МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 17.02.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Решите в натуральных числах уравнение $(m+1)!+(n+1)! = m^2n^2$.

2. Для каждого натурального n обозначим $c(n)$ количество цифр в десятичной записи n. Множество M натуральных чисел обладает следующим свойством: для любых двух его различных элементов a и b справедливо неравенство $c(a+b)+2 > c(a)+c(b)$. Какое наибольшее количество элементов может быть в M?

3. С натуральным числом, в записи которого более двух знаков, разрешается проделывать следующую операцию: отделить последние две цифры, умножить оставшуюся часть на 28 и прибавить к результату число, образованное отделёнными цифрами. (Например, из числа 12934 получается число $129\times28+34 = 3646$.) Описанную операцию применяют к числу 123456123456...123456 (группа цифр 123456 повторяется 2015 раз), пока в очередном получившемся числе не станет меньше трёх знаков. Какое число получится?

4. Прямоугольник 4×2014 разбит на доминошки (прямоугольники 1×2). Какое наименьшее количество точек может оказаться вершинами доминошек?

5. Алан и Давид играют в следующую игру. Они по очереди (начинает Алан) выписывают на доску пары неотрицательных целых чисел по такому правилу: вновь выписываемая пара (a, b) должна для каждой ранее выписанной пары (c, d) удовлетворять хотя бы одному из условий $a < c$ или $b < d$. Проигрывает тот, кто вынужден написать пару $(0, 0)$. Кто выиграет при правильной игре?

6. Точки E и F расположены соответственно на сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ так, что $BE = BF$. Точка N — основание высоты, опущенной на сторону EC в треугольнике EBC. Продолжение этой высоты пересекает сторону AD в точке G. Отрезки FG и EC пересекаются в точке P, а прямые NF и DC — в точке T. Докажите, что прямые DP и BT перпендикулярны.

7. На гипотенузе BC равнобедренного прямоугольного треугольника отмечены точки D и E такие, что $BD:DE:EC=1:2:\sqrt{3}$. Докажите, что $\angle DAE = 45°$.

8. При каких натуральных n числа от 1 до n можно записать в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел m и k между ними не было числа $(m+k)/2$?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 17.02.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Решите в натуральных числах уравнение $(m+1)!+(n+1)! = m^2n^2$.

2. Для каждого натурального n обозначим $c(n)$ количество цифр в десятичной записи n. Множество M натуральных чисел обладает следующим свойством: для любых двух его различных элементов a и b справедливо неравенство $c(a+b)+2 > c(a)+c(b)$. Какое наибольшее количество элементов может быть в M?

3. С натуральным числом, в записи которого более двух знаков, разрешается проделывать следующую операцию: отделить последние две цифры, умножить оставшуюся часть на 28 и прибавить к результату число, образованное отделёнными цифрами. (Например, из числа 12934 получается число $129\times28+34 = 3646$.) Описанную операцию применяют к числу 123456123456...123456 (группа цифр 123456 повторяется 2013 раз), пока в очередном получившемся числе не станет меньше трёх знаков. Какое число получится?

4. Клетки доски 4×4 красятся в красный, зеленый и синий цвета по следующим правилам: любую клетку можно покрасить в красный цвет: клетку можно покрасить в синий цвет, если она граничит по стороне с красной клеткой; клетку можно покрасить в зеленый цвет, если она граничит по стороне с синей клеткой. Клетки можно перекрашивать. Какое наибольшее количество клеток можно покрасить в зеленый цвет?

5. Алан и Давид играют в следующую игру. Они по очереди (начинает Алан) выписывают на доску пары неотрицательных целых чисел по такому правилу: вновь выписываемая пара (a, b) должна для каждой ранее выписанной пары (c, d) удовлетворять хотя бы одному из условий $a < c$ или $b < d$. Проигрывает тот, кто вынужден написать пару (0, 0). Кто выиграет при правильной игре?

6. Точки E и F расположены соответственно на сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ так, что $BE = BF$. Точка N — основание высоты, опущенной на сторону EC в треугольнике EBC. Продолжение этой высоты пересекает сторону AD в точке G. Отрезки FG и EC пересекаются в точке P. Докажите, что $NG > PC$.

7. На гипотенузе BC равнобедренного прямоугольного треугольника отмечены точки D и E такие, что $BD:DE:EC=1:2:\sqrt{3}$. Докажите, что $\angle DAE = 45°$.

8. Можно ли числа от 1 до 720 записать в таком порядке, чтобы ни для каких двух чисел m и k между ними не было числа $(m+k)/2$?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 17.02.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Докажите, что любое натуральное число, большее 100, можно представить в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых — простое, большее 5, а другое — составное.

2. Для каждого натурального n обозначим $c(n)$ количество цифр в десятичной записи n. Множество M натуральных чисел обладает следующим свойством: для любых двух его различных элементов a и b справедливо неравенство $c(a+b)+2 > c(a)+c(b)$. Какое наибольшее количество элементов может быть в M?

3. С натуральным числом, в записи которого более двух знаков, разрешается проделывать следующую операцию: отделить последние две цифры, умножить оставшуюся часть на 28 и прибавить к результату число, образованное отделёнными цифрами. (Например, из числа 12934 получается число $129\times28+34 = 3646$.) Описанную операцию применяют к числу 123456123456...123456 (группа цифр 123456 повторяется 2013 раз), пока в очередном получившемся числе не станет меньше трёх знаков. Какое число получится?

4. Клетки доски 4×4 красятся в красный, зеленый и синий цвета по следующим правилам: любую клетку можно покрасить в красный цвет: клетку можно покрасить в синий цвет, если она граничит по стороне с красной клеткой; клетку можно покрасить в зеленый цвет, если она граничит по стороне с синей клеткой. Клетки можно перекрашивать. Какое наибольшее количество клеток можно покрасить в зеленый цвет?

5. Алан и Давид играют в следующую игру. Они по очереди (начинает Алан) выписывают на доску пары неотрицательных целых чисел по такому правилу: вновь выписываемая пара (a, b) должна для каждой ранее выписанной пары (c, d) удовлетворять хотя бы одному из условий $a < c$ или $b < d$. Проигрывает тот, кто вынужден написать пару (0, 0). Кто выиграет при правильной игре?

6. Точки E и F расположены соответственно на сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ так, что $BE = BF$. Точка N — основание высоты, опущенной на сторону EC в треугольнике EBC. Продолжение этой высоты пересекает сторону AD в точке G. Отрезки FG и EC пересекаются в точке P. Докажите, что $NG > PC$.

7. На гипотенузе BC равнобедренного прямоугольного треугольника отмечены точки D и E такие, что $BD{:}DE{:}EC=1{:}2{:}\sqrt{3}$. Докажите, что $\angle DAE = 45°$.

8. На турнир матбоёв приехали 10 команд разной силы. При встрече всегда выигрывает более сильная команда, кроме одного боя, когда более сильная случайно может проиграть (ничьих не бывает; две команды могут играть между собой несколько раз). Можно ли определить сильнейшую команду менее, чем за 20 боёв?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 17.02.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Иван-царевич надел сапоги-скороходы и отправился искать Василису Прекрасную. Его первый шаг был длиннее двух метров, а каждый следующий шаг был на 1 метр длиннее предыдущего. Иван сделал несколько шагов, потом вспомнил, что не захватил лук и стрелы, и за три шага вернулся назад. Какое расстояние он успел пройти до того, как вернулся назад? Найдите все варианты ответа и докажите, что другие невозможны.

2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AD = BD = CD$, $\angle CBD = \angle BAC$ и $\angle ADB = \angle ACD$. Найдите углы исходного четырехугольника.

3. На доске написаны числа 1, 2, 3, 4, 5. Разрешается зачеркнуть любые два числа и записать вместо них их сумму и произведение. Можно ли, действуя таким образом, получить набор, в котором три раза встречается число 2013?

4. Алан и Давид играют в следующую игру. Они по очереди (начинает Алан) выписывают на доску пары целых неотрицательных чисел по такому правилу: вновь выписываемая пара (a, b) должна для каждой ранее выписанной пары (c, d) удовлетворять хотя бы одному из условий $a < c$ или $b < d$. Проигрывает тот, кто вынужден написать пару (0, 0). Кто выиграет при правильной игре?

5. Какое наибольшее количество подмножеств множества $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ можно выбрать таким образом, что объединение любых двух множеств есть N_n?

6. На турнир матбоёв приехали 10 команд разной силы. При встрече всегда выигрывает более сильная команда, кроме одного боя, когда более сильная случайно может проиграть (ничьих не бывает; две команды могут играть между собой несколько раз). Можно ли определить сильнейшую команду менее, чем за 20 боёв?

7. На гипотенузе BC равнобедренного прямоугольного треугольника отмечены точки D и E такие, что $BD{:}DE{:}EC=1{:}2{:}\sqrt{3}$. Докажите, что $\angle DAE = 45°$.

8. Найдите все четырёхзначные числа, которые в 11 раз больше квадрата суммы своих цифр.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 17.02.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Докажите, что любое натуральное число, большее 100, можно представить в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых — простое, большее 5, а другое — составное.

2. Петя выписал на доске несколько различных натуральных чисел. Оказалось, что, какие бы два из выписанных чисел ни взять, общее количество цифр в них меньше, чем количество цифр их суммы, увеличенное на 2. Какое наибольшее количество чисел мог выписать Петя?

3. С натуральным числом, в записи которого более двух знаков, разрешается проделывать следующую операцию: отделить последние две цифры, умножить оставшуюся часть на 28 и прибавить к результату число, образованное отделёнными цифрами. (Например, из числа 12934 получается число $129\times28+34 = 3646$.) Описанную операцию применяют к числу 123456123456...123456 (группа цифр 123456 повторяется 2015 раз), пока в очередном получившемся числе не станет меньше трёх знаков. Какое число получится?

4. Какое наибольшее количество подмножеств множества $A = \{1, 2, ..., n\}$ можно выбрать таким образом, что объединение любых четырех выбранных множеств есть A?

5. Алан и Давид играют в следующую игру. Они по очереди (начинает Алан) выписывают на доску пары неотрицательных целых чисел по такому правилу: вновь выписываемая пара (a, b) должна для каждой ранее выписанной пары (c, d) удовлетворять хотя бы одному из условий $a < c$ или $b < d$. Проигрывает тот, кто вынужден написать пару (0, 0). Кто выиграет при правильной игре?

