МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 20.02.2012

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Пусть $f(x) = (x-1/x)^2$. Докажите, что если $xyz = 1$, то из отрезков с длинами $f(x)$, $f(y)$, $f(z)$ нельзя составить треугольник. На всякий случай напомним, что вершины треугольника по определению не лежат на одной прямой.

2. Каждый житель острова людоедов принадлежит к одному из двух племён — рыцарей, которые всегда говорят правду, или лжецов, которые всегда лгут. Однажды 2013 островитян стали в круг и каждый заявил: «Оба моих соседа — лжецы». Тут началась перебранка, и одного из островитян съели. После этого оставшиеся 2012 островитян снова стали в круг, и каждый заявил: «Оба мои соседа не из моего племени». Кого съели — рыцаря или лжеца?

3. В молодежном движении «Ихние» состоят 2012 мальчиков и 2012 девочек. Каждый из участников движения не более ста раз принимал участие в митингах в поддержку стабильности. Известно, что каждый мальчик вместе с каждой девочкой посетил по крайней мере один митинг. Докажите, что был митинг, в котором принимали участие хотя бы 11 мальчиков и 11 девочек.

4. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы условиями $a_{n+3} = a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n$ при $n \geq 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$; $b_{n+3} = b_{n+2}+2b_{n+1}+b_n$ при $n \geq 0$, $b_0 = 3$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$. Сколько существует чисел, встречающихся в обеих последовательностях?

5. На сторонах AB, BC, CD и DA параллелограмма $ABCD$ взяты точки X, Y, Z, K соответственно таким образом, что $XZ \parallel BC \parallel AD$ и $YK \parallel AB \parallel CD$. Прямые XZ и YK пересекаются в точке P, а прямые BZ и DY — в точке Q. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой.

6. Найдите все простые числа p, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 такие, что $p^2 = q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2+q_5^2$.

7. Каждая точка плоскости покрашена в один из двух цветов так, что в любом параллелограмме с тремя одноцветными вершинами четвертая вершина того же цвета. Докажите, что все точки плоскости покрашены в один цвет.

8. Точка O — центр квадрата $ABCD$. На сторонах BC и CD, как на основаниях, построены во внешнюю сторону равные равнобедренные треугольники BCI и CDK. Точка M — середина CI. Докажите, что прямые OM и BK перпендикулярны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 20.02.2012

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Положительные числа a, b, x и y удовлетворяют условию $ab \geq ax+by$. Докажите, что $\sqrt{a+b} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

2. Каждый житель острова людоедов принадлежит к одному из двух племён — рыцарей, которые всегда говорят правду, или лжецов, которые всегда лгут. Однажды 2013 островитян стали в круг и каждый заявил: «Оба моих соседа — лжецы». Тут началась перебранка, и одного из островитян съели. После этого оставшиеся 2012 островитян снова стали в круг, и каждый заявил: «Оба мои соседа не из моего племени». Кого съели — рыцаря или лжеца?

3. В молодежном движении «Ихние» состоят 2012 мальчиков и 2012 девочек. Каждый из участников движения не более двух раз принимал участие в митингах в поддержку стабильности. Известно, что каждый мальчик вместе с каждой девочкой посетил по крайней мере один митинг. Докажите, что был митинг, в котором принимали участие хотя бы 2012 человек.

4. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы условиями $a_{n+3} = a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n$ при $n \geq 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$; $b_{n+3} = b_{n+2}+2b_{n+1}+b_n$ при $n \geq 0$, $b_0 = 3$, $b_1 = 2$, $b_2 = 1$. Сколько существует чисел, встречающихся в обеих последовательностях?

5. В треугольнике ABC точка M — середина AB, G — точка пересечения медиан, $D \neq A$ — точка на прямой AG такая, что $AG = GD$, $B \neq E$ — точка на прямой BG такая, что $BG = GE$. Докажите, что $BM = CD$ тогда и только тогда, когда $AB = BE$.

6. Найдите все простые числа p, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 такие, что $p^2 = q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2+q_5^2$.

7. Каждая точка плоскости покрашена в один из двух цветов так, что в любом параллелограмме с тремя одноцветными вершинами четвертая вершина того же цвета. Докажите, что все точки плоскости покрашены в один цвет.

8. Точка O — центр квадрата $ABCD$. На сторонах BC и CD, как на основаниях, построены во внешнюю сторону равные равнобедренные треугольники BCI и CDK. Точка M — середина CI. Докажите, что прямые OM и BK перпендикулярны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 20.02.2012

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Положительные числа a, b, x и y удовлетворяют условию $ab \geq ax+by$. Докажите, что $\sqrt{a+b} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

2. Каждый житель острова людоедов принадлежит к одному из двух племён — рыцарей, которые всегда говорят правду, или лжецов, которые всегда лгут. Однажды 2013 островитян стали в круг и каждый заявил: «Оба моих соседа — лжецы». Тут началась перебранка, и одного из островитян съели. После этого оставшиеся 2012 островитян снова стали в круг, и каждый заявил: «Оба мои соседа не из моего племени». Кого съели — рыцаря или лжеца?

