берёт число ab, раскладывает его на простые множители и называет Пете набор степеней, в которых эти простые числа входят в разложение ab, но при этом неизвестно, какому простому числу какая степень соответствует. Например, если Вася задумал 20, а Петя назвал 36, то Вася может дать ответ в виде: 2,1,4. Как Пете подобрать число b так, чтобы узнать Васино число?

2. Имеется 8 золотых монет, среди которых одна фальшивая, и 8 серебряных, среди которых тоже одна фальшивая. Золотые монеты весят по 2 г, серебряные — по 1 г, а фальшивые монеты на 1 мг легче настоящих. Есть двухчашечные весы без гирь. На левую чашу разрешается класть только золотые, на правую — только серебряные монеты. Как за 6 взвешиваний выявить обе фальшивые монеты?

3. Дан клетчатый квадрат 16×16. Вася выделил в нём 1200 клетчатых прямоугольников. Может ли так случиться, что ни один из этих прямоугольников не накрывает другой?

4. Дано натуральное число n. Оказалось, что сумма цифр числа $3n$ не меньше утроенной суммы цифр числа n. Докажите, что сумма цифр числа $4n$ не меньше суммы цифр числа n.

5. На окружности отмечено 17 точек. Некоторые из отрезков, соединяющих отмеченные точки, покрашены. Оказалось, что у любого четырёхугольника с вершинами в отмеченных точках покрашено не больше одной стороны. Каково наибольшее возможное количество покрашенных отрезков?

6. Имеется восемь кубиков 1×1×1, на гранях которых написаны натуральные числа от 1 до 6 так, что на каждом кубике все эти числа встречаются по одному разу (при этом на разных кубиках числа могут быть расставлены по-разному). Можно ли сложить из этих кубиков куб 2×2×2 так, чтобы на любой паре соприкасающихся граней были одинаковые числа, а суммы чисел, оказавшихся на гранях большого куба оказались бы шестью последовательными натуральными числами в некотором порядке?

7. Учительница математики написала на доске четырёхзначное число, в котором все цифры различны и не равны нулю, и вызвала к доске шестиклассников Петрова и Сидорова. Один из них отличник, и делает только верные утверждения, а другой двоечник и делает только неверные утверждения. Каждый сделал по 2 утверждения. Петров сказал: «Одна из цифр этого числа равна сумме всех остальных. Вторая цифра самая большая». Сидоров сказал: «Вторая цифра не меньше трёх. Первая цифра делится на все остальные». Какое число написала учительница? (Найдите все возможные варианты ответа).

8. Все клетки квадрата 3×3 как-то раскрашены в черный и белый цвета. На какую-то белую клетку прилетела божья коровка. С любой белой клетки она может перейти на любую соседнюю по стороне клетку, а с черной – никуда не может. После каждого перехода все клетки, соседние по стороне с покинутой, меняют свой цвет на противоположный. Есть ли раскраска квадрата, которая позволит коровке посетить каждую клетку не менее 10 раз?

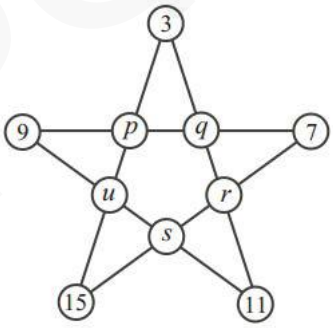
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.12.2014

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Имеется много карт, каждая из которых либо король, либо дама, либо валет. Карт пиковой масти среди них нет. Можно ли разложить по кругу 10 кучек по три карты разной масти так, чтобы двух одинаковых кучек не было, никакие две соседние кучки не содержали одинаковых карт, а любые две не соседние кучки содержали хотя бы по одной одинаковой карте?

2. Даня смотрит на равенство: 202 × __ + 212 × __ + 222 × __ = 2014 и хочет вписать на подчёркнутые места цифры так, чтобы сделать равенство верным. Объясните, почему у Дани ничего не получится.

3. В вершинах пятиконечной звёздочки расставлены числа 3, 7, 11, 15, 9. В пяти вершинах внутреннего пятиугольника в некотором порядке расставлены числа 19, 21, 23, 25, 27. При этом вдоль каждого из пяти отрезков стоят четыре числа с одной и той же суммой. Какое число может стоять в вершине пятиугольника, соседней с теми вершинами звёздочки, в которых стоят числа 3 и 7?