6. В школьном турнире по настольному теннису принимает участие 50 учеников разной силы. При встрече всегда выигрывает более сильный школьник, но один раз за турнир один из школьников может проиграть более слабому (ничьих в настольном теннисе не бывает; двое могут играть между собой несколько раз). За какое наименьшее количество матчей можно определить сильнейшего школьника?

7. m и n — различные натуральные числа. Докажите, что $|(m+2)!-(n+2)!| > m^2n^2$.

8. Точки E и F расположены соответственно на сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ так, что $BE = BF$. Точка N — основание высоты, опущенной на сторону EC в треугольнике EBC. Продолжение этой высоты пересекает сторону AD в точке G. Отрезки FG и EC пересекаются в точке P. Докажите, что $NG > PC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 17.02.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Докажите, что любое натуральное число, большее 100, можно представить в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых — простое, большее 3, а другое — составное.

2. Петя выписал на доске несколько различных натуральных чисел. Оказалось, что, какие бы два из выписанных чисел ни взять, общее количество цифр в них меньше, чем количество цифр их суммы, увеличенное на 2. Какое наибольшее количество чисел мог выписать Петя?

3. С натуральным числом, в записи которого более двух знаков, разрешается проделывать следующую операцию: отделить последнюю цифру, умножить оставшуюся часть на 7 и прибавить к результату отделённую цифру. (Например, из числа 234 получается число $23\times7+4=165$.) Описанную операцию применяют к числу 123456789...123456789 (группа цифр 123456789 повторяется 50 раз), пока в очередное получившееся число не станет однозначным. Какое число получится?

4. Какое наибольшее количество подмножеств множества $A=\{1, 2, ..., 100\}$ можно выбрать таким образом, что объединение любых трех выбранных множеств есть A?

5. Алан и Давид играют в следующую игру. Они по очереди (начинает Алан) выписывают на доску пары целых неотрицательных чисел по такому правилу: вновь выписываемая пара (a, b) должна для каждой ранее выписанной пары (c, d) удовлетворять хотя бы одному из условий $a<c$ или $b<d$. Проигрывает тот, кто вынужден написать пару $(0, 0)$. Кто выиграет при правильной игре?

6. На турнир матбоёв приехали 10 команд разной силы. При встрече всегда выигрывает более сильная команда, но один раз за турнир одна из команд может проиграть более слабой (ничьих не бывает; две команды могут играть между собой несколько раз). Можно ли определить сильнейшую команду менее, чем за 20 боёв?

7. m и n — различные натуральные числа. Докажите, что $|(m+2)!-(n+2)!|>m^2n^2$.

8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $AD=BD=CD$, $\angle CBD=\angle BAC$ и $\angle ADB=\angle ACD$. Найдите углы этого четырехугольника.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 17.02.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Докажите, что любое натуральное число, большее 100, можно представить в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых — простое, большее 3, а другое — составное.

2. Вася написал на доске несколько различных натуральных чисел. Оказалось, что для любых двух написанных Васей чисел, количество цифр суммы этих чисел не меньше суммы количества цифр первого числа и количества цифр второго числа. Какое наибольшее количество чисел мог написать Вася?

3. Клетчатый квадрат 50×50 разбит по линиям сетки на 5 прямоугольников. Каждый прямоугольник состоит из одинакового числа клеток. Докажите, что среди этих прямоугольников можно найти 3 одинаковых (совпадающих при наложении).

4. Какое наибольшее количество подмножеств множества $A = \{1, 2, ..., n\}$ можно выбрать таким образом, что объединение любых двух выбранных множеств есть A?

5. В десяти корзинах лежат яблоки: 1, 3, 5, ..., 19 яблок. Сначала берёт одно яблоко из любой корзины Вася, потом — Гена, потом Лёва, потом опять Вася и т.д. по кругу. Проигрывает тот, после чьего хода в каких-то корзинах станет яблок поровну. Кто из них не может избежать проигрыша?

6. На турнир матбоёв приехали 16 команд разной силы. При встрече всегда выигрывает более сильная команда, но один раз за турнир одна из команд может проиграть более слабой (ничьих не бывает; две команды могут играть между собой несколько раз). Можно ли определить сильнейшую команду менее, чем за 32 боя?

7. Четыре человека с сундуком хотят переправиться через реку. Люди весят 45, 50, 60 и 65 кг, сундук — 100 кг. Лодка выдерживает груз не более 200 кг. Сундук можно погрузить в лодку или вытащить из нее только вчетвером. Как им всё-таки всем переправиться, не оставив и сундук?

8. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $AD = BD = CD$, $\angle CBD = \angle BAC$ и $\angle ADB = \angle ACD$. Найдите углы этого четырехугольника.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 17.02.2014

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Докажите, что любое натуральное число, большее 100, можно представить в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых — простое, большее 3, а другое — составное.

2. Вася написал на доске несколько различных натуральных чисел. Оказалось, что для любых двух написанных Васей, количество цифр суммы этих чисел не меньше суммы количества цифр первого числа и количества цифр второго числа. Какое наибольшее количество чисел мог написать Вася?

3. Можно ли на всех сторонах и в вершинах девятиугольника расставить суммарно 2014 точек таким образом, чтобы на всех сторонах девятиугольника было поровну точек?

4. Прямоугольник 4×100 разбит на доминошки (прямоугольники 1×2). Какое наибольшее количество квадратов 2×2, состоящих из двух доминошек, может оказаться в таком разбиении? (Квадраты могут пересекаться).

5. Избирательный участок работал три часа. Наблюдатель от партии зелёных дежурил первые два часа, а от партии оранжевых — последние два часа. Каждый наблюдатель отметил, что во время дежурства его партия получала на 100 голосов больше соперников. С каким наибольшим возможным преимуществом (по количеству голосов) могла победить одна из партий, если всего проголосовали 900 человек, и каждый отдал свой голос за одну из двух указанных партий?

6. На доске написаны числа 5, 6, 7, 8, 9. Разрешается зачеркнуть любые два числа и записать вместо них их сумму и произведение. Можно ли, действуя таким образом, получить набор, в котором три раза встречается число 20142013?

7. На турнир матбоёв приехали 10 команд разной силы. При встрече всегда выигрывает более сильная команда. И только один раз за весь турнир может случиться так, что в бою выиграет более слабая команда (ничьих не бывает; две команды могут играть между собой несколько раз). Можно ли определить сильнейшую команду менее, чем за 20 боёв?

8. В десяти корзинах лежат яблоки: 1, 3, 5, ..., 19 яблок. Сначала берёт одно яблоко из любой корзины Вася, потом — Гена, потом Лёва, потом опять Вася и т.д. по кругу. Проигрывает тот, после чьего хода в каких-то корзинах станет яблок поровну. Кто из них не может избежать проигрыша?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 17.02.2014

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Докажите, что любое натуральное число, большее 100, можно представить в виде суммы двух натуральных чисел, одно из которых — простое, большее 3, а другое — составное.

2. На шахматной доске стоят ферзь, две ладьи и два коня так, что каждая фигура бьёт ровно одну фигуру и побита ровно одной фигурой. Докажите, что ферзь бьёт ладью по диагонали.

3. На турнир матбоёв приехали 10 команд разной силы. При встрече всегда выигрывает более сильная команда. И только один раз за весь турнир может случиться так, что в бою выиграет более слабая команда (ничьих не бывает; две команды могут играть между собой несколько раз). Можно ли определить сильнейшую команду менее, чем за 20 боёв?

4. Можно ли подставить вместо букв различные ненулевые цифры, чтобы равенство оказалось верным: П:О+Д:С = Т:А+В:Ь ?

5. Пять отрезков образуют звезду. На отрезках отмечены N точек так, что на всех отрезках – поровну точек. Чему может равняться N?

6. В десяти корзинах лежат яблоки: 1, 3, 5, ..., 19 яблок. Сначала берёт одно яблоко из любой корзины Вася, потом – Гена, потом Лёва, потом опять Вася и т.д. по кругу. Проигрывает тот, после чьего хода в каких-то корзинах станет яблок поровну. Кто из них не может избежать проигрыша?

7. Избирательный участок работал три часа. Наблюдатель от партии зелёных дежурил первые два часа, а от партии оранжевых — последние два часа. Каждый наблюдатель отметил, что во время дежурства его партия получала на 100 голосов больше соперников. С каким наибольшим возможным преимуществом могла победить одна из партий, если всего проголосовали не более 900 человек, и каждый отдал свой голос за одну из двух указанных партий?

8. На доске написаны числа: 2012, 2013, 2014, 2015, 2016. Разрешается зачеркнуть любые два числа и записать вместо них либо их сумму и произведение, либо их разность и произведение. Можно ли, действуя таким образом, получить набор: 2013, 2014, 2015, 2016, 2017?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 17.02.2014

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Четыре человека с сундуком хотят переправиться через реку. Люди весят 45, 50, 60 и 65 кг, сундук — 100 кг. Лодка выдерживает груз не более 200 кг. Сундук можно погрузить в лодку или вытащить из нее только вчетвером. Как им всё-таки всем переправиться, не оставив и сундук

2. На шахматной доске стоят ферзь, два коня и две ладьи так, что каждая фигура бьёт ровно одну фигуру и побита ровно одной фигурой. Докажите, что ферзь бьёт ладью по диагонали.

3. Заяц и черепаха побежали вокруг прямоугольного парка в разные стороны, стартовав от угла. Заяц бегает в 43 раза быстрее черепахи. Черепаха встретила зайца на следующем углу, а до этого успела встретить его ещё 3 раза. Во сколько раз сторона, вдоль которой ползла черепаха, короче другой стороны прямоугольника?

4. Можно ли в ребус П:О+Д:С = Т:А+В:Ь вместо букв подставить 8 различных цифр так, чтобы равенство осталось верным?

5. Клетчатый квадрат 50×50 разбит по линиям сетки на 5 прямоугольников равной площади. Докажите, что среди этих прямоугольников можно найти 3 одинаковых (совпадающих при наложении).

6. Нарисуйте 6 прямых и отметьте на них 7 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно по 3 точки.

7. У Сары столько же орехов, сколько у Лары и Динары вместе. У Сары и Лары вместе орехов вдвое больше чем у Динары. У одной из них 43 ореха. А сколько всего орехов у них троих?

8. В десяти корзинах лежат яблоки: 1, 3, 5, ..., 19 яблок. Сначала берёт одно яблоко из любой корзины Вася, потом – Гена, потом Лёва, потом опять Вася и т.д. по кругу. Проигрывает тот, после чьего хода в каких-то корзинах станет яблок поровну. Кто из них не может избежать проигрыша? (Если две корзины пустые, в них тоже яблок поровну)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 18.02.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Существуют ли выпуклый пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ и точка X внутри него такие, что $XA_i = A_{i+2}A_{i+3}$ при всех $i = 1, 2, 3, 4, 5$? (Индексы рассматриваются по модулю 5.)

