МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2013

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа 1, 2, ..., 99, 100 (каждое по одному разу). Докажите, что в таблице существуют три клетки, сумма чисел в которых не превосходит 141, а центры образуют равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого параллельны сторонам таблицы.

2. Решите в целых числах систему уравнений $x–yz = 11$, $xz+y = 13$.

3. Точки M и L — середины сторон AB и BC соответственно равнобедренного треугольника ABC ($BC = AC$). Точка N на стороне AC такова, что $NA+AM = LN = LM$. Найдите угол NLM.

4. Пусть r и s — положительные числа такие, что $(r+s–rs)(r+s+rs) = rs$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $r+s–rs$.

5. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух среднее арифметическое чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга — 1, 2, 3, …, 10. Какое число задумал школьник, сказавший число 6?

6. Город Треугольный представляет собой правильный треугольник со стороной 2013, разбитый 6039 улицами, параллельными сторонам, на правильные треугольники со стороной 1 (стороны города — тоже улицы). Полицейский, стоящий на улице, обеспечивает порядок на всём её протяжении. Какое наименьшее количество полицейских можно расставить на улицах города для того, чтобы обеспечить порядок на всех улицах?

7. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) ставят фишки в клетки доски 2012×2012 (ставить фишку в клетку, где уже стоит фишка, нельзя). Выигрывает тот, после хода которого в каждом квадрате 3×3 будет стоять фишка. Кто выиграет при правильной игре?

8. В прямоугольнике $ABCD$, где $AB < 2AD$, точка E — середина стороны AB, а F — такая точка на отрезке CE, что $\angle CFD = 90°$. Докажите, что треугольник FAD — равнобедренный.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2013

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа 1, 2, ..., 99, 100 (каждое по одному разу). Докажите, что в таблице существуют три клетки, сумма чисел в которых не превосходит 150, а центры образуют равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого параллельны сторонам таблицы.

2. Решите в целых числах систему уравнений $x–yz = 11$, $xz+y = 13$.

3. В прямоугольнике $ABCD$, где $AB < 2AD$, точка E — середина стороны AB, а F — такая точка на отрезке CE, что $\angle CFD=90°$. Докажите, что треугольник FAD — равнобедренный.

4. Докажите, что при всех натуральных $n \geq 3$ выполнено неравенство $2^{n+1}(n!)^2 < (2n)!$.

5. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух среднее арифметическое чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга — 1, 2, 3, …, 10. Какое число задумал школьник, сказавший число 6?

6. Город Треугольный представляет собой правильный треугольник со стороной 2013, разбитый 6039 улицами, параллельными сторонам, на правильные треугольники со стороной 1 (стороны города — тоже улицы). Полицейский, стоящий на улице, обеспечивает порядок на всём её протяжении. Можно ли расставить на улицах города 2015 полицейских так, чтобы обеспечить порядок на всех улицах?

7. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) ставят фишки в клетки доски 2012×2012 (ставить фишку в клетку, где уже стоит фишка, нельзя). Выигрывает тот, после хода которого в каждом квадрате 3×3 будет стоять фишка. Кто выиграет при правильной игре?

8. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечена точка D, такая, что $BD = BC$. На стороне AB отмечена точка E, такая, что $EB = ED$, а на продолжении отрезка DE за точку E — точка F, такая, что $FD = BC$. Точка G — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на сторону AB. Оказалось, что $GB = GF$. Найдите угол BAC.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2013

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа 1, 2, ..., 99, 100 (каждое по одному разу). Докажите, что в таблице существуют три клетки, сумма чисел в которых не превосходит 182, а центры образуют равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого параллельны сторонам таблицы.

2. Найдите все четвёрки натуральных чисел a, b, c, d таких, что $a!+b!+c! = 3^d$. ($n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$)

3. В прямоугольнике $ABCD$, где $AB < 2AD$, точка E — середина стороны AB, а F — такая точка на отрезке CE, что $\angle CFD = 90°$. Докажите, что треугольник FAD — равнобедренный.

4. Докажите, что при всех натуральных $n \geq 3$ выполнено неравенство $2^{n+1}(n!)^2 < (2n)!$.

5. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух среднее арифметическое чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга — 1, 2, 3, …, 10. Какое число задумал школьник, сказавший число 6?

6. Город Треугольный представляет собой правильный треугольник со стороной 2013, разбитый 6039 улицами, параллельными сторонам, на правильные треугольники со стороной 1 (стороны города — тоже улицы). Полицейский, стоящий на улице, обеспечивает порядок на всём её протяжении. Можно ли расставить на улицах города 2015 полицейских так, чтобы обеспечить порядок на всех улицах?

7. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) ставят фишки в клетки доски 1×2012 (ставить фишку в клетку, где уже стоит фишка, нельзя). Выигрывает тот, после хода которого в каждом прямоугольнике 1×3 будет стоять фишка. Кто выиграет при правильной игре?

8. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечена точка D, такая, что $BD = BC$. На стороне AB отмечена точка E, такая, что $EB = ED$, а на продолжении отрезка DE за точку E — точка F, такая, что $FD = BC$. Точка G — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на сторону AB. Оказалось, что $GB = GF$. Найдите угол BAC.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2013

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Докажите, что при всех натуральных $n \geq 3$ выполнено неравенство $2^{n+1}(n!)^2 < (2n)!$.

2. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) ставят фишки в клетки доски 2012×2012. Выигрывает тот, после хода которого в каждом квадрате 3×3 будет стоять хотя бы одна фишка. Кто выиграет при правильной игре?

3. Решите в целых числах систему уравнений $x–yz = 29$, $xz+y = 34$.

4. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа 1, 2, ..., 99, 100 (каждое по одному разу). Докажите, что в таблице существуют три клетки, сумма чисел в которых не превосходит 140, а центры образуют равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого параллельны сторонам таблицы.

5. Город Треугольный представляет собой правильный треугольник со стороной 2013, разбитый 6039 улицами, параллельными сторонам, на правильные треугольники со стороной 1 (стороны города — тоже улицы). Полицейский, стоящий на улице, обеспечивает порядок на всём её протяжении. Можно ли расставить на улицах города 2015 полицейских так, чтобы обеспечить порядок на всех улицах?

6. В финале конкурса красоты среди котов участвуют Барсик, Мурзик и Тузик. В каждом испытании коту, занявшему 1-е место, давали 3 очка, 2-е — 2 очка, а 3-е — 1 очко. По итогам конкурса все коты набрали поровну очков. Оказалось, что Тузик обошел Мурзика в 20 испытаниях, а Барсика в 10. Сколько всего было испытаний на конкурсе?

7. На каждой чаше весов лежат по 144 одинаковые с виду монеты. Среди них встречаются монеты весом в 9 грамм и монеты весом в 10 грамм, причём и те, и другие присутствуют. За одну операцию можно взять любые две группы, состоящие из одинакового количества монет, и поменять их местами. Докажите, что можно не более, чем за 11 операций сделать так, чтобы весы не были в равновесии (изначально весы в равновесии).

8. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечена точка D, такая, что $BD = BC$. На стороне AB отмечена точка E, такая, что $EB = ED$, а на продолжении отрезка DE за точку E — точка F, такая, что $FD = BC$. Точка G — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на сторону AB. Оказалось, что $GB = GF$. Найдите угол BAC.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2013

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Докажите, что при всех натуральных n выполнено неравенство $2^n(n!)^2 < (2n)!$.

2. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) ставят фишки в клетки доски 2012×2012. Проигрывает тот, после хода которого в каждом квадрате 3×3 будет стоять хотя бы одна фишка. Кто выиграет при правильной игре?

3. Решите в целых числах систему уравнений $x–yz = 5$, $xz+y = 7$.

4. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа 1, 2, ..., 99, 100 (каждое по одному разу). Докажите, что в таблице существуют три клетки, сумма чисел в которых не превосходит 151, а центры образуют равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого параллельны сторонам таблицы.

5. У стозначного натурального числа поменяли местами две цифры. Могло ли в результате это число удвоиться?

6. В финале конкурса красоты среди котов участвуют Барсик, Мурзик и Тузик. В каждом испытании коту, занявшему 1-е место, давали 3 очка, 2-е — 2 очка, а 3-е — 1 очко. По итогам конкурса все коты набрали поровну очков. Оказалось, что Тузик обошел Мурзика в 20 испытаниях, а Барсика в 10. Сколько всего было испытаний на конкурсе?

7. На каждой чаше весов лежат по 144 одинаковые с виду монеты. Среди них встречаются монеты весом в 9 грамм и монеты весом в 10 грамм, причём и те, и другие присутствуют. За одну операцию можно взять любые две группы, состоящие из одинакового количества монет, и поменять их местами. Докажите, что можно не более, чем за 11 операций сделать так, чтобы весы не были в равновесии (изначально весы в равновесии).

8. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отмечена точка D, такая, что $BD = BC$. На стороне AB отмечена точка E, такая, что $EB = ED$, а на продолжении отрезка DE за точку E — точка F, такая, что $FD = BC$. Точка G — основание перпендикуляра, опущенного из точки F на сторону AB. Оказалось, что $GB = GF$. Найдите угол BAC.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2013

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Том может покрасить забор за 8 часов, а Гек тот же забор красит за 12 часов. Они решили красить этот забор вместе, но от этого производительность каждого из них снизилась на одно и то же число процентов. В результате они вместе красили забор 5 часов. На сколько процентов снизилась производительность каждого из мальчиков?

2. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) ставят фишки в клетки доски 2013×2013. Выигрывает тот, после хода которого в каждом квадрате 3×3 будет стоять хотя бы одна фишка. Кто выиграет при правильной игре?

3. Решите в целых числах систему уравнений $x–yz = –1$, $xz+y = 1$.