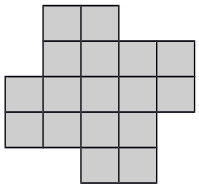
4. На гранях игрального кубика написаны натуральные числа от 1 до 6. Верно ли, что из восьми одинаковых игральных кубиков можно ли сложить куб 2×2×2 так, чтобы на любой паре соприкасающихся граней были одинаковые числа?

5. Имеется 8 золотых монет, среди которых одна фальшивая, и 8 серебряных, среди которых тоже одна фальшивая. Золотые монеты весят по 2 г, серебряные — по 1 г, а фальшивые монеты на 1 мг легче настоящих. Есть двухчашечные весы без гирь. На левую чашу разрешается класть только золотые, на правую — только серебряные монеты. Как за 6 взвешиваний выявить обе фальшивые монеты?

6. В клетки таблицы 3×3 вписаны числа. Могут ли суммы чисел в строках и суммы чисел в столбцах быть шестью последовательными натуральными числами?

7. Петя и Вася по очереди берут из двух кучек камни. За один ход можно взять либо два камня из большей кучки, либо один камень из меньшей. Если кучки равны, то можно из одной кучки взять один или два камня. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре, если сначала в кучках было 10 и 19 камней?

8. Разрежьте нарисованную справа фигуру на 5 частей и сложите из получившихся кусков квадрат.



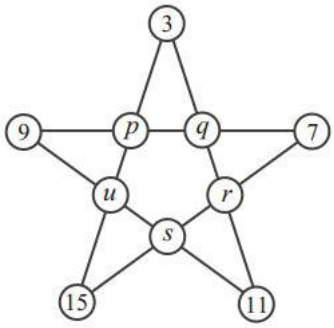
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 05.12.2014

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Имеется много карт, каждая из которых либо король, либо дама, либо валет. Карт пиковой масти среди них нет. Можно ли разложить по кругу 10 кучек по три карты разной масти так, чтобы двух одинаковых кучек не было, никакие две соседние кучки не содержали одинаковых карт, а любые две не соседние кучки содержали хотя бы по одной одинаковой карте?

2. Учительница математики написала на доске четырёхзначное число, в котором все цифры различны и не равны нулю, и вызвала к доске шестиклассников Петрова и Сидорова. Один из них отличник, и делает только верные утверждения, а другой двоечник и делает только неверные утверждения. Каждый сделал по 2 утверждения. Петров сказал: «Одна из цифр этого числа равна сумме всех остальных. Вторая цифра самая большая». Сидоров сказал «Вторая цифра не меньше трёх. Первая цифра делится на все остальные». Какое число написала учительница? (Найдите все возможные варианты ответа)

3. В вершинах пятиконечной звёздочки расставлены числа 3, 7, 11, 15, 9. В пяти вершинах внутреннего пятиугольника в некотором порядке расставлены числа 19, 21, 23, 25, 27. При этом вдоль каждого из пяти отрезков стоят четыре числа с одной и той же суммой. Какое число может стоять в вершине пятиугольника, соседней с теми вершинами звёздочки, в которых стоят числа 3 и 7?



4. Имеется восемь кубиков 1×1×1, на гранях которых написаны натуральные числа от 1 до 6 так, что на каждом кубике все эти числа встречаются по одному разу (при этом на разных кубиках числа могут быть расставлены по-разному). Можно ли сложить из этих кубиков куб 2×2×2 так, чтобы на любой паре соприкасающихся граней были одинаковые числа, а суммы чисел, оказавшихся на гранях большого куба оказались бы шестью последовательными натуральными числами в некотором порядке?

5. Четыре клетки квадрата 2×2 как-то раскрашены в черный и белый цвета. На белую клетку залезла божья коровка. С любой белой клетки она может перейти на любую соседнюю по стороне клетку, а с черной – никуда не может. После каждого перехода обе клетки, соседние с покинутой, меняют свой цвет на противоположный. Есть ли раскраска квадрата, которая позволит коровке ползать вечно?

6. Петя и Вася по очереди берут из двух кучек камни. За один ход можно взять либо два камня из большей кучки, либо один камень из меньшей. Если кучки равны, то можно из одной кучки взять один или два камня. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре, если сначала в кучках было 10 и 19 камней?

7. Есть два натуральных числа. Если прибавить их произведение к большему числу, получится 391. Какое число получится, если прибавить это произведение к меньшему числу?

8. Волшебник-недоучка умеет превращать мячик в два мячика и бирюльку, либо три мячика в четыре кубика и бирюльку. Он зашел в комнату, где лежали только мячики, и через некоторое время там оказались 2012 кубиков, 1000 бирюлек и ни одного мячика. Сколько мячиков было в комнате сначала?