2. Назовём натуральное число N *хорошим*, если оно равно 1 или является произведением чётного количества (не обязательно различных) простых чисел. Пусть $P(x) = (x–a)(x–b)$, где a и b — натуральные числа. Докажите, что существуют различные натуральные a, b такие, что все числа $P(1), P(2), \dots , P(2014)$ — хорошие.

3. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F такие, что прямые AE и CF параллельны. Прямая, параллельная AD, пересекает отрезок AF в точке G, а прямую, проходящую через A параллельно BD — в точке I. Наконец, прямые AE и CG пересекаются в точке H. Докажите, что точка H лежит на прямой BI.

4. На доске написаны несколько натуральных чисел. Разность любых двух из них содержит только цифры 2, 3, 6, 9 (не обязательно все эти цифры). Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

5. Найдите все упорядоченные тройки натуральных чисел (a, b, c) такие, что все три числа a^2+2b+c, b^2+2c+a, c^2+2a+b — точные квадраты.

6. При каких целых d существует последовательность целых чисел $a_1, a_2, \dots$ такая, что в последовательности $a_1a_3, a_2a_4, a_3a_5, \dots, a_na_{n+2}, \dots$ каждый член, начиная со второго, больше предыдущего на d?

7. Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске $5n\times5n$ так, чтобы никакая вертикаль или горизонталь не содержала группу из $3n$ неотмеченных клеток подряд?

8. В каждой из 7 чашек лежит по 5 шариков. В какое наименьшее количество цветов можно раскрасить эти шарики так, чтобы в каждой чашке все шарики были разного цвета, и для каждых двух цветов шарики обоих этих цветов одновременно встречались не более, чем в одной чашке?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 18.02.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Существуют ли выпуклый пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ и точка X внутри него такие, что $XA_i = A_{i+2}A_{i+3}$ при всех $i = 1, 2, 3, 4, 5$? (Индексы рассматриваются по модулю 5.)

2. Назовём натуральное число N *хорошим*, если оно равно 1 или является произведением чётного количества (не обязательно различных) простых чисел. Пусть $P(x) = (x–a)(x–b)$, где a и b — натуральные числа. Оказалось, что число $P(n)$ — хорошее при всех натуральных $n > a+b$. Докажите, что $a = b$.

3. На стороне AB треугольника ABC отмечена такая точка D, что $AB = CD$. Докажите, что $BC > AD$.

4. На доске написаны несколько натуральных чисел. Разность любых двух из них содержит только цифры 2, 3, 6, 9 (не обязательно все эти цифры). Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

5. На окружности отмечена 31 точка. Отмеченные точки покрашены в 6 цветов. Докажите, что найдется четырехугольник с одноцветными вершинами, внутри которого не содержится центр окружности.

6. При каких целых d существует последовательность целых чисел a_1, a_2, ... такая, что в последовательности a_1a_3, a_2a_4, a_3a_5, ..., a_na_{n+2}, ... каждый член, начиная со второго, больше предыдущего на d?

7. Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске $5n\times5n$ так, чтобы никакая вертикаль или горизонталь не содержала группу из $3n$ неотмеченных клеток подряд?

8. В каждой из 7 чашек лежит по 5 шариков. В какое наименьшее количество цветов можно раскрасить эти шарики так, чтобы в каждой чашке все шарики были разного цвета, и для каждых двух цветов шарики обоих этих цветов одновременно встречались не более, чем в одной чашке?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 18.02.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Существуют ли выпуклый пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$ и точка X внутри него такие, что $XA_i = A_{i+2}A_{i+3}$ при всех $i = 1, 2, 3, 4, 5$? (Индексы рассматриваются по модулю 5.)

2. Назовём натуральное число N *плохим*, если оно является произведением нечётного количества (не обязательно различных) простых чисел. Существует ли натуральное a такое, что число $an+1$ плохое при всех натуральных n?

3. На стороне AB треугольника ABC отмечена такая точка D, что $AB = CD$. Докажите, что $BC > AD$.

4. На доске написаны несколько натуральных чисел. Разность любых двух из них содержит только цифры 2, 3, 6, 9 (не обязательно все эти цифры). Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

5. На окружности отмечена 31 точка. Отмеченные точки покрашены в 6 цветов. Докажите, что найдется четырехугольник с одноцветными вершинами, внутри которого не содержится центр окружности.

6. При каких целых d существует последовательность целых чисел $a_1, a_2, \dots$ такая, что в последовательности $a_1a_3, a_2a_4, a_3a_5, \dots, a_na_{n+2}, \dots$ каждый член, начиная со второго, больше предыдущего на d?

7. Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске $5n\times5n$ так, чтобы никакая вертикаль или горизонталь не содержала группу из $3n$ неотмеченных клеток подряд?

8. В каждой из 6 чашек лежит по 5 шариков. В какое наименьшее количество цветов можно раскрасить эти шарики так, чтобы в каждой чашке все шарики были разного цвета, и для каждых двух цветов шарики обоих этих цветов одновременно встречались не более, чем в одной чашке?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 18.02.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Натуральное число N имеет 2014 различных простых делителей. Восьмиклассник Вова для каждого простого делителя нашёл наибольший делящийся на него собственный делитель числа N. Вова утверждает, что сумма всех найденных им чисел равна самому числу N. Стоит ли ему верить?

2. В остроугольном треугольнике ABC M — середина стороны BC, BH и CN — высоты, $\angle NBM = \angle HMN$, $AC = 8$. Найдите NH.

3. Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, у которого сумма всех тупых углов равна сумме всех нетупых углов?

4. Три попарно различных положительных числа x, y, z подобраны так, что выполнено равенство $x^2yz+xy^2z^2–4xyz+x+yz = 0$. Сколько среди них чисел, больших 1?

5. На окружности отмечена 31 точка. Отмеченные точки покрашены в 6 цветов. Докажите, что найдется четырехугольник с одноцветными вершинами, внутри которого не содержится центр окружности.

6. На столе лежат 300 монет, правая — рубль, остальные — монеты в 1 копейку. Петя и Вася по очереди берут монеты, начиная слева, по 1 или 2 монеты за ход. Начинает Петя. Кто из них в итоге может получить больше денег, как бы ни играл соперник?

7. Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске $5n\times5n$ так, чтобы никакая вертикаль или горизонталь не содержала группу из $3n$ неотмеченных клеток подряд?

8. На доске написаны несколько натуральных чисел. Разность любых двух из них содержит только цифры 2, 3, 6, 9 (не обязательно все эти цифры). Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 18.02.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Решите в простых числах уравнение $2x^2+1 = y^5$.

2. В каждой из 6 чашек лежит по 5 шариков. В какое наименьшее количество цветов можно раскрасить эти шарики так, чтобы в каждой чашке все шарики были разного цвета, и для каждых двух цветов шарики обоих этих цветов одновременно встречались не более, чем в одной чашке?

3. На столе лежат в ряд 2013 монет, правая — рубль, остальные — монеты в 1 копейку. Петя и Вася по очереди берут монеты, начиная слева, по 1 или 2 монеты за ход. Начинает Петя. Кто из них в итоге может получить больше денег, как бы ни играл соперник?

4. На доске написаны несколько натуральных чисел. Разность любых двух из них содержит только цифры 2, 3, 6, 9 (не обязательно все эти цифры). Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

5. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить в таблице $7n\times7n$ так, чтобы в каждой вертикальной или горизонтальной полоске $1\times4n$ была хотя бы одна отмеченная клетка.

6. На окружности отмечена 31 точка. Отмеченные точки покрашены в 6 цветов. Докажите, что найдется четырехугольник с одноцветными вершинами, внутри которого не содержится центр окружности.

7. Для любых положительных чисел a, b, x и y докажите неравенство

$$\left(a\frac{x}{y}+b\right)^2+\left(a\frac{y}{x}+b\right)^2\geq 2(a+b)^2$$

8. На стороне AB треугольника ABC отмечена такая точка D, что $AB = CD$. Докажите, что $BC > AD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 18.02.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Решите в простых числах уравнение $2x^2+1 = y^5$.

2. В каждой из 6 чашек лежит по 5 шариков. В какое наименьшее количество цветов можно раскрасить эти шарики так, чтобы в каждой чашке все шарики были разного цвета, и для каждых двух цветов шарики обоих этих цветов одновременно встречались не более, чем в одной чашке?

3. На столе лежат в ряд 2014 монет, правая — рубль, остальные — монеты в 1 копейку. Петя и Вася по очереди берут монеты, начиная слева, по 1 или 2 монеты за ход. Начинает Петя. Кто из них в итоге может получить больше денег, как бы ни играл соперник?

4. На доске написаны несколько натуральных чисел. Разность любых двух из них содержит только цифры 2, 3, 6, 9 (не обязательно все эти цифры). Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

5. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить в таблице $5n\times5n$ так, чтобы в каждой вертикальной или горизонтальной полоске $1\times3n$ была хотя бы одна отмеченная клетка.

6. На окружности отмечена 31 точка. Отмеченные точки покрашены в 6 цветов. Докажите, что найдется четырехугольник с одноцветными вершинами, внутри которого не содержится центр окружности.

7. Для любых положительных чисел a, b, x и y докажите неравенство

$$\left(a\frac{x}{y}+b\right)^2+\left(a\frac{y}{x}+b\right)^2\geq 2(a+b)^2$$

8. На стороне AB треугольника ABC отмечена такая точка D, что $AB = CD$. Известно, что $\angle BDC = 70°$ и $\angle BCD \leq 20°$. Докажите, что $BC > AD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 18.02.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Натуральное число N имеет 10 различных простых делителей. Семиклассник Вова для каждого простого делителя нашёл наибольший делящийся на него собственный делитель числа N. Вова утверждает, что сумма всех найденных им чисел равна самому числу N. Стоит ли ему верить?

2. В каждой из 6 чашек лежит по 5 шариков. В какое наименьшее количество цветов можно раскрасить эти шарики так, чтобы в каждой чашке все шарики были разного цвета, и для каждых двух цветов шарики обоих этих цветов одновременно встречались не более, чем в одной чашке?

3. На столе лежат в ряд 302 монеты, правая — рубль, остальные — монеты в 1 копейку. Петя и Вася по очереди берут монеты, начиная слева, по 1 или 2 монеты за ход. Начинает Петя. Кто из них в итоге может получить больше денег, как бы ни играл соперник?