4. В классе мальчиков ровно на 11 больше, чем девочек. На свой день рождения Маша угощала одноклассников конфетами. При этом она половину конфет раздала всем мальчикам поровну, а вторую половину она раздала всем девочкам поровну (и себя не забыла). Оказалось, что каждой девочке досталось на одну конфету больше, чем мальчику. Какое наименьшее количество конфет могла принести с собой Маша?

5. У стозначного натурального числа поменяли местами две цифры. Могло ли в результате это число удвоиться?

6. В финале конкурса красоты среди котов участвуют Барсик, Мурзик и Тузик. В каждом испытании коту, занявшему 1-е место, давали 3 очка, 2-е — 2 очка, а 3-е — 1 очко. По итогам конкурса все коты набрали поровну очков. Оказалось, что Тузик обошел Мурзика в 20 испытаниях, а Барсика в 10. Сколько всего было испытаний на конкурсе?

7. На каждой чаше весов лежат по 5 одинаковых с виду монет. Среди них встречаются монеты весом в 9 грамм и монеты весом в 10 грамм, причём и те, и другие присутствуют. За одну операцию можно взять любые две группы, состоящие из одинакового количества монет, и поменять их местами. Докажите, что можно не более, чем за 4 операции сделать так, чтобы весы не были в равновесии (изначально весы в равновесии).

8. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа 1, 2, ..., 99, 100 (каждое по одному разу). Докажите, что в таблице существуют три клетки, сумма чисел в которых не превосходит 182, а центры образуют равнобедренный прямоугольный треугольник, катеты которого параллельны сторонам таблицы.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2013

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Том может покрасить забор за 8 часов, а Гек тот же забор красит за 12 часов. Они решили красить этот забор вместе, но от этого производительность каждого из них снизилась на одно и то же число процентов. В результате они вместе красили забор 5 часов. На сколько процентов снизилась производительность каждого из мальчиков?

2. Петя и Вася играют в игру: они по очереди (начинает Петя) ставят фишки в клетки доски 30×30. Проигрывает тот, после хода которого в каждом квадрате 3×3 будет стоять хотя бы одна фишка. Кто выиграет при правильной игре?

3. В классе мальчиков ровно на 11 больше, чем девочек. На свой день рождения Маша угощала одноклассников конфетами. При этом она половину конфет раздала всем мальчикам поровну, а вторую половину она раздала всем девочкам поровну (и себя не забыла). Оказалось, что каждой девочке досталось на одну конфету больше, чем мальчику. Какое наименьшее количество конфет могла принести с собой Маша?

4. У стозначного натурального числа поменяли местами две цифры. Могло ли в результате это число удвоиться?

5. Найдите все четвёрки натуральных чисел a, b, c, d таких, что $a!+b!+c! = 3^d$. ($n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$)

6. В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, каждое из которых больше 100, а на каждой грани — сумму четырех чисел в её вершинах. Оказалось, что число на каждой грани вдвое больше или вдвое меньше числа на противоположной грани. Докажите, что какое-то из записанных чисел больше 500.

7. На каждой чаше весов лежат по 144 одинаковые с виду монеты. Среди них встречаются монеты весом в 9 грамм и монеты весом в 10 грамм, причём и те, и другие присутствуют. За одну операцию можно взять любые две группы, состоящие из одинакового количества монет, и поменять их местами. Докажите, что можно не более, чем за 11 операций сделать так, чтобы весы не были в равновесии (изначально весы в равновесии).

8. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух сумму чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга — 2, 4, 6, …, 20. Какое число задумал школьник, сказавший число 12?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2013

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Том может покрасить забор за 8 часов, а Гек тот же забор красит за 12 часов. Они решили красить этот забор вместе, но от этого производительность каждого из них снизилась на одно и то же число процентов. В результате они вместе красили забор 5 часов. На сколько процентов снизилась производительность каждого из мальчиков?

2. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно поставить фишку в свободную клетку доски 30×30 так, чтобы хотя бы один квадрат 3×3 остался целиком пустым. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из них может выигрывать, как бы ни играл противник?

3. В классе мальчиков ровно на 11 больше, чем девочек. На свой день рождения Маша угощала одноклассников конфетами. При этом она половину конфет раздала всем мальчикам поровну, а вторую половину она раздала всем девочкам поровну (и себя не забыла). Оказалось, что каждой девочке досталось на одну конфету больше, чем мальчику. Какое наименьшее количество конфет могла принести с собой Маша?

4. Квадратное поле со стороной 100 м разбито на четыре прямоугольных участка. Все стороны всех участков короче 80 м. Известно, что два участка — квадраты. Докажите, что какие-то два участка имеют одинаковые площади.

5. Иванов, Петров и Сидоров — разного возраста. Их зовут Иван, Петр и Сидор, их отцов звали так же (но не обязательно в таком же порядке). Определите как полностью зовут каждого и кто кого старше, если известно что Сидор на год младше Иванова, Иван на год младше Петровича, Сидорыч на год младше Петра, а Иваныч на 2 года младше Сидорова.

6. В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, а на каждой грани — сумму четырех чисел в её вершинах. Оказалось, что число на каждой грани вдвое больше или вдвое меньше числа на противоположной грани. Может ли сумма чисел в вершинах быть равной 100?

7. 10 одинаковых с виду монет разложены поровну на чаши весов, так, что весы в равновесии. Среди монет встречаются весом в 9 грамм и весом в 10 грамм, причём и те, и другие присутствуют. За одну операцию можно поменять местами любые две группы из одинакового числа монет. Как нарушить равновесие, сделав не более 4 обменов?

8. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух сумму чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга — 2, 4, 6, …, 20. Какое число задумал школьник, сказавший число 12?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2013

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Том может покрасить забор за 8 часов, а Гек тот же забор красит за 12 часов. Они решили красить этот забор вместе, но от этого производительность каждого из них снизилась на одно и то же число процентов. В результате они вместе красили забор 5 часов. На сколько процентов снизилась производительность каждого из мальчиков?

2. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно поставить фишку в свободную клетку доски 30×30 так, чтобы хотя бы один столбец остался целиком пустым. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из них может выигрывать, как бы ни играл противник?

3. В классе мальчиков ровно на 11 больше, чем девочек. На свой день рождения Маша угощала одноклассников конфетами. При этом она половину конфет раздала всем мальчикам поровну, а вторую половину она раздала всем девочкам поровну (и себя не забыла). Оказалось, что каждой девочке досталось на одну конфету больше, чем мальчику. Какое наименьшее количество конфет могла принести с собой Маша?

4. Квадратное поле со стороной 100 м разбито на четыре прямоугольных участка. Все стороны всех участков короче 80 м. Известно, что два участка — квадраты. Докажите, что какие-то два участка имеют одинаковые площади.

5. Иванов, Петров и Сидоров — разного возраста. Их зовут Иван, Петр и Сидор, их отцов звали так же (но не обязательно в таком же порядке). Определите как полностью зовут каждого и кто кого старше, если известно что Сидор на год младше Иванова, Иван на год младше Петровича, Сидорыч на год младше Петра, а Иваныч на 2 года младше Сидорова.

6. В вершинах куба записали восемь различных натуральных чисел, а на каждой грани — сумму четырех чисел в её вершинах. Оказалось, что число на каждой грани вдвое больше или вдвое меньше числа на противоположной грани. Может ли сумма чисел в вершинах быть равной 100?

7. 10 одинаковых с виду монет разложены поровну на чаши весов, так, что весы в равновесии. Среди монет встречаются весящие 9 грамм и весящие 10 грамм, причём и те и другие присутствуют. За одну операцию можно поменять местами любые две группы из одинакового числа монет. Как наверняка нарушить равновесие, сделав не более 4 обменов?

8. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух сумму чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга — 2, 4, 6, …, 20. Какое число задумал школьник, сказавший число 12?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2013

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В жюри международной олимпиады $15n$ человек (n — натуральное число), которые общаются между собой на 5 языках (каждый член жюри знает хотя бы один). Оказалось, что для каждых двух языков есть ровно $6n$ человек, знающих оба эти языка, а для каждых трёх языков есть ровно $3n$ человек, знающих все три языка. Докажите, что любые два члена жюри могут говорить между собой на одном из этих языков и существует язык, на котором говорят хотя бы $10n$ человек.

2. На сторонах BC и AC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) отметили соответственно точки E и D так, что $DE \parallel AB$. На продолжении стороны CB за точку B отметили произвольную точку K. Пусть P — точка пересечения прямых AB и KD, Q — точка пересечения прямых AK и DE. Докажите, что CA — биссектриса $\angle PCQ$.

3. Натуральное $n > 2$ называется *k-делимым*, если из чисел 1, 2, …, n можно выбрать два, произведение которых ровно в k раз больше суммы $n–2$ остальных. Найдите все натуральные k, для которых существуют k-делимые числа.

4. Для различных натуральных чисел a, $b < 2012$ обозначим $f(a,b)$ количество натуральных $k < 2012$, для которых остаток при делении на 2012 числа ak больше остатка при делении на 2012 числа bk. Найдите наименьшее возможное значение $f(a,b)$.

5. Числа a, b и c удовлетворяют условию $a+b+c \geq 3$. Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geq 6$.

6. На доске записано m одинаковых натуральных чисел, равных n. Два игрока, A и B, играют в следующую игру. Каждый игрок при своём ходе выбирает среди находящихся на доске чисел одно отличное от нуля. Если выбранное число — наименьшее положительное число на доске, то игрок записывает вместо этого числа на единицу меньшее число, в противном случае вместо этого числа записывается наименьшее имеющееся на доске положительное число. Выигрывает тот, после чьего хода на доске остаются только нули. Ходы делаются по очереди, начинает A. Кто выиграет при правильной игре?

7. Точки M, P, N, Q расположены на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ таким образом, что отрезки MN и PQ перпендикулярны. Пусть O — точка пересечения отрезков MN и PQ. Докажите, что сумма периметров четырёхугольников $AMOQ$ и $CPON$ равна сумме периметров четырёхугольников $BMOP$ и $DNOQ$.