4. Есть три двузначных числа. Если сложить те из них, в записи которых есть цифра 3, получится 80. Если сложить числа, где есть цифра 4, получится 90. А сколько получится, если сложить все 3 числа?

5. Какое наименьшее количество клеток нужно отметить в таблице 10×10 так, чтобы в каждой вертикальной или горизонтальной полоске 1×6 была хотя бы одна отмеченная клетка.

6. Среди трёх товарищей-богатырей один самый сильный, другой — самый ловкий, а третий — самый крутой. Самый сильный всегда говорит правду, самый ловкий всегда лжёт, а самый крутой может говорить и так, и этак. И Илья, и Алёша сказали: «Я — самый крутой!», а Добрыня сказал: «Илья сильнее самого ловкого из нас». Кто есть кто?

7. Школе требуется срочно обеспечить 100 электрических розеток в компьютерном классе. Пока такая розетка лишь одна, но можно подключить удлиннители. Удлиннитель на 3 розетки стоит 210 руб, на 5 розеток — 400 руб, на 6 розеток — 500 руб. Какую наименьшую сумму надо затратить, чтобы выполнить требование?

8. На стороне AB треугольника ABC отмечена такая точка D, что $AB = CD$. Известно, что $\angle BDC = 80°$ и $\angle BCD = 20°$. Докажите, что $BC > AD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 18.02.2014

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На доске написаны несколько натуральных чисел. Разность любых двух из них содержит только цифры 2, 3, 6, 9 (не обязательно все эти цифры). Какое наибольшее количество чисел может быть на доске?

2. Какое наименьшее количество клеток можно отметить на доске 10×10 так, чтобы никакая вертикаль или горизонталь не содержала группу из шести неотмеченных клеток подряд?

3. В ряд по возрастанию веса лежат 6 яблок различных весов. Известно, что их можно разбить на две тройки, в каждой тройке одно яблоко весит как два других вместе. Можно ли за одно взвешивание найти два яблока из разных троек?

4. 16 точек поставлены в виде квадрата 4×4. Можно ли выделить из них 7 пар и каждую пару соединить отрезком так, чтобы никакие два отрезка не пересекались и не были параллельными? (Считаем конец отрезка принадлежащим отрезку).

5. Можно ли первые 1000 простых чисел, больших двойки, разбить на две группы по 500 чисел таким образом, чтобы суммы квадратов чисел в этих группах были равны?

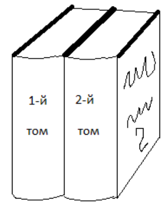
6. На шахматной доске 100×100 стоит 100 не бьющих друг друга ферзей. Этот квадрат разбили на 4 квадрата 50×50. Докажите, что в каждом из квадратов разбиения есть хотя бы по одному ферзю.

7. На столе лежат в ряд 300 монет, правая — рубль, остальные — монеты в 1 копейку. Петя и Вася по очереди берут монеты, начиная слева, по 1 или 2 монеты за ход. Начинает Петя. Кто из них в итоге может получить больше денег, как бы ни играл соперник?

8. На доске написаны несколько дробей. Сумма всех дробей с нечетными знаменателями равна произведению всех дробей с четными знаменателями. Могут ли все дроби быть несократимыми?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 18.02.2014

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА



1. Есть два тома по 800 страниц в каждом. Каждая из обложек тома в 10 раз толще бумаги, на которой напечатаны обе книги. В каждый из томов вложили закладку. Если тома плотно поставить на полку так, как показано на рисунке, то расстояние между закладками окажется втрое меньше общей толщины двух томов. Между какими страницами лежит закладка во втором томе, если в первом она лежит между 100-й и 101-й страницей?

2. На доске написаны несколько дробей. У одной из них числитель равен 2014. Перемножив те дроби, у которых знаменатели нечётны, получили нечетное число. Могут ли все дроби быть несократимыми?

3. Есть три двузначных числа. Если сложить те из них, в записи которых есть цифра 3, получится 80. Если сложить числа, где есть цифра 4, получится 90. А сколько получится, если сложить все 3 числа?

4. В ряд по возрастанию веса лежат 4 яблока (все веса различны). Известно, что из них можно выбрать только одну *особую* тройку, то есть тройку, где самое тяжелое яблоко весит как два других вместе. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь найти два яблока из особой тройки.

5. Школе требуется обеспечить 100 электрических розеток в компьютерном классе. Пока такая розетка лишь одна, но можно подключить удлиннители. Удлиннитель на 3 розетки стоит 210 руб, на 5 розеток — 400 руб, на 6 розеток — 500 руб. Какую наименьшую сумму надо затратить, чтобы выполнить требование?

6. На столе лежат в ряд 300 монет, правая — рубль, остальные — монеты в 1 копейку. Петя и Вася по очереди берут монеты, начиная слева, по 1 или 2 монеты за ход. Начинает Петя. Кто из них в итоге может получить больше денег, как бы ни играл соперник?

7. На шахматной доске 100×100 стоит 100 не бьющих друг друга ферзей. Этот квадрат разбили на 4 квадрата 50×50. Докажите, что в каждом из квадратов разбиения есть хотя бы по одному ферзю.

8. 16 точек поставлены в виде квадрата 4×4. Можно ли выделить из них 7 пар и каждую пару соединить отрезком так, чтобы никакие два отрезка не пересекались и не были параллельными? (Считаем конец отрезка принадлежащим отрезку).

XLIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 15-21.02.2014

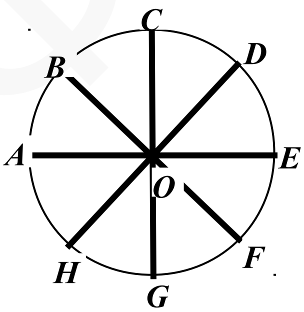
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 18.02.2014

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. На доске написаны несколько дробей, у одной из них числитель равен 2014. Перемножив те дроби, у которых знаменатели нечётны, получили нечетное целое число. Могут ли все дроби быть несократимыми?

2. От школы потребовали срочно обеспечить 100 электрических розеток в компьютерном классе. Пока такая розетка лишь одна, но можно создавать новые розетки с помощью удлинителей. Удлинитель на 3 розетки стоит 260 руб, на 5 розеток – 400 руб, на 6 розеток – 530 руб. Можно ли выполнить требование, затратив менее 10000 руб?

3. Шестиклассник Вася нарисовал на полу мелом окружность с центром *O*, разделил её точками *A, B, C, D, E, F, G, H* на 8 одинаковых частей и соединил противоположные точки дорожками из варенья *AE, BF, CG, DH* (см. рис.). Дрессированная муха Маша проползает путь *ABOCDOEFOGHOA* за 1 час 50 минут, а путь *ACOEGOA* за 1 час. За какое время Маша проползёт всю окружность? (Скорости движения Маши по меловой дорожке и дорожке из варенья, конечно же, отличаются).

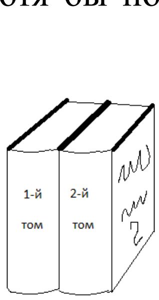


4. Есть три двузначных числа. Если сложить те из них, в записи которых есть цифра 3, получится 80. Если сложить числа, где есть цифра 4, получится 90. А сколько получится, если сложить все 3 числа?

5. Среди трёх товарищей-богатырей один самый сильный, другой — самый ловкий, а третий — самый крутой. Самый сильный всегда говорит правду, самый ловкий всегда лжёт, а самый крутой может говорить и так, и этак. И Илья, и Алёша сказали: «Я — самый крутой!», а Добрыня сказал: «Среди нас есть богатырь, который ниже ростом самого крутого и слабее Ильи». Известно, что все богатыри — разного роста. Кто есть кто?

6. На клетчатой доске 10×10 стоит 10 не бьющих друг друга ферзей. Доску разбили на 4 квадрата 5×5. Докажите, что в каждом из этих четырёх квадратов есть хотя бы по одному ферзю.

7. Есть два тома по 800 страниц в каждом. Каждая из обложек тома в 10 раз толще бумаги, на которой напечатаны обе книги. В каждый из томов вложили закладку. Если тома плотно поставить на полку так, как показано на рисунке, то расстояние между закладками окажется втрое меньше общей толщины двух томов. Между какими страницами лежит закладка во втором томе, если в первом она лежит между 100-й и 101-й страницей?



8. В ряд по возрастанию веса лежат 4 яблока (все веса различны). Известно, что из них можно выбрать только одну *особую* тройку, то есть тройку, где самое тяжелое яблоко весит как два других вместе. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь найти два яблока из особой тройки.

XLIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 15-21.02.2014

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 20.02.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Точки E и F лежат на основаниях AB и CD трапеции $ABCD$. Отрезки CE и BF пересекаются в точке H, а отрезки ED и AF — в точке G. Докажите, что $S_{EHFG} \le S_{ABCD}/4$.

2. На вечеринку пришли 100 человек. Докажите, что среди них найдутся два человека A и B такие, что среди 98 оставшихся есть по крайней мере 48 человек, каждый из которых знает либо и A, и B, либо ни одного из них.

3. Дано положительное число $u < 1$. Положим $u_1 = 1+u$, $u_2 = \dfrac{1}{u_1}+u$, ..., $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}+u$ при $n \ge 1$. Докажите, что $u_n > 1$ при всех натуральных n.

4. Докажите, что число $\left[\dfrac{n}{1}\right]+\left[\dfrac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\dfrac{n}{n}\right]+\left[\sqrt{n}\right]$ чётно при любом натуральном n.

5. В клетках таблицы $n\times n$ расставлены натуральные числа так, что числа, стоящие в клетках с общей стороной, отличаются не больше, чем на 2. Какое наибольшее количество различных чисел может быть в таблице?

6. Точки D и M лежат на сторонах BC и AB треугольника ABC соответственно. Точка P лежит на отрезке AD. Прямая DM пересекает отрезок BP, продолжение AC за точку C и продолжение PC за точку C в точках E, F и N соответственно. Докажите, что если $DE = DF$, то $DM = DN$.

7. Две кучки камней первоначально пусты. Разрешается добавить к двум кучкам любые неотрицательные числа камней, отличающиеся на 1. Повторять ходы (то есть добавлять те же количества камней в те же кучки) нельзя. Докажите, что две кучки из m и n камней можно получить тогда и только тогда, когда $n+m \ge (n-m)^2$.

8. Множество M натуральных чисел, больших единицы, обладает следующими свойствами:

(1) если n содержится в M, то в M содержатся и все делители n, большие 1;

(2) если различные a и b содержатся в M, то в M содержится и $ab+1$.

Докажите, что если в M больше одного элемента, то в нём содержатся все натуральные числа, большие единицы.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 20.02.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Точки E и F лежат на основаниях AB и CD трапеции $ABCD$. Отрезки CE и BF пересекаются в точке H, а отрезки ED и AF — в точке G. Докажите, что $S_{EHFG} \leq S_{ABCD}/4$.

2. На вечеринку пришли 100 человек. Докажите, что среди них найдутся два человека A и B такие, что среди 98 оставшихся есть по крайней мере 25 человек, каждый из которых знает либо и A, и B, либо ни одного из них.

3. Даны положительные числа a_1, a_2, ..., a_{2014}. Докажите неравенство $a_1+...+a_{2014} \leq 2013+\max(1, a_1)\cdot...\cdot\max(1, a_{2014})$.

4. Докажите, что число $\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]+\left[\sqrt{n}\right]$ чётно при любом натуральном n.

5. В клетках таблицы 8×8 расставлены натуральные числа так, что числа, стоящие в клетках с общей стороной, отличаются не больше, чем на 2. Какое наибольшее количество различных чисел может быть в таблице?

6. Игорь отметил внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ две точки P и Q. Ему показалось, что каждый из отрезков DP и BP больше, чем каждый из отрезков AP и CP, а каждый из отрезков DQ и BQ, наоборот, меньше, чем каждый из отрезков AQ и CQ. Докажите, что Игорь заблуждается.

7. Две кучки камней первоначально пусты. Разрешается добавить к двум кучкам любые неотрицательные числа камней, отличающиеся на 1. Повторять ходы (то есть добавлять те же количества камней в те же кучки) нельзя. Докажите, что две кучки из m и n камней можно получить тогда и только тогда, когда $n+m \geq (n-m)^2$.

8. Докажите, что не существует таких простых чисел p и q, что $p^2+1000pq+q^2$ — точный квадрат.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 20.02.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Точки E и F лежат на основаниях AB и CD трапеции $ABCD$. Отрезки CE и BF пересекаются в точке H, а отрезки ED и AF — в точке G. Докажите, что $S_{EHFG} \le S_{ABCD}/4$.

2. На вечеринку пришли 100 человек. Докажите, что среди них найдутся два человека A и B такие, что среди 98 оставшихся есть по крайней мере 25 человек, каждый из которых знает либо и A, и B, либо ни одного из них.

3. Даны числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2014}$, большие 1. Докажите, что $a_1+a_2+\ldots+a_{2014} \le 2013+a_1\cdot\ldots\cdot a_{2014}$.

4. Докажите, что число $\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]+\left[\sqrt{n}\right]$ чётно при любом натуральном n.

5. В клетках таблицы 8×8 расставлены натуральные числа так, что числа, стоящие в клетках с общей стороной, отличаются не больше, чем на 2. Какое наибольшее количество различных чисел может быть в таблице?

6. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка P, что $BP > AP$ и $BP > CP$. Докажите, что $\angle ABC < 90°$.

7. Две кучки камней первоначально пусты. Разрешается добавить к двум кучкам любые неотрицательные числа камней, отличающиеся на 1. Повторять ходы (то есть добавлять те же количества камней в те же кучки) нельзя. Докажите, что две кучки из m и n камней можно получить тогда и только тогда, когда $n+m \ge (n-m)^2$.

8. Докажите, что не существует таких простых чисел p и q, что $p^2+1000pq+q^2$ — точный квадрат.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 20.02.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Существует ли выпуклый шестиугольник, у которого все углы равны, а стороны, взятые в некотором порядке, имеют длины 1, 2, 3, 4, 5, 6?

2. Восьмиклассник Вася написал на доске две дроби $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Его друг Петя написал на листочке 10 натуральных чисел и Васе их не показывает. Вася пишет новые дроби по следующему правилу. Берёт две имеющиеся на доске дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, получает дробь $\frac{a+c}{b+d}$, сокращает её и записывает на доску полученную несократимую дробь. Как только на доске появляется дробь, знаменатель которой взаимно прост с каждым из написанных Петей чисел, учительница Марья Ивановна ставит Васе пятёрку в журнал. Есть ли у Васи стратегия, позволяющая ему гарантированно получить пятёрку?

3. Целые числа a, b подобраны так, что выполняется равенство $(a-b)^2 = a+8b-16$. Докажите, что число a есть точный квадрат.

4. От пса в будке до кота идет прямая дорожка. На середину дорожки положили кило сосисок, и животные одновременно бросились к ним. Кот бегает вдвое быстрее пса, а ест вдвое медленнее. Добежав до сосисок, оба ели без драки, и кот съел вдвое больше пса. А какую часть сосисок съел бы кот, если бы их положили на дорожку втрое ближе к псу, чем к коту?

5. Можно ли расставить в клетках таблицы $n \times n$ $3n-2$ различных натуральных числа так, чтобы числа, стоящие в клетках с общей стороной, отличались не больше, чем на 2?

6. В лагерь заехало несколько детей, среди которых есть двое знакомых и есть двое незнакомых. Докажите, что среди них можно выбрать троих таким образом, чтобы один из этих троих был знаком ровно с одним из двоих оставшихся.

7. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка P, что $BP > AP$ и $BP > CP$. Докажите, что угол ABC острый.

8. На столе лежат 18 монет, одинаковых по внешнему виду. 16 из них весят 1 г, остальные две — по 2 г. Есть обычные двухчашечные весы. Разрешается на одну чашу класть одну монету, а на другую — две монеты. Как с помощью таких весов определить обе тяжелые монеты за 19 взвешиваний?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 20.02.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Докажите, что не существует таких простых чисел p и q, что $p^2+1000pq+q^2$ — точный квадрат.

2. Назовем раскраску натуральных чисел от 1 до k в черный и белый цвета *хорошей*, если найдется 100 (необязательно различных) одноцветных чисел, сумма которых имеет тот же цвет. При каком наименьшем k любая раскраска чисел от 1 до k является хорошей?

3. В лагерь приехал 101 школьник. Докажите, что можно найти двух школьников A и B, для которых есть 25 школьников, каждый из которых либо знаком и с A, и с B, либо не знаком ни с A, ни с B.

4. На столе лежат 18 монет, одинаковых по внешнему виду. 16 из них весят 1 г, остальные две — по 2 г. Есть обычные двухчашечные весы. Разрешается на одну чашу класть одну монету, а на другую — две монеты. Как с помощью таких весов определить обе тяжелые монеты за 19 взвешиваний?

5. Известно, что для некоторого натурального числа n есть 2014 различных натуральных чисел, каждое из которых не является делителем n. Кроме того, их произведение является делителем n^2. Какое наименьшее число простых чисел (не обязательно различных) может быть в разложении числа n на простые сомножители?

6. Петя и Вася играют в игру. На столе по кругу лежит 100 фишек чёрной стороной вверх. Другая сторона у всех фишек белая. Мальчики ходят по очереди, начинает Петя. За один ход он может выбрать 3 фишки, лежащие подряд, и перевернуть некоторые из них (по своему выбору). Вася своим ходом может перевернуть любую фишку. Петя выиграет, если в какой-то момент хотя бы 68 фишек будут лежать белой стороной вверх. Может ли Вася помешать Пете это сделать? (Оба мальчика своим ходом могут и ничего не переворачивать).

7. Числа x и y удовлетворяют условию $x^2+y^2 = 1$. Докажите неравенство $18xy \leq 7+8x^2y^2$.

8. Игорь отметил внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ две точки P и Q. Ему показалось, что каждый из отрезков DP и BP больше, чем каждый из отрезков AP и CP, а каждый из отрезков DQ и BQ, наоборот, меньше, чем каждый из отрезков AQ и CQ. Докажите, что Игорь заблуждается.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 20.02.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Таблица 10×10 заполнена числами 1, 2, 3 таким образом, что суммы чисел во всех строках и во всех столбцах равны. Может ли в этой таблице быть ровно две двойки?

2. Натуральные числа от 1 до 10000 покрашены в черный и белый цвета. Докажите, что найдется 90 (не обязательно различных) одноцветных чисел, сумма которых имеет тот же цвет.

3. В лагерь заехало несколько детей, среди которых есть двое знакомых и есть двое незнакомых. Докажите, что среди них можно выбрать троих таким образом, чтобы один из этих троих был знаком ровно с одним из двоих оставшихся.

4. На столе лежат 18 монет, одинаковых по внешнему виду. 16 из них весят 1 г, остальные две — по 2 г. Есть обычные двухчашечные весы. Разрешается на одну чашу класть одну монету, а на другую — две монеты. Как с помощью таких весов определить обе тяжелые монеты за 19 взвешиваний?

5. Известно, что для некоторого натурального числа n есть 2014 различных натуральных чисел, каждое из которых не является делителем n. Кроме того, их произведение является делителем n^2. Какое наименьшее число простых чисел (не обязательно различных) может быть в разложении числа n на простые сомножители?

6. Петя и Вася играют в игру. На столе по кругу лежит 100 фишек чёрной стороной вверх. Другая сторона у всех фишек белая. Мальчики ходят по очереди, начинает Петя. За один ход он может выбрать 3 фишки, лежащие подряд, и перевернуть некоторые из них (по своему выбору). Вася своим ходом может перевернуть любую фишку. Петя выиграет, если в какой–то момент хотя бы 70 фишек будут лежать белой стороной вверх. Может ли Вася помешать Пете это сделать? (Оба мальчика своим ходом могут и ничего не переворачивать).

7. Числа x и y удовлетворяют условию $x^2+y^2 = 1$. Докажите неравенство $18xy \le 7+8x^2y^2$.

8. Игорь отметил внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ две точки P и Q. Ему показалось, что каждый из отрезков DP и BP больше, чем каждый из отрезков AP и CP, а каждый из отрезков DQ и BQ, наоборот, меньше, чем каждый из отрезков AQ и CQ. Докажите, что Игорь заблуждается.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 20.02.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Таблица 10×10 заполнена числами 1, 2, 3 таким образом, что суммы чисел во всех строках и во всех столбцах равны. Может ли в этой таблице быть ровно две двойки?

2. От пса в будке до кота идет прямая дорожка. На середину дорожки положили кило сосисок, и животные одновременно бросились к ним. Кот бегает вдвое быстрее пса, а ест вдвое медленнее. Добежав до сосисок, оба ели без драки, и кот съел вдвое больше пса. А какую часть сосисок съел бы кот, если бы их положили на дорожку втрое ближе к псу, чем к коту?