8. В клетках таблицы $n \times n$ расставлены числа: в одной клетке $–1$, а во всех остальных 1. Серёжа может взять любую клетку, в которой стоит $–1$, заменить число в этой клетке нулём, а числа во всех соседних по стороне клетках заменить на противоположные. При каких n он может (хотя бы для одного расположения минус единицы) получить таблицу, во всех клетках которой стоят нули?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2013

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В жюри международной олимпиады $15n$ человек (n — натуральное число), которые общаются между собой на 5 языках (каждый член жюри знает хотя бы один). Оказалось, что для каждых двух языков есть ровно $6n$ человек, знающих оба эти языка, а для каждых трёх языков есть ровно $3n$ человек, знающих все три языка. Докажите, что существует язык, на котором говорят больше $9n$ человек.

2. На диагонали AC квадрата $ABCD$ отмечена точка N, а на продолжении диагонали AC за точку A — точка M. Известно, что $AB = AM$ и $\angle MBN = 90°$. На сторонах AD и BC отмечены точки P и Q соответственно, такие, что $\angle PNB = \angle NQB = 90°$. Докажите, что $PD = 2QC$.

3. Натуральное $n > 2$ называется *k-делимым*, если из чисел 1, 2, …, n можно выбрать два, произведение которых ровно в k раз больше суммы $n–2$ остальных. Найдите все натуральные k, для которых существуют k-делимые числа.

4. Натуральное число назовем *сложным*, если оно делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что существуют два последовательных сложных числа, больших чем 10^{10000}.

5. Числа a, b и c удовлетворяют условию $a+b+c \geq 3$. Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geq 6$.

6. На доске записано m одинаковых натуральных чисел, равных 2013. Два игрока, A и B, играют в следующую игру. Каждый игрок при своём ходе выбирает среди находящихся на доске чисел одно отличное от нуля. Если выбранное число — наименьшее положительное число на доске, то игрок записывает вместо этого числа на единицу меньшее число, в противном случае вместо этого числа записывается наименьшее имеющееся на доске положительное число. Выигрывает тот, после чьего хода на доске остаются только нули. Ходы делаются по очереди, начинает A. Кто выиграет при правильной игре?

7. Точки M, P, N, Q расположены на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ таким образом, что отрезки MN и PQ перпендикулярны. Пусть O — точка пересечения отрезков MN и PQ. Докажите, что сумма периметров четырёхугольников $AMOQ$ и $CPON$ равна сумме периметров четырёхугольников $BMOP$ и $DNOQ$.

8. В клетках таблицы 10×10 расставлены числа: в одной клетке –1, а во всех остальных 1. Серёжа может взять любую клетку, в которой стоит –1, заменить число в этой клетке нулём, а числа во всех соседних по стороне клетках

заменить на противоположные. Может ли он получить таблицу, во всех клетках которой стоят нули?

ЯГУБОВ.РФ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2013

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В жюри международной олимпиады $15n$ человек (n — натуральное число), которые общаются между собой на 5 языках (каждый член жюри знает хотя бы один). Оказалось, что для каждых двух языков есть ровно $6n$ человек, знающих оба эти языка, а для каждых трёх языков есть ровно $3n$ человек, знающих все три языка. Докажите, что существует язык, на котором говорят не менее $9n$ человек.

2. На диагонали AC квадрата $ABCD$ отмечена точка N, а на продолжении диагонали AC за точку A — точка M. Известно, что $AB = AM$ и $\angle MBN = 90°$. На сторонах AD и BC отмечены точки P и Q соответственно, такие, что $\angle PNB = \angle NQB = 90°$. Докажите, что $PD = 2QC$.

3. Существует ли натуральное $n > 2$ такое, что из чисел 1, 2, …, n можно выбрать два, произведение которых ровно в 20 раз больше суммы $n–2$ остальных?

4. Вася взял натуральные числа a, b и выписал в строку остатки от деления на 101 чисел a, $2a$, $3a$, ..., $100a$. Затем под этой строкой он выписал в строку остатки от деления на 101 чисел b, $2b$, $3b$, ..., $100b$ (остаток числа bk написан в точности под остатком числа ak). После этого Вася посчитал, сколько чисел в верхней строке больше стоящих под ними чисел нижней строки. Какой результат у него мог получиться? Найдите все возможные варианты.

5. Числа a и b удовлетворяют условию $a+b \geq 2$. Докажите неравенство $a^2+b^2+ab \geq 3$.

6. На доске записано 13 одинаковых натуральных чисел, равных 2013. Два игрока, A и B, играют в следующую игру. Каждый игрок при своём ходе выбирает среди находящихся на доске чисел одно отличное от нуля. Если выбранное число — наименьшее положительное число на доске, то игрок записывает вместо этого числа на единицу меньшее число, в противном случае вместо этого числа записывается наименьшее имеющееся на доске положительное число. Выигрывает тот, после чьего хода на доске остаются только нули. Ходы делаются по очереди, начинает A. Кто выиграет при правильной игре?

7. Точки M, P, N, Q расположены на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ таким образом, что отрезки MN и PQ перпендикулярны. Пусть O — точка пересечения отрезков MN и PQ. Докажите, что сумма периметров четырёхугольников $AMOQ$ и $CPON$ равна сумме периметров четырёхугольников $BMOP$ и $DNOQ$.

8. В клетках таблицы 30×31 расставлены числа: в одной клетке –1, а во всех остальных 1. Серёжа может взять любую клетку, в которой стоит –1, заменить число в этой клетке нулём, а числа во всех соседних по стороне клетках заменить на противоположные. Можно ли расположить –1 так, чтобы Серёжа смог с помощью таких операций получить таблицу, во всех клетках которой стоят нули?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2013

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Вася взял натуральные числа a, b и выписал в строку остатки от деления на 1997 чисел a, $2a$, $3a$, ..., $1996a$. Затем под этой строкой он выписал в строку остатки от деления на 1997 чисел b, $2b$, $3b$, ..., $1996b$ (остаток числа bk написан в точности под остатком числа ak). После этого Вася посчитал сколько чисел в верхней строке больше стоящих под ними чисел нижней строки. Какой результат у него мог получиться? Найдите все возможные варианты.

2. Найдите все простые числа p такие, что числа $a = 2p+1$, $b = 3p+2$, $c = 4p+3$ и $d = 6p+1$ также являются простыми.

3. На столе лежит n камней. Два игрока играют в следующую игру: первый игрок может взять некоторое четное число камней от 2 до 100, а второй игрок может взять некоторое нечетное число камней от 1 до 99. Ходят по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. При каких n при правильной игре выиграет первый, а при каких — второй?

4. Дана клетчатая квадратная доска 27×27. Кузнечик прыгает по доске в двух направлениях — вправо или вниз — через две клетки на третью или через три клетки на четвертую, причем два его последовательных прыжка имеют разную длину. Начинает прыжки он из левой верхней клетки. Сколько различных маршрутов может быть у кузнечика до правой нижней клетки?

5. Натуральное число назовем *сложным*, если оно делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что существуют два последовательных сложных числа, больших чем 10^{10000}.

6. По окружности расставлено 100 точек красного и синего цветов. Могло ли так случиться, что точек, соседи которых одноцветны, ровно втрое больше, чем точек, соседи которых разноцветны?

7. Числа a, b и c удовлетворяют условию $a+b+c \geq 3$. Докажите неравенство $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \geq 6$.

8. На диагонали AC квадрата $ABCD$ отмечена точка N, а на продолжении диагонали AC за точку A — точка M. Известно, что $AB = AM$ и $\angle MBN = 90°$. На сторонах AD и BC отмечены точки P и Q соответственно, такие, что $\angle PNB = \angle NQB = 90°$. Докажите, что $PD = 2QC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2013

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Вася взял натуральные числа a, $b \le 100$ и выписал в строку остатки от деления на 101 чисел a, $2a$, $3a$, ..., $100a$. Затем под этой строкой он выписал в строку остатки от деления на 101 чисел b, $2b$, $3b$, ..., $100b$ (остаток числа bk написан в точности под остатком числа ak). После этого Вася посчитал сколько чисел в верхней строке больше стоящих под ними чисел нижней строки. Какой результат у него мог получиться? Найдите все возможные варианты.

2. Найдите все простые числа p такие, что числа $a = 2p+1$, $b = 3p+2$, $c = 4p+3$ и $d = 6p+1$ также являются простыми.

3. На столе лежит 1234 камня. Два игрока играют в следующую игру: первый игрок может взять некоторое нечетное число камней от 1 до 99, а второй игрок может взять некоторое четное число камней от 2 до 100. Ходят по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

4. В одной из клеток доски 10×10 записан минус, а в остальных клетках — плюсы. За один ход можно закрасить одну из незакрашенных клеток, где стоит минус и поменять знаки во всех соседних с ней по стороне незакрашенных клетках (плюс на минус и минус на плюс). Докажите, что такими операциями нельзя закрасить всю доску.

5. Натуральное число назовем *сложным*, если оно делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что существуют два последовательных сложных числа, больших чем 10^{10000}.

6. По окружности расставлено 100 точек красного и синего цветов. Могло ли так случиться, что точек, соседи которых одноцветны, ровно втрое больше, чем точек, соседи которых разноцветны?

7. Числа a и b удовлетворяют условию $a+b \ge 2$. Докажите неравенство $a^2+b^2+ab \ge 3$.

8. На диагонали AC квадрата $ABCD$ отмечена точка N, а на продолжении диагонали AC за точку A — точка M. Известно, что $AB = AM$ и $\angle MBN = 90°$. На сторонах AD и BC отмечены точки P и Q соответственно, такие, что $\angle PNB = \angle NQB = 90°$. Докажите, что $PD = 2QC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2013

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Десятизначное число назовём *хорошим*, если у него равны семи суммы пяти пар цифр: первой и последней, второй и предпоследней, третьей с начала и с конца и т.д. Каких чисел больше среди хороших: чётных, или нечётных?