3. Во сколько раз натуральных делителей у числа 101! больше, чем у числа 100! ?

4. На столе лежат 18 монет, одинаковых по внешнему виду. 16 из них весят 1 г, остальные две — по 2 г. Есть обычные двухчашечные весы. Разрешается на одну чашу класть одну монету, а на другую — две монеты. Как с помощью таких весов определить обе тяжелые монеты за 19 взвешиваний?

5. Две гандбольные команды решили играть до тех пор, пока одна из команд не забьёт 29 мячей. После каждого забитого мяча счёт на табло обновляется. Какое наибольшее число раз сумма цифр на табло может быть равна 10?

6. Петя и Вася играют в игру. На столе по кругу лежит 100 фишек чёрной стороной вверх. Другая сторона у всех фишек белая. Мальчики ходят по очереди, начинает Петя. За один ход он может выбрать 3 фишки, лежащие подряд, и перевернуть некоторые из них (по своему выбору). Вася своим ходом может перевернуть любую фишку. Петя выиграет, если в какой–то момент хотя бы 70 фишек будут лежать белой стороной вверх. Может ли Вася помешать Пете это сделать? (Оба мальчика своим ходом могут и ничего не переворачивать).

7. Клетчатый прямоугольник можно разрезать на Г-тетрамино и Т-тетрамино (четырехклеточные фигуры в форме букв Г и Т). Докажите, что его можно разрезать на прямоугольники 1×4 и прямоугольники 2×2 (не обязательно использовать фигурки обоих типов).

8. Внутри треугольника ABC выбрана такая точка P, что $BP > AP$ и $BP > CP$. Докажите, что $\angle ABC < 90°$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 20.02.2014

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На столе лежат 18 монет, одинаковых по внешнему виду. 16 из них весят 1 г, остальные две — по 2 г. Есть обычные двухчашечные весы. Разрешается на одну чашу класть одну монету, а на другую — две монеты. Как с помощью таких весов определить хотя бы одну тяжелую монету за 17 взвешиваний?

2. Найдите 33 различных натуральных числа, не превосходящих 100, таких, что среди них для любых трёх различных чисел a, b, c число a не делится на $b–c$, а $b–c$ не делится на a.

3. В лагерь заехало несколько детей, среди которых есть двое знакомых и есть двое незнакомых. Докажите, что среди них можно выбрать троих таким образом, чтобы один из этих троих был знаком ровно с одним из двоих оставшихся.

4. Известно, что для некоторого натурального числа n есть 2014 различных натуральных чисел, каждое из которых является делителем n^2, но не является делителем n. Кроме того, их произведение тоже является делителем n^2. Какое наименьшее число простых чисел (не обязательно различных) может быть в разложении числа n на простые сомножители?

5. Клетчатый прямоугольник можно разрезать на Г-тетрамино и Т-тетрамино (четырехклеточные фигуры в форме букв Г и Т). Докажите, что его можно разрезать на прямоугольники 1×4 и прямоугольники 2×2 (не обязательно использовать фигурки обоих типов).

6. Вася записал в вершинах квадрата четыре числа с суммой 100. Петя у каждой стороны записал произведение чисел, записанных в её концах, и вычислил сумму чисел на сторонах. Потом Вася увеличил все числа, записанные в вершинах, на 1, а Петя точно так же посчитал новую сумму на сторонах. На сколько новая Петина сумма больше старой?

7. Петя и Вася играют в игру. На столе по кругу лежит 100 фишек чёрной стороной вверх. Другая сторона у всех фишек белая. Мальчики ходят по очереди, начинает Петя. За один ход он может выбрать 3 фишки, лежащие подряд, и перевернуть некоторые из них (по своему выбору). Вася своим ходом может перевернуть любую фишку. Петя выиграет, если в какой–то момент хотя бы 70 фишек будут лежать белой стороной вверх. Может ли Вася помешать Пете это сделать? (Оба мальчика своим ходом могут и ничего не переворачивать).

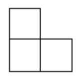
8. Таблица 10×10 заполнена числами 1, 2, 3 таким образом, что суммы чисел во всех строках и во всех столбцах равны. Может ли в этой таблице быть ровно две двойки?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 20.02.2014

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На столе лежат 18 монет, одинаковых по внешнему виду. 16 из них весят 1 г, остальные две — по 2 г. Есть обычные двухчашечные весы. Разрешается на одну чашу класть одну монету, а на другую — две монеты. Как с помощью таких весов определить хотя бы одну тяжелую монету за 18 взвешиваний?

2. У Саши есть по 10 трехклеточных «уголков» трёх цветов (см. рис.). Может ли он сложить из них клетчатый прямоугольник 5×12 так, чтобы «уголки» одинакового цвета не соприкасались (даже углами)?



3. Две баскетбольные команды решили играть до тех пор, пока одна из команд не наберёт 50 очков. После каждого заброшенного мяча счёт на табло обновляется. Какое наибольшее число раз сумма цифр на табло может быть равна 10?

4. Во сколько раз натуральных делителей у числа 101! больше, чем у числа 100! ?

5. Клетчатый прямоугольник можно разрезать на Г-тетрамино и Т-тетрамино (четырехклеточные фигуры в форме букв Г и Т). Докажите, что его можно разрезать на прямоугольники 1×4 и прямоугольники 2×2 (не обязательно использовать фигурки обоих типов).

6. От пса в будке до кота идет прямая дорожка. На середину дорожки положили кило сосисок, и животные одновременно бросились к ним. Кот бегает вдвое быстрее пса, а ест вдвое медленнее. Добежав до сосисок, оба ели без драки, и кот съел вдвое больше пса. А какую часть сосисок съел бы кот, если бы их положили на дорожку втрое ближе к псу, чем к коту?

7. Петя и Вася играют в игру. На столе по кругу лежит 100 фишек чёрной стороной вверх. Другая сторона у всех фишек белая. Мальчики ходят по очереди, начинает Петя. За один ход он может выбрать 3 фишки, лежащие подряд, и перевернуть некоторые из них (по своему выбору). Вася своим ходом может перевернуть любую фишку. Петя выиграет, если в какой–то момент хотя бы 70 фишек будут лежать белой стороной вверх. Может ли Вася помешать Пете это сделать? (Оба мальчика своим ходом могут и ничего не переворачивать).

8. Таблица 10×10 заполнена числами 1, 2, 3 таким образом, что суммы чисел во всех строках и во всех столбцах равны. Может ли в этой таблице быть ровно 9 двоек?

XLIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 15-21.02.2014

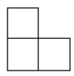
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 20.02.2014

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Серёжа перемножил все числа от 1 до 10, а затем сосчитал количество делителей полученного произведения (включая 1 и само произведение). Оля перемножила все числа от 1 до 11, и тоже сосчитала количество делителей произведения. Докажите, что Олино количество делится на Серёжино, и найдите их частное.

2. От пса в будке до кота идет прямая дорожка. На середину дорожки положили кило сосисок, и животные одновременно бросились к ним. Кот бегает вдвое быстрее пса, а ест вдвое медленнее. Добежав до сосисок, оба ели без драки, и кот съел вдвое больше пса. А какую часть сосисок съел бы кот, если бы их положили на дорожку втрое ближе к псу, чем к коту?

3. У Саши есть по 10 трехклеточных «уголков» трёх цветов (см. рис.). Может ли он сложить из них клетчатый прямоугольник 5×12 так, чтобы «уголки» одинакового цвета не соприкасались даже углами?



4. Летела стая двуглавых пегасов и трехглавых драконов. У пегасов по 4 ноги и 4 крыла. У драконов по 8 ног и 10 крыльев. В стае ног на 100 больше, чем голов. Сколько в стае крыльев?

5. У Пети в 4 карманах лежит несколько монет достоинствами в 2, 5 и 10 рублей. В трёх карманах денег поровну, а в четвёртом — вдвое больше, чем в третьем. Могут ли ровно 7 из Петиных монет быть двухрублёвыми?

6. По кругу лежат 6 одинаковых с виду жетонов. Известно, что 4 из них весят по 1г, остальные два – по 2г, и жетоны по 2 г не лежат рядом. Есть обычные двухчашечные весы. Разрешается на одну чашу класть один жетон, а на другую — два жетона. Как с помощью таких весов определить оба тяжелых жетона за 6 взвешиваний?

7. На озере растут 100 кувшинок в ряд. На одной из них сидит лягушка, на некоторых из остальных – по кузнечику. Сначала лягушка прыгает вправо или влево на соседнюю кувшинку, и если там есть кузнечик, то съедает его. Затем один из кузнечиков перепрыгивает на любую незанятую кувшинку (не обязательно соседнюю). Потом опять лягушка сдвигается на соседнюю кувшинку, потом — один из кузнечиков прыгает и т.д. по очереди. В начале игры слева от лягушки было на 20 кузнечиков больше, чем справа, а в конце — на 10 меньше. При этом после каждого хода кузнечика или лягушки слева и справа от неё кузнечиков было *не поровну*. Какое наименьшее число кузнечиков могла съесть лягушка?

8. У кирпича все грани прямоугольные, а сумма длин всех 12 ребер равна 100 см. Длину каждого ребра увеличили на 1 см. На сколько увеличилась площадь поверхности кирпича?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = AC$) с углом $A < 60°$. Точка D на стороне AC такова, что $\angle DBC = \angle BAC$. Серединный перпендикуляр к BD пересекает прямую, проходящую через A параллельно BC, в точке E. Докажите, что прямые EB и AC параллельны.

2. Прямоугольный город состоит из mn квадратных кварталов: m в длину и n в ширину. Докажите, что количество маршрутов из юго-западного угла города в северо-восточный, не проходящих более одного раза через одну точку, не превосходит 2^{mn}.

3. Положительные числа a, b, x, y таковы, что $x^2-x+1 = a^2$, $y^2+y+1 = b^2$ и $(2x-1)(2y+1) = 2ab+3$. Докажите, что $x+y = ab$.

4. Произведение натуральных чисел a и b больше двух. Когда сумму наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел a и b поделили на $a+b$, частное оказалось целым. Докажите, что оно не превосходит $(a+b)/4$.

5. Даны различные простые числа $p_1, p_2, ..., p_n$ ($n > 1$). Рассмотрим множество U всех натуральных чисел, среди простых делителей которых встречаются только $p_1, p_2, ..., p_n$. При каком наименьшем k верно следующее утверждение: из любых чисел $a_1, \ldots, a_k \in U$, не делящихся на квадрат никакого натурального числа, большего 1, можно получить все элементы U только с помощью операций умножения и деления? (Числа a_i можно использовать не по одному разу.)

6. 2014 белых камней и один чёрный камень выложены в ряд. Разрешается выбрать любой чёрный камень и изменить на противоположный цвета его соседей (одного соседа, если камень лежит с краю). Найдите все начальные расположения чёрного камня, при которых можно сделать все камни чёрными.

7. Каждое из n последовательных натуральных чисел не делится ни на одну из своих цифр. При каком наибольшем n это возможно?

8. В треугольнике ABC $\angle C = 2\angle B$. Внутри треугольника нашлась точка D такая, что $AD = AC$ и $DB = DC$. Докажите, что $\angle DBA = 30°$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = AC$) с углом $A < 60°$. Точка D на стороне AC такова, что $\angle DBC = \angle BAC$. Серединный перпендикуляр к BD пересекает прямую, проходящую через A параллельно BC, в точке E. Докажите, что прямые EB и AC параллельны.

2. Прямоугольный город, состоящий из одинаковых квадратных кварталов, образован m улицами, идущими с севера на юг, и n улицами, идущими с востока на запад (по периметру города тоже проходят улицы). Докажите, что количество маршрутов из юго-западного угла города в северо-восточный, не проходящих более одного раза через одну точку, не превосходит 3^{mn}.

3. Положительные числа a, b, x, y таковы, что $(2x–1)(2y+1) = 2ab+3$, $x^2–x+1 = a^2$ и $y^2+y+1 = b^2$. Докажите, что $x+y = ab$.

4. Произведение натуральных чисел a и b больше 2. Когда сумму наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел a и b поделили на $a+b$, частное оказалось целым. Докажите, что оно не превосходит $\frac{a+b}{4}$.

5. Даны различные простые числа $p_1, p_2, ..., p_n$ ($n > 1$). Рассмотрим множество U всех натуральных чисел, среди простых делителей которых встречаются только $p_1, p_2, ..., p_n$. При каком наименьшем k верно следующее утверждение: из любых чисел $a_1, \ldots, a_k \in U$, не делящихся на квадрат никакого натурального числа, большего 1, можно получить все элементы U только с помощью операций умножения и деления? (Числа a_i можно использовать не по одному разу.)

6. Даны шесть разных цветов. Грани каждого из нескольких кубиков раскрашены в эти шесть цветов (разные грани кубика — в разные цвета; разные кубики могут быть окрашены разными способами). Из кубиков сложили прямоугольник. Разрешается взять любую строчку или столбец этого прямоугольника и повернуть составляющие её кубики вокруг её оси. Верно ли, что такими операциями всегда можно добиться того, чтобы верхние грани всех кубиков были одного цвета?

7. Каждое из n последовательных натуральных чисел не делится ни на одну из своих цифр. При каком наибольшем n это возможно?

8. В треугольнике ABC $\angle C = 2\angle B$. Внутри треугольника нашлась точка D такая, что $AD = AC$ и $DB = DC$. Докажите, что $\angle DBA = 30°$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = AC$) с углом $A < 60°$. Точка D на стороне AC такова, что $\angle DBC = \angle BAC$. Серединный перпендикуляр к BD пересекает прямую, проходящую через A параллельно BC, в точке E. Докажите, что прямые EB и AC параллельны.

2. Прямоугольный город, состоящий из одинаковых квадратных кварталов, образован m улицами, идущими с севера на юг, и n улицами, идущими с востока на запад (по периметру города тоже проходят улицы). Докажите, что количество маршрутов из юго-западного угла города в северо-восточный, не проходящих более одного раза через одну точку, не превосходит 3^{mn}.

3. На доске написано число 2. Каждую минуту Вася стирает с доски написанное на ней число и вместо него пишет квадрат суммы его цифр. Что будет написано на доске через 2014 минут (1 сутки, 9 часов и 34 минуты)?

4. Произведение натуральных чисел a и b больше 2. Когда сумму наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел a и b поделили на $a+b$, частное оказалось целым. Докажите, что оно не превосходит $\frac{a+b}{4}$.

5. Даны различные простые числа $p_1, p_2, ..., p_n$ ($n > 1$). Рассмотрим множество U всех натуральных чисел, среди простых делителей которых встречаются только $p_1, p_2, ..., p_n$. При каком наименьшем k верно следующее утверждение: из любых чисел $a_1, \ldots, a_k \in U$, не делящихся на квадрат никакого натурального числа, большего 1, можно получить все элементы U только с помощью операций умножения и деления? (Числа a_i можно использовать не по одному разу.)

6. Даны шесть разных цветов. Грани каждого из нескольких кубиков раскрашены в эти шесть цветов (разные грани кубика — в разные цвета; разные кубики могут быть окрашены разными способами). Из кубиков сложили прямоугольник. Разрешается взять любую строчку или столбец этого прямоугольника и повернуть составляющие её кубики вокруг её оси. Верно ли, что такими операциями всегда можно добиться того, чтобы верхние грани всех кубиков были одного цвета?

7. Каждое из n последовательных натуральных чисел не делится ни на одну из своих цифр. При каком наибольшем n это возможно?

8. На медиане AM треугольника ABC выбрана такая точка P, что $PC = CM$ и $\angle PCM = \angle ABC$. Докажите, что $AC+PM > AB$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2014

СТАРШАЯ ГРУППА, ТРЕТЬЯ ЛИГА

1. Три различных числа a, b, c подобраны так, что выполнены равенства $a^2(b+c)=b^2(a+c)=2014$. Чему равно $c^2(b+a)$? Найдите все возможные значения и докажите, что других быть не может.

2. Числа p и $p+2$ простые, а сумма всех делителей числа $p+1$ (включая 1 и само это число) вдвое больше этого числа. Найдите все такие p.

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, где $\angle B+\angle C > 180°$, диагонали равны, $\angle ADB = \angle BAC$ и $\angle CAD+\angle ADC = \angle DBA$. Найдите $\angle BAD$.

4. На доске нарисован треугольник ABC. Известно, что из отрезков AB, BC, $AC+1$, из отрезков AB, $BC+1$, AC и из отрезков $AB+1$, BC, AC тоже можно составить треугольники. Чему может быть равен периметр исходного треугольника ABC? Укажите все возможности и объясните, почему других возможностей нет.

5. Каждое из n последовательных натуральных чисел не делится ни на одну из своих цифр. При каком наибольшем n это возможно?

6. 2014 белых камней и один чёрный камень выложены в ряд. Разрешается выбрать любой камень и изменить на противоположный цвета его соседей (одного соседа, если камень лежит с краю). Найдите все начальные расположения чёрного камня, при которых можно сделать все камни чёрными.

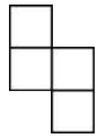
7. На доске написано число 2. Каждую минуту Вася стирает с доски написанное на ней число и вместо него пишет квадрат суммы его цифр. Что будет написано на доске через 2014 минут (1 сутки, 9 часов и 34 минуты)?

8. В лагерь заехали 50 девочек и 50 мальчиков, среди которых Вася и его знакомая Таня. Оказалось, что все девочки, кроме Тани, знакомы с одним и тем же количеством мальчиков, а все мальчики, кроме Васи, знакомы с одним и тем же количеством девочек. При этом у Васи знакомых девочек больше, чем у Тани знакомых мальчиков. Сколько знакомых девочек у Васи?

XLIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 15-21.02.2014

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА



1. В таблице 11 строк и 12 столбцов. В ней расставлены вещественные числа. Известно, что сумма чисел в таблице равна 1, а сумма чисел в каждой фигурке вида, показанного на рисунке, равна 4 (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Чему равна сумма чисел во второй строке таблицы?

2. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что для любых 15 натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ число $a_1a_2\ldots a_{15}(a_1^n + a_2^n + \ldots + a_{15}^n)$ делится на 15.

3. В государстве есть столица и 300 других городов. Из любого города можно проехать в любой другой. Известно, что столица соединена дорогой со 100 другими городами, а каждый нестоличный город соединен хотя бы с 5 нестоличными городами. Докажите, что можно закрыть половину дорог, ведущих в столицу, так, чтобы по-прежнему можно было добраться из любого города в любой другой.

4. Прямоугольный город имеет m кварталов в длину и n в ширину. По периметру города тоже проходят улицы. Докажите, что количество маршрутов из юго-западного угла города в северо-восточный, не проходящих более одного раза через одну точку, не превосходит 2^{mn}.

5. Произведение натуральных чисел a и b больше 2. Когда сумму наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел a и b поделили на $a+b$, частное оказалось целым. Докажите, что оно не превосходит $\dfrac{a+b}{4}$.

6. Вдоль окружности стоят дома семи гномов и Белоснежки. В течение восьми вечеров гномы собирались вместе, каждый вечер — у разных гномов и в один вечер у Белоснежки. В гости любой гном идет либо через Белоснежку, либо по другой дуге окружности. Проходя мимо дома чужого гнома (не считая дома гнома, устраивающего вечеринку), он съедает яблоко, а проходя мимо Белоснежки (не считая случая, когда вечеринка у Белоснежки) — получает совет. Может ли случиться так, что в итоге все гномы суммарно съели всемеро больше яблок, чем получили советов?

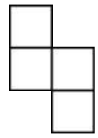
7. Каждое из n последовательных натуральных чисел не делится ни на одну из своих цифр. При каком наибольшем n это возможно?

8. На медиане AM треугольника ABC выбрана такая точка P, что $PC = CM$ и $\angle PCM = \angle ABC$. Докажите, что $AC+PM > AB$.

XLIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 15-21.02.2014

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА



1. В таблице 11 строк и 12 столбцов. В ней расставлены вещественные числа. Известно, что сумма чисел в таблице равна 1, а сумма чисел в каждой фигурке вида, показанного на рисунке, равна 4 (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Чему равна сумма чисел во второй строке таблицы?

2. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что для любых 15 натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ число $a_1a_2\ldots a_{15}(a_1^n + a_2^n + \ldots + a_{15}^n)$ делится на 15.

3. В государстве есть столица и 300 других городов. Из любого города можно проехать в любой другой. Известно, что столица соединена дорогой со 100 другими городами, а каждый нестоличный город соединен хотя бы с 5 нестоличными городами. Докажите, что можно закрыть половину дорог, ведущих в столицу, так, чтобы по-прежнему можно было добраться из любого города в любой другой.

4. По кругу стоят 100 красных, 100 синих и 100 зелёных фишек. Четвёрка подряд стоящих фишек называется *красивой*, если среди этих фишек ровно 2 красных и по одной синей и зелёной. Каково наибольшее возможное число красивых четвёрок?