2. Найдите все простые числа p такие, что числа $a = 2p+1$, $b = 3p+2$, $c = 4p+3$ и $d = 6p+1$ также являются простыми.

3. На столе лежит 1234 камня. Два игрока играют в следующую игру: первый игрок может взять некоторое четное число камней от 2 до 100, а второй игрок может взять некоторое нечетное число камней от 1 до 99. Ходят по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

4. Есть мешок орехов. Каждую минуту к нему подъезжает робот. Если в мешке четное число орехов, робот половину забирает. А если нечетное, то добавляет столько, сколько есть, плюс ещё два ореха. Докажите, что рано или поздно в мешке останется ровно один орех.

5. Вокруг города идет кольцевая дорога длиной более 111 км. На ней стоят две сломавшиеся машины и станция техпомощи. От станции до первой машины по часовой стрелке ближе, чем против часовой на 33 км, а до второй машины — против часовой стрелки ближе, чем по часовой на 49 км. Каково кратчайшие расстояние по кольцу между сломавшимися машинами, и как короче ехать от первой ко второй: по или против часовой стрелки?

6. За круглым столом сидят 100 школьников. Могут ли ровно 50 из них сидеть между мальчиком и девочкой?

7. Числа a и b удовлетворяют условию $a+b \geq 2$. Докажите неравенство $a^2+b^2+ab \geq 3$.

8. Имеется 200 картонных фигур: квадратов и треугольников. Нужно один раз разрезать одну фигуру по прямой на две части, и затем разложить все фигуры на три кучки. Докажите, что так можно добиться, чтобы суммарное число углов в кучках стало одинаковым (у треугольника три угла, у квадрата или прямоугольника — четыре, у пятиугольника — пять и т.д.).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2013

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В лагерь заехало несколько детей, один из которых — Вася. Оказалось, что каждый из знакомых Васи знаком ровно с 20 прибывшими (считая Васю), а каждый из прибывших (кроме Васи) знаком ровно с половиной Васиных знакомых. Сколько детей приехало в лагерь?

2. На столе лежит 2013 камней. Петя и Вася играют в следующую игру: Петя начинает и может взять любое четное число камней от 2 до 30, а Вася может взять любое нечетное число камней от 1 до 29. Ходят по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

3. По окружности расставлено 100 точек красного и синего цветов. Могло ли так случиться, что точек, соседи которых одноцветны, ровно втрое больше, чем точек, соседи которых разноцветны?

4. На экране калькулятора горит натуральное число. Каждую секунду калькулятор проделывает с этим числом следующую операцию: если число на экране делится на 3, то он делит его на 3. Если число на экране даёт остаток 1 при делении на 3, то он умножает его на 2 и прибавляет 1. Если число на экране даёт остаток 2 при делении на 3, то он умножает его на 2 и вычитает 1. Докажите, что через некоторое время число на экране окажется равным 1.

5. Десятизначное число назовём *хорошим*, если у него сумма первой и последней цифр равна сумме второй и предпоследней, равна сумме третьих с конца и с начала и т.д. Каких хороших чисел больше: чётных, или нечётных?

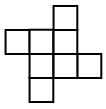
6. Есть 200 картонных фигур. Некоторые из них — квадраты, а остальные — треугольники (возможно, есть фигуры только одного типа). Нужно один раз разрезать одну фигуру по прямой на две части, и затем разложить все фигуры на три кучки. Докажите, что так можно добиться, чтобы суммарное число углов у фигур в кучках стало одинаковым (у треугольника считаем три угла, у квадрата или прямоугольника — четыре, у пятиугольника — пять и т.д.).

7. Натуральное число назовем *сложным*, если оно делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что существуют два последовательных сложных числа, больших чем 10^{10000}.

8. В одной из клеток доски 10×10 записан минус, а в остальных клетках — плюсы. За один ход можно закрасить одну из незакрашенных клеток, где стоит минус и поменять знаки во всех соседних с ней по стороне незакрашенных клетках (плюс на минус и минус на плюс). Докажите, что такими операциями нельзя закрасить всю доску.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2013

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА



1. Многоугольником (см. рис. справа), перегибая его по границам клеток, можно обернуть квадрат 2×2, т.е. покрыть все клетки квадрата в один слой с двух сторон. Можно ли каким-нибудь многоугольником из 200 клеток с периметром 400 обернуть квадрат 10×10?

2. На столе лежит 2013 камней. Петя и Вася играют в следующую игру: Петя начинает и может взять любое четное число камней от 2 до 100, а Вася может взять любое нечетное число камней от 1 до 99. Ходят по очереди. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

3. За круглым столом сидят 100 школьников. Могут ли ровно 50 из них сидеть между мальчиком и девочкой?

4. Есть мешок орехов. Каждую минуту к нему подъезжает робот. Если в мешке четное число орехов, робот половину забирает. А если нечетное, то добавляет столько, сколько есть, плюс ещё два ореха. Докажите, что рано или поздно в мешке останется ровно один орех.

5. Десятизначное число назовём *хорошим*, если у него равны семи суммы пяти пар цифр: первой и последней, второй и предпоследней, третьей с начала и с конца и т.д. Каких чисел больше среди хороших: чётных, или нечётных?

6. Имеется 200 картонных фигур: квадратов и треугольников (возможно, есть фигуры только одного типа). Нужно один раз разрезать одну фигуру по прямой на две части, и затем разложить все фигуры на три кучки. Докажите, что так можно добиться, чтобы суммарное число углов в кучках стало одинаковым (у треугольника три угла, у квадрата или прямоугольника — четыре, у пятиугольника — пять и т.д.).

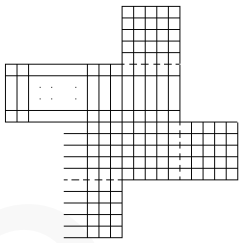
7. Есть 20 неокрашенных кубиков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно выбрать одну неокрашенную грань любого кубика и покрасить её в черный или белый цвет. Игра заканчивается, когда все кубики полностью покрашены. Петя получает от Васи столько рублей, сколько сможет выбрать по-разному окрашенных кубиков. Какое наибольшее число рублей он может наверняка получить, как бы не играл Вася? (Кубики окрашены одинаково, если их можно поставить рядом так, что одинаковыми будут цвета передних граней, одинаковыми – верхних, и т.д.)

8. Вокруг города идет кольцевая дорога длиной более 111 км. На ней стоят две сломавшиеся машины и станция техпомощи. От станции до первой машины по часовой стрелке ближе, чем против часовой на 33 км, а до второй машины — против часовой стрелки ближе, чем по часовой на 49 км. Каково кратчайшие расстояние по кольцу между сломавшимися машинами, и как короче ехать от первой ко второй: по или против часовой стрелки?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2013

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Бумажный многоугольник из 200 клеток вырезан из клетчатой бумаги по границам клеток. Им можно обернуть клетчатый картонный квадрат 10×10 — с двух сторон, в один слой, при этом все перегибания идут по границам клеток. Пример такого многоугольника с периметром 80 приведен на рисунке. А есть ли такой многоугольник с периметром не менее 400?



2. Есть мешок, где больше 10 орехов. Каждую минуту к нему подъезжает робот. Если в мешке четное число орехов, робот половину забирает. А если нечетное, то добавляет столько, сколько есть, плюс ещё два ореха. Докажите, что через три минуты в мешке будет меньше орехов.

3. За круглым столом сидят 100 школьников. Могут ли ровно 50 из них сидеть между мальчиком и девочкой?

4. Есть 20 неокрашенных кубиков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно выбрать одну непокрашенную грань любого кубика и покрасить её в черный или белый цвет. Игра заканчивается, когда все кубики полностью покрашены. Петя получает от Васи столько рублей, сколько сможет выбрать по-разному окрашенных кубиков. Какое наибольшее число рублей он может наверняка получить, как бы ни играл Вася? (Кубики окрашены одинаково, если их можно поставить рядом так, что одинаковыми будут цвета передних граней, одинаковыми – верхних, и т.д.)

5. Десятизначное число назовём *хорошим*, если у него равны семи суммы пяти пар цифр: первой и последней, второй и предпоследней, третьей с начала и с конца и т.д. Каких чисел больше среди хороших: чётных или нечётных?

6. Вокруг города идет кольцевая дорога длиной более 111 км. На ней стоят две сломавшиеся машины и станция техпомощи. От станции до первой машины по часовой стрелке на 33 км ближе, чем против часовой, а до второй машины – против часовой стрелки на 49 км ближе, чем по часовой. Каково кратчайшие расстояние по кольцу между сломавшимися машинами, и как короче ехать от первой ко второй: по или против часовой стрелки?

7. Последние 6 царей династии Романовых были мужчинами. Перечислим (по алфавиту) их имена и отчества: Александр Александрович, Александр Николаевич, Александр Павлович, Николай Александрович, Николай Павлович, Павел Петрович. Известно, что между ними престол каждый раз переходил от отца к сыну или от брата к брату. Никого из царей не назвали по имени царя-деда. У кого из царей среди перечисленных есть и дед, и внук?

8. Имеется 99 картонных фигур — квадратов и треугольников (есть и те, и другие). Нужно один раз разрезать одну фигуру по прямой на две части, и затем разложить все фигуры на две кучки. Докажите, что так можно добиться, чтобы суммарное число углов в кучках стало одинаковым (у треугольника три угла, у квадрата или прямоугольника — четыре, у пятиугольника — пять и т.д.).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2013

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Цветные шарики разложены по 2012 мешкам. Лёша раскладывает мешки по коробкам. Коробку, все мешки, лежащие в которой, содержат шарик одного и того же цвета, он называет *интересной*. Коробку, каждый мешок, лежащий в которой, содержит шарик цвета, не встречающегося в других мешках этой коробки, он называет *прикольной*. При каком наименьшем k эти мешки можно заведомо разложить по k коробкам так, что либо все коробки будут интересными, либо все коробки будут прикольными?

2. В шеренге стоят 2^n солдат, где n — положительное целое число. При каждом перестроении в начало новой шеренги встают солдаты, до этого стоявшие на нечётных местах (в том же порядке), а за ними — солдаты, до этого стоявшие на чётных местах (в том же порядке). Докажите, что по прошествии n перестроений солдаты окажутся в таком же порядке, с которого начали.

3. На клетчатой плоскости 999 клеток закрашены чёрным. Назовём клетчатый прямоугольник *специальным*, если он содержит две чёрных клетки, стоящие в его противоположных углах (ширина специального прямоугольника может быть равна 1). Для какого наименьшего k можно так расставить исходные 999 клеток, чтобы в каждом специальном прямоугольнике было не более k чёрных клеток?

4. В треугольнике ABC $\angle ABC = 120°$. Биссектриса этого угла пересекает сторону AC в точке M, а биссектриса угла, смежного с углом BCA, пересекает прямую AB в точке P. Отрезок MP пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что $\angle AKM = \angle KPC$.

5. В 79 одинаковых чашках лежат 1000 бусинок. Некоторые чашки могут быть пусты, но не все бусинки находятся в одной чашке. Разрешается взять из любой чашки 13 или 66 бусинок (если в ней столько есть) и переложить все эти бусинки в любую другую чашку. Оказалось, что такими операциями невозможно собрать все бусинки в одной чашке. Сколько бусинок может быть в первой чашке? (Укажите все возможности.)

6. Даны натуральные числа $a \geq 2$ и $n \geq 3$. Докажите, что одно из чисел a^n+1, $a^{n+1}+1$, ..., $a^{2n-2}+1$ не имеет общего нечётного делителя, большего 1, ни с одним из остальных.

7. На сторонах AB и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ расположены точки P и Q соответственно такие, что площадь каждого из треугольников ABQ и ADP равна трети площади четырёхугольника $ABCD$. Отрезок PQ пересекает диагональ AC в точке R. Найдите отношение AR/RC.

8. Положительные числа a и b таковы, что $1/a+1/b = 1$. Докажите, что

$$(a+b)^n - a^n - b^n \geq 2^{2n} - 2^{n+1}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2013

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Цветные шарики разложены по 2012 мешкам. Лёша раскладывает мешки по коробкам. Коробку, все мешки, лежащие в которой, содержат шарик одного и того же цвета, он называет *интересной*. Коробку, каждый мешок, лежащий в которой, содержит шарик цвета, не встречающегося в других мешках этой коробки, он называет *прикольной*. При каком наименьшем k эти мешки можно заведомо разложить по k коробкам так, что либо все коробки будут интересными, либо все коробки будут прикольными?

2. На доске в один ряд записаны по порядку числа 1, 2, ... , 200. Юра должен поставить перед каждым числом знак плюс или минус таким образом, чтобы для каждого положительного целого числа $n \le 100$ перед числом n и перед каким-либо из его кратных стояли различные знаки. Перед какими числами должен Юра поставить знак минус, чтобы значение полученного выражения оказалось как можно больше?

3. На клетчатой плоскости 1000 клеток закрашены чёрным. Назовём клетчатый прямоугольник *специальным*, если он содержит две чёрных клетки, стоящие в его противоположных углах (ширина специального прямоугольника может быть равна 1). Для какого наименьшего k можно так расставить исходные 1000 клеток, чтобы в каждом специальном прямоугольнике было не более k чёрных клеток?

4. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD углы BCD и ADB прямые. Перпендикуляр к BD, проходящий через C, и перпендикуляр к AC, проходящий через D, пересекаются на стороне AB. Докажите, что $AB/AD–AD/AB = 1$.

5. В 79 одинаковых чашках лежат 1000 бусинок. Некоторые чашки могут быть пусты, но не все бусинки находятся в одной чашке. Разрешается взять из любой чашки 13 или 66 бусинок (если в ней столько есть) и переложить все эти бусинки в любую другую чашку. Оказалось, что такими операциями невозможно собрать все бусинки в одной чашке. Сколько бусинок может быть в первой чашке? (Укажите все возможности.) (Укажите все возможности.)

6. Назовём натуральное число *апокалиптическим*, если среди его натуральных делителей есть шесть различных чисел, сумма которых равна 3528. Например, число 2012 — апокалиптическое, так как сумма шести его делителей 1, 2, 4, 503, 1006 и 2012 равна 3528. Найдите наименьшее апокалиптическое число.

7. На сторонах AB и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ расположены точки P и Q соответственно такие, что площадь каждого из треугольников ABQ и ADP равна трети площади четырёхугольника $ABCD$. Отрезок PQ пересекает диагональ AC в точке R. Найдите отношение AR/RC.

8. Докажите, что $(a+b+c)^2/3 \le a^2+b^2+c^2+2(a–b+1)$ для любых вещественных a, b и c.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2013

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Цветные шарики разложены по 6 мешкам. Лёша раскладывает мешки по коробкам. Коробку, все мешки, лежащие в которой, содержат шарик одного и того же цвета, он называет *интересной*. Коробку, каждый мешок, лежащий в которой, содержит шарик цвета, не встречающегося в других мешках этой коробки, он называет *прикольной*. При каком наименьшем k эти мешки можно заведомо разложить по k коробкам так, что либо все коробки будут интересными, либо все коробки будут прикольными?

2. На доске в один ряд записаны по порядку числа 1, 2, ... , 200. Юра должен поставить перед каждым числом знак плюс или минус таким образом, чтобы для каждого положительного целого числа $n \le 100$ перед числом n и перед каким-либо из его кратных стояли различные знаки. Перед какими числами должен Юра поставить знак минус, чтобы значение полученного выражения оказалось как можно больше?

3. На клетчатой плоскости 1000 клеток закрашены чёрным. Назовём клетчатый прямоугольник *специальным*, если он содержит две чёрных клетки, стоящие в его противоположных углах (ширина специального прямоугольника может быть равна 1). Для какого наименьшего k можно так расставить исходные 1000 клеток, чтобы в каждом специальном прямоугольнике было не более k чёрных клеток?

4. В треугольнике ABC с углом $\angle B = 45°$ сторона BC равна 1, а точка E на стороне AC такова, что $EC = 1$. Перпендикуляр к AC, проходящий через точку E, пересекает продолжение стороны BC за точку C в точке D такой, что $CD = 2$. Найдите углы треугольника ABD.

5. При каких нечётных n можно разрезать доску $n \times n$, из которой вырезана центральная клетка, на L-тетрамино? L-тетрамино — это фигура из четырех клеток в форме буквы «Г».

6. Назовём натуральное число *апокалиптическим*, если среди его натуральных делителей есть шесть различных чисел, сумма которых равна 3528. Например, число 2012 — апокалиптическое, так как сумма шести его делителей 1, 2, 4, 503, 1006 и 2012 равна 3528. Найдите наименьшее апокалиптическое число.

7. На сторонах AB и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ расположены точки P и Q соответственно такие, что площадь каждого из треугольников ABQ и ADP равна трети площади четырёхугольника $ABCD$. Отрезок PQ пересекает диагональ AC в точке R. Найдите отношение AR/RC.

8. Положительные числа a и b удовлетворяют условию $1/a+1/b = 1$. Докажите неравенство $(a+b)^3-a^3-b^3 \ge 48$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2013

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Решите в целых числах уравнение $x^3+y^3 = (x+y)^2$.

2. Докажите, что $(a+b+c)^2/3 \le a^2+b^2+c^2+2(a-b+1)$ для любых вещественных a, b и c.

3. На окружности стоят 2039 точек. Можно ли каждую из них раскрасить в один из 24 цветов таким образом, чтобы для любых трёх цветов нашлись три точки этих цветов, стоящие подряд.

4. В 79 одинаковых чашках лежат 1000 бусинок. Некоторые чашки могут быть пусты, но не все бусинки находятся в одной чашке. Разрешается взять из любой чашки 13 или 66 бусинок (если в ней столько есть) и переложить все эти бусинки в любую другую чашку. Оказалось, что такими операциями невозможно собрать все бусинки в одной чашке. Сколько бусинок может быть в первой чашке? (Укажите все возможности.)

5. Докажите, что для любого натурального n и четного a среди чисел a^n+1, $a^{n+1}+1$, $a^{n+2}+1$, $a^{n+3}+1$ найдётся число, взаимно простое с остальными тремя.

6. Петя и Вася играют в игру на доске 4×2013. Они по очереди (начинает Петя) ставят ладей на свободные клетки доски. При этом Петя может ставить ладей под бой чётного числа уже поставленных ладей, а Вася — под бой нечётного числа уже поставленных ладей (ладьи не бьют друг сквозь друга). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

7. У Лёши есть 2012 мешков, в каждом из которых лежат цветные шарики. Кроме того у него есть 63 больших коробки. Лёша раскладывает мешки по коробкам. Коробку, все мешки, лежащие в которой, содержат шарик одного и того же цвета, он называет *интересной*. Коробку, каждый мешок, лежащий в которой, содержит шарик цвета, не встречающегося в других мешках этой коробки, он называет *прикольной*. Докажите, что Лёша сможет разложить мешки по 63 коробкам так, что каждая коробка будет либо интересной, либо прикольной.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. На стороне BC отмечена такая точка E, что $\angle BAD+\angle CDE =\angle EDA$. Из точки E на сторону AD опущен перпендикуляр EF. Докажите, что $BC+FD \ge AF$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2013

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Решите в целых числах уравнение $x^3+y^3 = (x+y)^2$.

2. Положительные числа a и b удовлетворяют условию $1/a+1/b = 1$. Докажите неравенство $(a+b)^3-a^3-b^3 \geq 48$.