5. Произведение натуральных чисел x и y больше двух. Когда $xy+1$ поделили на $x+y$, частное оказалось целым. Докажите, что оно не превосходит $\dfrac{x+y}{4}$.

6. Вдоль окружности стоят дома семи гномов и Белоснежки. В течение восьми вечеров гномы собирались вместе, каждый вечер — у разных гномов и в один вечер у Белоснежки. В гости любой гном идет либо через Белоснежку, либо по другой дуге окружности. Проходя мимо дома чужого гнома (не считая дома гнома, устраивающего вечеринку), он съедает яблоко, а проходя мимо Белоснежки (не считая случая, когда вечеринка у Белоснежки) — получает совет. Может ли случиться так, что в итоге все гномы суммарно съели всемеро больше яблок, чем получили советов?

7. Каждое из n последовательных натуральных чисел не делится ни на одну из своих цифр. При каком наибольшем n это возможно?

8. На медиане AM треугольника ABC выбрана такая точка P, что $PC = CM$ и $\angle PCM = \angle ABC$. Докажите, что $AC+PM > AB$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2014

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В лагерь заехали 49 девочек и 50 мальчиков, один из которых — Вася. Оказалось, что все девочки знакомы с одним и тем же количеством мальчиков, а все мальчики, кроме Васи, знакомы с одним и тем же количеством девочек. При этом у Васи знакомых девочек больше, чем у остальных мальчиков. Сколько?

2. 2014 белых камней и один чёрный камень выложены в ряд. Разрешается выбрать любой камень и изменить на противоположный цвета его соседей (одного соседа, если камень лежит с краю). Найдите все начальные расположения чёрного камня, при которых можно сделать все камни чёрными.

3. Решите в натуральных числах уравнение $a^2+b^2-c^2 = 9-2ab$.

4. По кругу стоят 100 красных, 100 синих и 100 зелёных фишек. Четвёрка подряд стоящих фишек называется *красивой*, если среди этих фишек ровно 2 красных и по одной синей и зелёной. Каково наибольшее возможное число красивых четвёрок?

5. Произведение натуральных чисел x и y больше двух. Когда $xy+1$ поделили на $x+y$, частное оказалось целым. Докажите, что оно не превосходит $\frac{x+y}{4}$.

6. Вдоль окружности стоят дома семи гномов и Белоснежки. В течение семи вечеров гномы собирались вместе, каждый вечер — у разных гномов. В гости любой гном идет либо через Белоснежку, либо по другой дуге окружности. Проходя мимо дома чужого гнома (не считая дома гнома, устраивающего вечеринку), он съедает яблоко, а проходя мимо Белоснежки — получает совет. Может ли случиться так, что в итоге все гномы суммарно съели впятеро больше яблок, чем получили советов?

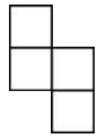
7. Каждое из n последовательных натуральных чисел не делится хотя бы на одну из своих цифр. При каком наибольшем n это возможно? (Ни одно из чисел не делится на 0.)

8. На медиане AM треугольника ABC выбрана такая точка P, что $PC = CM$ и $\angle PCM = \angle ABC$. Докажите, что $\angle ACP \neq \angle BCP$.

XLIII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 15-21.02.2014

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2014

ГРУППА «СТАРТ». ВЫСШАЯ ЛИГА. ПЕРВАЯ ЛИГА, бой за 1-2 место.



1. В таблице 3 строки и 12 столбцов. В ней расставлены числа. Известно, что сумма чисел в таблице равна 10, а сумма чисел в каждой фигурке вида, показанного на рисунке, равна 1 (фигурку можно поворачивать и переворачивать). Чему равна сумма чисел во второй строке таблицы?

2. На прямой расположено 100 точек. Около каждой точки написана сумма расстояний от этой точки до остальных. Могут ли числа, написанные около точек, равняться 1, 2, 3, …, 100 в некотором порядке?

3. Вдоль окружности стоят дома семи гномов и Белоснежки. В течение восьми вечеров гномы собирались вместе, каждый вечер — у разных гномов и один раз у Белоснежки (Белоснежка в гости не ходит). В гости любой гном идет либо через Белоснежку, либо по другой дуге окружности. Проходя мимо дома другого гнома (не считая дома гнома, устраивающего вечеринку), он съедает яблоко, а проходя мимо Белоснежки — получает совет (когда вечеринка у Белоснежки, она советов не дает). Может ли случиться так, что в итоге все гномы суммарно съели всемеро больше яблок, чем получили советов?

4. В лагерь заехали 49 девочек и 50 мальчиков, один из которых — Вася. Оказалось, что все девочки знакомы с одним и тем же количеством мальчиков, а все мальчики, кроме Васи, знакомы с одним и тем же количеством девочек. При этом у Васи знакомых девочек больше, чем у остальных мальчиков. Сколько?

5. По окружности лежат 100 груш. Вес каждой из них равен либо сумме, либо разности весов её соседей. Докажите, что можно выдать Пете и Васе по 2 груши так, чтобы по весу они получили поровну.

6. Петя и Вася играют на шахматной доске с вырезанным угловым полем. Они по очереди выставляют королей на свободные поля, по одному за ход. Начинает Петя. После каждого хода игрок прибавляет себе столько очков, сколько королей побил только что выставленный им король. Игра заканчивается, когда все поля заполнены. Выигрывает тот, у кого в сумме больше очков. Может ли кто-то из них гарантировать себе выигрыш, и если да, то кто?

7. На её n-й день рождения Оле подарили торт в форме плоского выпуклого n-угольника. Прямыми разрезами Оля разделила его на 50 частей (каждый разрез разрезает одну из уже имеющихся частей на две). Среди частей есть ровно 5 пятиугольников, 6 шестиугольников, 7 семиугольников и 8 восьмиугольников. Для какого наименьшего n такое могло случиться?

8. Каждое из n последовательных натуральных чисел не делится ни на одну из своих цифр. При каком наименьшем n это возможно?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2014

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА, бои за 3, 5, 7 места.

1. В каждой клетке шахматной доски написано число. Сумма чисел в каждой доминошке (прямоугольнике 2×1) равна 2013 или 2014. Могут ли более чем в трёх клетках стоять различные числа?

2. По кругу стоят 100 красных, 100 синих и 100 зелёных фишек. Четвёрка подряд стоящих фишек называется *красивой*, если среди этих фишек ровно 2 красных и по одной синей и зелёной. Каково наибольшее возможное число красивых четвёрок?

3. Вдоль окружности стоят дома семи гномов и Белоснежки. В течение восьми вечеров гномы собирались вместе, каждый вечер — у разных гномов и в один вечер у Белоснежки. В гости любой гном идет либо через Белоснежку, либо по другой дуге окружности. Проходя мимо дома чужого гнома (не считая дома гнома, устраивающего вечеринку), он съедает яблоко, а проходя мимо Белоснежки (не считая случая, когда вечеринка у Белоснежки) — получает совет. Может ли случиться так, что в итоге все гномы суммарно съели всемеро больше яблок, чем получили советов?

4. Сколько различных значений может принимать сумма ПАПА+МАМА? (В четырёхзначных слагаемых одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным –– разные).

5. На доске написано число 2. Каждую минуту Вася стирает с доски написанное на ней число и вместо него пишет квадрат суммы его цифр. Что будет написано на доске через 2014 минут (1 сутки, 9 часов и 34 минуты)?

6. В районе Манхэттена 5 авеню, идущих с юга на север, и 20 стрит, идущих с востока на запад и пересекающих все авеню. Автомобиль может ехать по авеню в обе стороны, а по стрит только с запада на восток. Он может поворачивать и разворачиваться только на перекрёстках и проезжать любой перекрёсток только один раз. Сколько различных путей ведёт от перекрёстка первой авеню (самой западной) с первой стрит до перекрёстка пятой авеню с двадцатой стрит?

7. На прямой расположено 100 точек. Около каждой точки написана сумма расстояний от этой точки до остальных. Могут ли числа, написанные около точек, равняться 1, 2, 3, …, 100 в некотором порядке?

8. Петя и Вася играют на шахматной доске с вырезанным угловым полем. Они по очереди выставляют королей на свободные поля, по одному за ход. Начинает Петя. После каждого хода игрок прибавляет себе столько очков, сколько королей побил только что выставленный им король. Игра заканчивается, когда все поля заполнены. Выигрывает тот, у кого в сумме больше очков. Может ли кто-то из них гарантировать себе выигрыш, и если да, то кто?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 21.02.2014

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Петя и Вася по очереди выставляют королей на свободные поля шахматной доски, по одному за ход, пока не займут все поля. Начинает Петя. После каждого хода игрок прибавляет себе столько очков, сколько королей побил только что выставленный король. Выигрывает тот, кто в итоге опередит соперника больше чем на 3 очка, иначе ничья. Может ли кто-то из них гарантировать себе выигрыш, и если да, то кто?

2. От плоского квадратного торта отрез*а*ли по куску прямыми разрезами, пока не разрезали торт на 50 частей. Могут ли среди этих частей найтись 5 пятиугольников и 8 восьмиугольников?

3. На столе по кругу лежат рублёвые и двухрублёвые монеты. У рублёвок один сосед лежит орлом, другой — решкой; у двухрублёвок оба соседа лежат одинаково – оба орлом или оба решкой. Может ли на столе лежать в сумме ровно 111 рублей?

4. Несколько торговцев с охраняющим их самураем подошли к переправе. Есть двухместная лодка. Но торговцы самурая побаиваются, им неприятно оставаться с ним один на один в лодке или на берегу. При каком наименьшем числе торговцев всей группе удастся переправиться, избежав неприятных ситуаций?

5. Вначале на доске написано число 2. Каждую минуту Вася стирает с доски написанное на ней число и вместо него пишет квадрат суммы его цифр (например, из числа 107 он получил бы $(1+0+7)^2=64$). Что будет написано на доске через 2014 минут?

6. По окружности лежат 100 груш. Вес каждой из них равен либо сумме, либо разности весов её соседей. Докажите, что можно выдать Пете и Васе по 2 груши так, чтобы по весу они получили поровну.

7. Дата 28.02.2082 читается одинаково слева направо и справа налево (если не обращать внимания на точки). А сколько всего таких дат случилось от начала нашей эры до сегодняшнего дня?

8. В олимпиаде имени О. Бендера было 6 задач, каждая стоила 7 баллов. Участников из города Нью-Васюки было меньше 77. Каждый из них набрал ровно на 430 баллов меньше, чем остальные ньювасюкинцы вместе. Сколько ньювасюкинцев участвовало в олимпиаде?