3. У Васи есть 19950 фишек, покрашенных в 200 разных цветов. Он их расставил на окружности. Докажите, что есть такая пара цветов, что фишки этих цветов не стоят рядом.

4. В 79 одинаковых чашках лежат 1000 бусинок. Некоторые чашки могут быть пусты, но не все бусинки находятся в одной чашке. Разрешается взять из любой чашки 13 или 66 бусинок (если в ней столько есть) и переложить все эти бусинки в любую другую чашку. Оказалось, что такими операциями невозможно собрать все бусинки в одной чашке. Сколько бусинок может быть в первой чашке? (Укажите все возможности.)

5. Докажите, что для любого четного a среди чисел $a^{100}+1$, $a^{101}+1$, $a^{102}+1$, $a^{103}+1$ найдётся число, взаимно простое с остальными тремя.

6. Петя и Вася играют в игру на доске 4×2013. Они по очереди (начинает Петя) ставят ладей на свободные клетки доски. При этом Петя может ставить ладей под бой чётного числа уже поставленных ладей, а Вася — под бой нечётного числа уже поставленных ладей (ладьи не бьют друг сквозь друга). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

7. У Лёши есть 1000 мешков, в каждом из которых лежат цветные шарики. Кроме того у него есть 700 больших коробок. Лёша раскладывает мешки по коробкам. Коробку, все мешки, лежащие в которой, содержат шарик одного и того же цвета, он называет *интересной*. Коробку, каждый мешок, лежащий в которой, содержит шарик цвета, не встречающегося в других мешках этой коробки, он называет *прикольной*. Докажите, что Лёша сможет разложить мешки по 700 коробкам так, что либо все коробки будут интересными, либо все коробки будут прикольными.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны. На стороне BC отмечена такая точка E, что $\angle BAD+\angle CDE =\angle EDA$. Из точки E на сторону AD опущен перпендикуляр EF. Докажите, что $BC+FD \geq AF$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2013

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Сколько существует трехзначных чисел $\overline{xyz}$, таких, что $\overline{xyz}-\overline{xy}-z$ — точный куб.

2. На тараканьих бегах пять тараканов выбегают друг за другом с интервалом в 1 минуту. Каждый бежит со своей постоянной скоростью. Через минуту после своего старта каждый последующий таракан догоняет предыдущего. Через сколько секунд после своего старта последний таракан догоняет первого?

3. Петя и Вася играют в игру на доске 4×25. Они по очереди (начинает Петя) ставят коней на свободные клетки доски. Первого коня Петя ставит на любое поле, а каждый следующий конь должен побить только что выставленного коня соперника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

4. У Васи есть 19950 фишек, покрашенных в 200 разных цветов. Он их расставил на окружности. Докажите, что есть такая пара цветов, что фишки этих цветов не стоят рядом.

5. Докажите, что среди чисел $10^{100}+1$, $10^{101}+1$, $10^{102}+1$, $10^{103}+1$ найдётся число, взаимно простое с остальными тремя.

6. Перед Васей лежит 50 кучек с 1, 2, 3,... , 50 конфетами. За одну операцию Вася может добавить 1 конфету в одну из кучек, после чего съесть любую кучку с четным числом конфет. Если четных кучек после добавления конфеты нет, халява заканчивается. Докажите, что все конфеты Васе съесть не удастся.

7. На столе лежит 2013 шариков нескольких разных цветов и стоит 1007 пустых коробок. Докажите, что шарики можно разложить по коробкам таким образом, что либо в каждой из непустых коробок все шарики будут одного и того же цвета, либо в каждой из непустых коробок все шарики будут разных цветов.

8. В 100 одинаковых стаканов налит сок. За одну операцию повар может перелить из одного стакана в другой любое количество сока, но так, чтобы другой стакан не переполнился. У повара идеальный глазомер. Докажите, что за 99 переливаний он может уравнять количество сока во всех стаканах.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2013

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На столе лежит 2013 шариков нескольких разных цветов и стоит 1007 пустых коробок. Докажите, что шарики можно разложить по коробкам таким образом, что либо в каждой из непустых коробок все шарики будут одного и того же цвета, либо в каждой из непустых коробок все шарики будут разных цветов.

2. Петя и Вася играют в игру на доске 4×25. Они по очереди (начинает Петя) ставят ладей на свободные клетки доски. При этом Петя может ставить ладей под бой чётного числа уже поставленных ладей, а Вася — под бой нечётного числа уже поставленных ладей (ладьи не бьют друг сквозь друга). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

3. На окружности стоят 89 точек. Можно ли каждую из них раскрасить в один из девяти цветов таким образом, чтобы для любых трёх цветов нашлись три точки этих цветов, стоящие подряд?

4. Перед Васей лежит 50 кучек с 1, 2, 3,... , 50 конфетами. За одну операцию Вася может добавить 1 конфету в одну из кучек, после чего съесть любую кучку с четным числом конфет. Если четных кучек после добавления конфеты нет, халява заканчивается. Докажите, что все конфеты Васе съесть не удастся.

5. В стране 10 городов. Любая пара городов связана либо автобусным, либо железнодорожным, либо авиасообщением. Могло ли так случиться, что в стране нет трёх городов, связанных друг с другом прямыми рейсами одного и того же вида транспорта?

6. В 100 коробках, стоящих в ряд, лежит суммарно 10000 камней. За одну операцию можно переложить сколько угодно камней из любой коробки в соседнюю. Докажите, что за 99 таких операций можно сделать так, что во всех коробках камней будет поровну.

7. Есть ли решение у ребуса $Ц + \frac{И}{Ф} = И + \frac{Ф}{Р} = Ф + \frac{Р}{ЫЙ}$, где все дроби — целые числа?

8. Докажите, что среди чисел $10^{100}+1$, $10^{101}+1$, $10^{102}+1$, $10^{103}+1$ найдётся число, взаимно простое с остальными тремя.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2013

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На столе лежит 2013 шариков нескольких разных цветов и стоит 1007 пустых коробок. Докажите, что шарики можно разложить по коробкам таким образом, что либо в каждой из непустых коробок все шарики будут одного и того же цвета, либо в каждой из непустых коробок все шарики будут разных цветов.

2. Петя и Вася играют в игру на доске 4×25. Они по очереди (начинает Петя) ставят коней на свободные клетки доски. Первого коня Петя ставит на любое поле, а каждый следующий конь должен побить только что выставленного коня соперника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

3. На тараканьих бегах пять тараканов выбегают друг за другом с интервалом в 1 минуту. Каждый бежит со своей постоянной скоростью. Через минуту после своего старта каждый последующий таракан догоняет предыдущего. Через сколько секунд после своего старта последний таракан догоняет первого?

4. Перед Васей лежит 50 кучек с 1, 2, 3,... , 50 конфетами. За одну операцию Вася может добавить 1 конфету в одну из кучек, после чего съесть любую кучку с четным числом конфет. Если четных кучек после добавления конфеты нет, халява заканчивается. Докажите, что все конфеты Васе съесть не удастся.

5. В стране 10 городов. Любая пара городов связана либо автобусным, либо железнодорожным, либо авиасообщением. Могло ли так случиться, что в стране нет трёх городов, связанных друг с другом прямыми рейсами одного и того же вида транспорта?

6. В 100 одинаковых стаканов налит сок. За одну операцию повар может перелить из одного стакана в другой любое количество сока, но так, чтобы другой стакан не переполнился. У повара идеальный глазомер. Докажите, что за 99 переливаний он может уравнять количество сока во всех стаканах.

7. Есть ли решение у ребуса $Ц + \frac{И}{Ф} = И + \frac{Ф}{Р} = Ф + \frac{Р}{ЫЙ}$, где все дроби — целые числа?

8. Нам с братом вместе 35 лет. Если бы я был в два раза старше, чем восемь лет назад, то мне было бы столько лет, сколько моему брату шесть лет назад. Сколько лет мне и сколько — брату?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2013

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. На столе лежит 2013 шариков нескольких разных цветов и стоит 1007 пустых коробок. Докажите, что шарики можно разложить по коробкам так, что либо в каждой из непустых коробок все шарики будут одного и того же цвета, либо в каждой из непустых коробок все шарики будут разных цветов.

2. Петя и Вася играют в игру на доске 4×25. Они по очереди (начинает Петя) ставят коней на свободные клетки доски. Первого коня Петя ставит на любое поле, а каждый следующий конь должен побить только что выставленного коня соперника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

3. Клетчатый квадрат 6×6 разрезан на четыре равные части по границам клеток. Может ли быть, что никакая часть не вывалится при любом положении квадрата на вертикальной стенке, если остальные три части приклеены?

4. На тараканьих бегах пять тараканов выбегают друг за другом с интервалом в 1 минуту. Каждый бежит со своей постоянной скоростью. Через минуту после своего старта каждый последующий таракан догоняет предыдущего. Через сколько секунд после своего старта последний таракан догоняет первого?

5. Дежуря последние сутки накануне Нового года, сторож Васильич всё время смотрел на часы. Они показывают часы и минуты, например 22:17. Если сторож мог это понять как дату (например, 12:31 он понимал как «12-й месяц, 31-й день», то есть 31 декабря), то в течение этой минуты он вспоминал соответствующий день текущего года. В эту минуту воры могли пройти, он их не заметил бы. Верно ли, что время, благоприятное для воров, составило больше четверти этих суток?

6. В 100 одинаковых стаканов налит сок. За одну операцию бармен может перелить из одного стакана в другой любое количество сока, но так, чтобы другой стакан не переполнился. Бармен безошибочно определяет, сколько сока в стакане и сколько он уже отлил. Докажите, что не более чем за 99 переливаний он может сделать, чтобы сока во всех стаканах было поровну.

7. Есть ли решение у ребуса $Ц + \frac{И}{Ф} = И + \frac{Ф}{Р} = Ф + \frac{Р}{ЫЙ}$, где все суммы — целые?

8. Нам с братом вместе 35 лет. Если бы я был в два раза старше, чем восемь лет назад, то мне было бы столько лет, сколько моему брату шесть лет назад. Сколько лет мне и сколько — брату?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2013

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Для каждого натурального $n > 1$ обозначим T_n количество непустых подмножеств S множества $\{1,2, \ldots ,n\}$, у которых среднее арифметическое элементов целое. Докажите, что число $T_n – n$ чётно.

2. Медведь и Крокодил играют в следующую игру. На столе лежит стопка из 2012^{2012} монет. Каждым ходом игрок может либо разделить любую стопку, содержащую чётное число монет, на две стопки, содержащие поровну монет, либо убрать со стола все стопки, содержащие нечётное число монет. Начинает Медведь. Проигрывает животное, не имеющее хода. Кто выиграет при правильной игре?

3. Для данного натурального n найдите наибольшее m, для которого существует таблица из m строк и n столбцов, заполненная числами так, что для каждых двух разных строк $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ и $[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ выполнено равенство $\max(|a_1–b_1|, |a_2–b_2|, \ldots , |a_n–b_n|) = 1$.

4. Игорь установил на компьютер новую версию редактора MS Word и набрал натуральное число n. Как оказалось, если набрать число, программа совершает следующие действия: выбирает нечётный делитель d этого числа и, если делитель равен 1, заменяет число n числом $n+1$, а если делитель больше 1, заменяет n числом n/d. После этого Word выбирает нечетный делитель нового числа и действует по тем же правилам. (Например, начав с числа 5, он может последовательно получить числа 6, 2, 3, 4, ...) Если Word получает степень числа 3 с целым неотрицательным показателем, он останавливается и позволяет пользователю набрать что–нибудь ещё. Может ли Word действовать так, чтобы Игорь больше никогда ничего не набирал?

5. Куб с ребром 2013 составлен из единичных кубиков. Какое наименьшее количество кубов (любого размера, возможно, пересекающихся) нужно взять, чтобы все грани всех единичных кубиков содержались в гранях взятых кубов?

6. Внутри параллелограмма $ABCD$ с углом $\angle B = 105°$ расположена точка M такая, что треугольник BMC — равносторонний и $\angle CMD = 135°$. Точка K — середина стороны AB. Докажите, что $\angle BKC = 45°$.

7. Решите в натуральных числах уравнение $(x+y)^3 = (x–y–6)^2$.

8. Углы треугольника ABC удовлетворяют условию $\angle B \geq 2\angle C$. Точка D — основание высоты, опущенной из вершины A, а точка M — середина BC. Докажите, что $DM \geq AB/2$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2013

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Докажите, что количество непустых подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 2013\}$, у которых среднее арифметическое элементов целое, нечётно.

2. Медведь и Крокодил играют в следующую игру. На столе лежит стопка из 2012^{2012} монет. Каждым ходом игрок может либо разделить любую стопку, содержащую чётное число монет, на две стопки, содержащие поровну монет, либо убрать со стола все стопки, содержащие нечётное число монет. Начинает Медведь. Проигрывает животное, не имеющее хода. Кто выиграет при правильной игре?

3. Экзамен состоит из k вопросов, и в нём принимает участие n учеников. Ученик проваливается на экзамене, если он отвечает верно меньше, чем на половину вопросов. Назовём вопрос простым, если на него отвечают верно больше половины учеников. При каких парах (k, n) положительных целых чисел возможно, что ни один ученик не проваливается на экзамене, хотя ни один вопрос не является простым?

4. Игорь установил на компьютер новую версию редактора MS Word и набрал натуральное число n. Как оказалось, если набрать число, программа совершает следующие действия: выбирает нечётный делитель d этого числа и, если делитель равен 1, заменяет число n числом $n+1$, а если делитель больше 1, заменяет n числом n/d. После этого Word выбирает нечетный делитель нового числа и действует по тем же правилам. (Например, начав с числа 5, он может последовательно получить числа 6, 2, 3, 4, ...) Если Word получает степень числа 3 с целым неотрицательным показателем, он останавливается и позволяет пользователю набрать что–нибудь ещё. Может ли Word действовать так, чтобы Игорь больше никогда ничего не набирал?

5. На клетчатое поле размером $m \times n$ выкладывают квадраты 2×2. Квадраты могут налегать друг на друга, но каждый должен закрывать ровно четыре клетки поля. При каких m и n есть возможность покрыть поле так, чтобы каждая клетка была покрыта одинаковым отличным от нуля количеством квадратов?

6. Внутри параллелограмма $ABCD$ с углом $\angle B = 105°$ расположена точка M такая, что треугольник BMC — равносторонний и $\angle CMD = 135°$. Точка K — середина стороны AB. Докажите, что $\angle BKC = 45°$.

7. Решите в натуральных числах уравнение $(x+y)^3 = (x-y-6)^2$.

8. Углы треугольника ABC удовлетворяют условию $\angle B \geq 2\angle C$. Точка D — основание высоты, опущенной из вершины A, а точка M — середина BC. Докажите, что $DM \geq AB/2$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2013

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Докажите, что количество непустых подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 2013\}$, у которых среднее арифметическое элементов целое, нечётно.

2. Треугольная решётка составлена из n рядов шариков (в нижнем ряду n шариков, в следующем n–1, …, в самом верхнем один), образующих правильный треугольник. Сколькими способами можно разбить эту решётку на n рядов, из которых один состоит из n шариков, второй — из n–1 шарика, …, (n–1)-ый — из 2 шариков, n-ый — из 1 шарика?

3. Экзамен состоит из k вопросов, и в нём принимает участие n учеников. Ученик проваливается на экзамене, если он отвечает верно меньше, чем на половину вопросов. Назовём вопрос простым, если на него отвечают верно больше половины учеников. При каких парах (k, n) положительных целых чисел возможно, что ни один ученик не проваливается на экзамене, хотя ни один вопрос не является простым?

4. Игорь установил на компьютер новую версию редактора MS Word и набрал натуральное число n. Как оказалось, если набрать число, программа совершает следующие действия: выбирает нечётный делитель d этого числа и, если делитель равен 1, заменяет число n числом n+1, а если делитель больше 1, заменяет n числом n/d. После этого Word выбирает нечетный делитель нового числа и действует по тем же правилам. (Например, начав с числа 5, он может последовательно получить числа 6, 2, 3, 4, ...) Если Word получает степень числа 3 с целым неотрицательным показателем, он останавливается и позволяет пользователю набрать что–нибудь ещё. Может ли Word действовать так, чтобы Игорь больше никогда ничего не набирал?

5. На клетчатое поле размером $m \times n$ выкладывают квадраты 2×2. Квадраты могут налегать друг на друга, но каждый должен закрывать ровно четыре клетки поля. При каких m и n есть возможность покрыть поле так, чтобы каждая клетка была покрыта одинаковым отличным от нуля количеством квадратов?

6. Вне прямоугольника $ABCD$ с $AB < BC$ находится точка E такая, что $ABEC$ — равнобедренная трапеция (BE параллельно AC и $BA = EC$). Докажите, что если площадь треугольника BEC составляет четверть площади прямоугольника $ABCD$, то треугольник AED — равносторонний.

7. Решите в натуральных числах уравнение $(x+y)^3 = (x–y–6)^2$.

8. Углы треугольника ABC удовлетворяют условию $\angle B \geq 2\angle C$. Точка D — основание высоты, опущенной из вершины A, а точка M — середина BC. Докажите, что $DM \geq AB/2$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2013

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Для любых двух различных нечетных простых чисел p и q докажите неравенство $\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)^2>\frac{16}{pq}$.

2. Найдите все натуральные n, у которых существует такой положительный делитель d, что число n^2+7d является точным квадратом.

3. Для каждого натурального $n>1$ обозначим через T_n количество непустых подмножеств S множества $\{1,2, \ldots ,n\}$, у которых среднее арифметическое элементов целое. Докажите, что число T_n-n чётно.

4. Барон Мюнхгаузен разложил 10000 фруктов на две чаши весов. Далее он k раз сделал такую операцию: поменял два фрукта с правой чаши с одним фруктом с левой. Барон утверждает, что вначале и после каждой операции весы были в равновесии. При каком наибольшем k его слова могут быть правдой?

5. Докажите, что существует пара натуральных чисел m и n, больших 10^{100}, для которых число $(m+n-1)(m+n)$ делится на mn.

6. Внутри единичного квадрата отмечены 835 точек M_1, M_2, ..., M_{835}. Докажите, что можно выбрать пару соседних вершин квадрата A и B так, чтобы сумма периметров треугольников AM_1B, AM_2B, ..., $AM_{835}B$ была больше 2013.

7. Медведь и Крокодил играют в следующую игру. На столе лежит стопка из 2012^{2012} монет. Каждым ходом игрок может либо разделить любую стопку, содержащую чётное число монет, на две стопки, содержащие поровну монет, либо убрать со стола все стопки, содержащие нечётное число монет. Начинает Медведь. Проигрывает животное, не имеющее хода. Кто выиграет при правильной игре?

8. На медиане BD треугольника ABC отмечена такая точка E, что $AE = BE$. Из точки A на отрезок ED опущен перпендикуляр AF. Известно, что $\angle AED \geq 2\angle CED$. Докажите, что $2FD \geq AE$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2013

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Для любых двух различных нечетных простых чисел p и q докажите неравенство $\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)^2>\frac{16}{pq}$.

2. Найдите все натуральные n, у которых существует такой положительный делитель d, что число n^2+7d является точным квадратом.

3. Дан четырехугольник, длины сторон которого — натуральные числа. Известно, что длина каждой стороны является делителем его периметра. Докажите, что у него есть хотя бы две равные стороны.

4. Во всех клетках таблицы 17×17 расставлены нечётные натуральные числа. В каждой строке вычислили сумму чисел, полученные суммы перемножили, получили число A. В каждом столбце вычислили сумму чисел, полученные суммы перемножили, получили число B. Докажите, что $A+B \neq 1000000$.

5. Для какого наибольшего числа n существует n последовательных натуральных чисел, у каждого из которых сумма цифр не делится на 8?

6. Внутри единичного квадрата отмечены 835 точек M_1, M_2, ..., M_{835}. Докажите, что можно выбрать пару соседних вершин квадрата A и B так, чтобы сумма периметров треугольников AM_1B, AM_2B, ..., $AM_{835}B$ была больше 2013.

7. На конференцию приехали 100 учёных из трёх стран. Оказалось, что среди любых 25 участников есть по крайней мере двое одного возраста. Докажите, что или из какой-то страны приехали трое участников одного возраста, или из трёх разных стран приехало по одному участнику одного возраста.

8. На медиане BD треугольника ABC отмечена такая точка E, что $AE = BE$. Оказалось, что $\angle AED = 2\angle CED$. Докажите, что $AB = CE$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2013

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Для любых двух различных нечетных простых чисел p и q ($p > q$) докажите неравенство $p^4 - q^4 > 32pq$.

2. Барон Мюнхгаузен разложил 10 фруктов на две чаши весов. Далее он k раз сделал такую операцию: поменял два фрукта с правой чаши с одним фруктом с левой. Барон утверждает, что вначале и после каждой операции весы были в равновесии. При каком наибольшем k его слова могут быть правдой?

3. Дан четырехугольник, длины сторон которого — натуральные числа. Известно, что длина каждой стороны является делителем его периметра. Докажите, что у него есть хотя бы две равные стороны.

4. Во всех клетках таблицы 17×17 расставлены нечётные натуральные числа. В каждой строке вычислили сумму чисел, полученные суммы перемножили, получили число A. В каждом столбце вычислили сумму чисел, полученные суммы перемножили, получили число B. Докажите, что $A+B \neq 1000000$.

5. Для какого наибольшего числа n существует n последовательных натуральных чисел, у каждого из которых сумма цифр не делится на 8?

6. В комнате находится 12 человек, среди которых некоторые рыцари, всегда говорящие правду, а остальные — лжецы, которые всегда лгут. Каждый из находящихся в комнате сказал две фразы: «Среди моих знакомых в этой комнате не более пяти рыцарей». «Среди моих знакомых в этой комнате ровно четыре лжеца». Сколько может быть лжецов и рыцарей в этой комнате?

7. На конференцию приехали 100 учёных из трёх стран. Оказалось, что среди любых 25 участников есть по крайней мере двое одного возраста. Докажите, что или из какой-то страны приехали трое участников одного возраста, или из трёх разных стран приехало по одному участнику одного возраста.

8. Петя и Вася играют, выставляя по очереди королей на клетчатую доску 2×50. Начинает Петя. За ход игрок должен выставить на свободные поля двух королей, которые бьют друг друга. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто из мальчиков может выиграть, как бы не играл соперник?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2013

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Во всех клетках таблицы 17×17 расставлены нечётные натуральные числа. В каждой строке вычислили сумму чисел, полученные суммы перемножили, получили число A. В каждом столбце вычислили сумму чисел, полученные суммы перемножили, получили число B. Докажите, что $A+B \neq 1000000$.

2. На конференцию приехали 100 учёных из трёх стран. Оказалось, что среди любых 25 участников есть по крайней мере двое одного возраста. Докажите, что или из какой-то страны приехали трое участников одного возраста, или из трёх разных стран приехало по одному участнику одного возраста.

3. Докажите, что существует пара натуральных чисел m и n, больших 10^{100}, для которых число $(m+n-1)(m+n)$ делится на mn.

4. Барон Мюнхгаузен разложил 10000 фруктов на две чаши весов. Далее он k раз сделал такую операцию: поменял два фрукта с правой чаши с одним фруктом с левой. Барон утверждает, что вначале и после каждой операции весы были в равновесии. При каком наибольшем k его слова могут быть правдой?

5. В комнате находится 12 человек, среди которых некоторые рыцари, всегда говорящие правду, а остальные — лжецы, которые всегда лгут. Каждый из находящихся в комнате сказал две фразы: «Среди моих знакомых в этой комнате не более пяти рыцарей». «Среди моих знакомых в этой комнате ровно четыре лжеца». Сколько может быть лжецов и рыцарей в этой комнате?

6. Вася задумал число, не большее 2^{20}, все простые делители которого не превосходят тройки. Петя пытается узнать это число. Для этого он называет k натуральных чисел, а Вася называет в ответ те из них, которые делятся на задуманное им число. При каком наименьшем k Петя сможет подобрать такие k чисел, что по полученному ответу заведомо определит задуманное Васей число?

7. Какое наибольшее количество идущих подряд натуральных чисел может иметь суммы цифр, не делящиеся на 8?

8. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали по границам клеток на 18 прямоугольников. Один из них отложили, а из остальных составили

прямоугольник с периметром 234. Найдите размеры отложенного прямоугольника.

ЯГУБОВ.РФ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2013

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Барон Мюнхгаузен разложил 10 фруктов на чаши весов. Далее он шесть раз сделал такую операцию: поменял два фрукта с правой чаши с одним фруктом с левой. Барон утверждает, что вначале и после каждой операции весы были в равновесии. Могут ли его слова быть правдой?

2. Какое наибольшее количество идущих подряд натуральных чисел могут иметь сумму цифр, не делящуюся на 4?

3. На конференцию приехали 100 учёных из четырёх стран. Оказалось, что среди любых 13 участников есть по крайней мере двое одного возраста. Докажите, что из какой-то страны приехали двое одного возраста и одного пола.

4. В магазине есть палочки только простых длин, но зато всех: 2 см, 3 см, 5 см, 7 см, и т.д. Какое наименьшее число палочек разных длин надо купить, чтобы, сложить из них контур квадрата?

5. Во всех клетках доски 7×7 по одной сидят мухи. По хлопку они одновременно перелетели в соседние по диагонали клетки. На клетке при этом могло оказаться несколько мух. Какое наименьшее число клеток могли оказаться пустыми?

6. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали по границам клеток на 18 прямоугольников. Один из них отложили в сторону, а из остальных составили прямоугольник с периметром 234. Найдите размеры отложенного прямоугольника.

7. В комнате находится 12 человек, среди которых некоторые рыцари, всегда говорящие правду, а остальные — лжецы, которые всегда лгут. Каждый из находящихся в комнате сказал две фразы: «Среди моих знакомых в этой комнате не более пяти рыцарей». «Среди моих знакомых в этой комнате ровно четыре лжеца». Сколько может быть лжецов и рыцарей в этой комнате?

8. Петя и Вася играют, выставляя по очереди королей на клетчатую доску 2×50. Начинает Петя. За ход игрок должен выставить на свободные поля двух королей, которые бьют друг друга. Кто не

может сделать ход – проиграл. Кто из мальчиков может выиграть, как бы не играл соперник?

ЯГУБОВ.РФ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2013

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

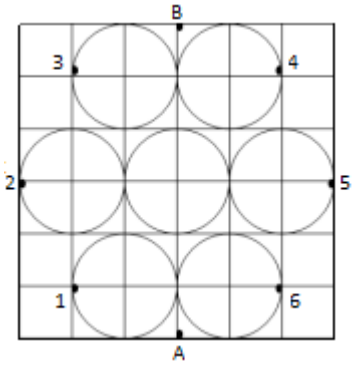
1. Барон Мюнхгаузен разложил 10 фруктов на чаши весов. Далее он 6 раз сделал такую операцию: поменял два фрукта с правой чаши с одним фруктом с левой. Барон утверждает, что вначале и после каждой операции весы были в равновесии. Могут ли его слова быть правдой?

2. Юный колдун научился превращать шарик в два шарика и пять роликов, либо четыре шарика в три кубика и два ролика. Он зашел в комнату, где были только шарики, и через некоторое время там оказались 1500 кубиков, 1500 роликов и ни одного шарика. Сколько шариков было в комнате сначала?

3. Участникам кружка было выдано за полугодие 10 домашних заданий. Если задание очень трудное, или ученик болел, или он — лентяй, то ученик не решает ни одной задачи, иначе он решает хотя бы одну задачу. Про каждого известно, сколько задач он решил в каждом задании. Среди этих чисел 69 нулей и 131 не нуль. Известно, что очень трудными были всего два домашних задания, и каждый школьник болел не более одного раза. Какое наименьшее число лентяев может быть в кружке?

4. В магазине есть палочки только простых длин, но зато всех: 2 см, 3 см, 5 см, 7 см, и т.д. Какое наименьшее число палочек разных длин можно купить, чтобы сложить из них контур квадрата?

5. На рисунке изображена схема дорожек парка (все стороны клеток и кружочки), в точке A — вход, в точке B — выход, а в точках 1, 2, …, 6 — главные достопримечательности. Малыш проходит сторону клеточки за 2 минуты, а каждый кружок обходит целиком за 12 минут. Может ли он так выбрать порядок обхода и путь, чтобы не больше чем за 44 минуты пройти из A в B, посетив все достопримечательности?



6. Клетчатый квадрат 18×18 разрезали на 18 прямоугольников. Один из них отложили, а из остальных составили квадрат 10×10. Найдите размеры отложенного прямоугольника.

7. В комнате находится 12 человек, среди которых некоторые рыцари, всегда говорящие правду, а остальные — лжецы, которые всегда лгут. Каждый из находящихся в комнате сказал две фразы: «Среди моих знакомых в этой комнате не более пяти рыцарей». «Среди моих знакомых в этой комнате ровно четыре лжеца». Сколько может быть лжецов и рыцарей в этой комнате?

8. Петя и Вася играют, выкладывая по очереди домино на клетчатую доску 2×50. Начинает Петя. Каждое домино закрывает ровно два поля. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто из них может выигрывать, как бы не играл соперник?