3. В молодежном движении «Ихние» состоят 2012 мальчиков и 2012 девочек. Каждый из участников движения не более двух раз принимал участие в митингах в поддержку стабильности. Известно, что каждый мальчик вместе с каждой девочкой посетил по крайней мере один митинг. Докажите, что был митинг, в котором принимали участие хотя бы 2012 человек.

4. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы условиями $a_{n+2} = a_{n+1}+a_n$ при $n \geq 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$; $b_{n+2} = b_{n+1}+b_n$ при $n \geq 0$, $b_0 = 2$, $b_1 = 1$. Сколько существует чисел, встречающихся в обеих последовательностях?

5. В треугольнике ABC точка M — середина AB, G — точка пересечения медиан, $D \neq A$ — точка на прямой AG такая, что $AG = GD$, $E \neq B$ — точка на прямой BG такая, что $BG = GE$. Докажите, что $BM = CD$ тогда и только тогда, когда $AB = BE$.

6. Найдите все простые числа p, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 такие, что $p^2 = q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2+q_5^2$.

7. На одной из клеток незакрашенной доски 7×7 стоит маляр. Каждую клетку, на которой маляр оказывается, он закрашивает. После этого он может переместиться на соседнюю по стороне клетку, если у этой новой клетки нет соседних закрашенных клеток, кроме той, с которой приходит маляр. Может ли маляр закрасить 32 клетки?

8. Точка O — центр квадрата $ABCD$. На сторонах BC и CD, как на основаниях, построены во внешнюю сторону равные равнобедренные треугольники BCI и CDK. Точка M — середина CI. Докажите, что прямые OM и BK перпендикулярны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 20.02.2012

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Положительные числа a, b, x и y удовлетворяют условию $ab \ge ax+by$. Докажите, что $\sqrt{a+b} \ge \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

2. Вася взял десять различных натуральных чисел. Затем он выписал на доску всевозможные суммы нескольких из этих чисел (из одного слагаемого, из двух слагаемых, из трех слагаемых, ..., из десяти слагаемых). Всего Вася выписал 1023 числа (среди которых могли быть и равные). Могло ли среди выписанных чисел оказаться хотя бы 520 простых чисел?

3. В молодежном движении «Ихние» состоят 2012 мальчиков и 2012 девочек. Каждый из участников движения не более ста раз принимал участие в митингах в поддержку стабильности. Известно, что каждый мальчик вместе с каждой девочкой посетил по крайней мере один митинг. Докажите, что был митинг, в котором принимали участие хотя бы 11 мальчиков и 11 девочек.

4. На столе лежат палочки длиной 1 см, 2 см, …, 100 см. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди убирают со стола палочки: Петя одну, а Вася две, пока не останутся 3 палочки. Если из них можно сложить треугольник, то выигрывает Петя, в противном случае выигрывает Вася. Начинает Петя. Кто выиграет при правильной игре?

5. Маляр ходит по доске 7×7. Как только он попадает на клетку, он ее закрашивает. После этого он может переместиться на соседнюю по стороне клетку, если остальные соседние с ней по стороне клетки еще не закрашены. Может ли маляр закрасить 33 клетки?

6. Найдите все простые числа p, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 такие, что $p^2 = q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2+q_5^2$.

7. Как известно, четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны и равны, называется *параллелограммом*. Все точки плоскости покрашены в черный и белый цвета так, что в любом параллелограмме с тремя одноцветными вершинами четвертая вершина того же цвета. Докажите, что все точки плоскости покрашены в один цвет.

8. На стороне CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ отмечена точка E, а на стороне AB отмечена точка F. Оказалось, что $\angle EBA = \angle EAB = \angle EAD$, $\angle BEF+\angle CEF = \angle AED$ и $BF+DE = CE$. Докажите, что $AD > CF$.

XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 20.02.2012

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Положительные числа a, b, x и y удовлетворяют условию $ab \geq ax+by$. Докажите, что $\sqrt{a+b} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}$.

2. Вася взял десять различных натуральных чисел. Затем он выписал на доску всевозможные суммы нескольких из этих чисел (из одного слагаемого, из двух слагаемых, из трех слагаемых, ..., из десяти слагаемых). Всего Вася выписал 1023 числа (среди которых могли быть и равные). Могло ли среди выписанных чисел оказаться хотя бы 520 простых чисел?

3. В молодежном движении «Ихние» состоят 2012 мальчиков и 2012 девочек. Каждый из участников движения не более двух раз принимал участие в митингах в поддержку стабильности. Известно, что каждый мальчик вместе с каждой девочкой посетил по крайней мере один митинг. Докажите, что был митинг, в котором принимали участие хотя бы 2012 человек.

4. На столе лежат палочки длиной 1 см, 2 см, …, 100 см. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди убирают со стола палочки: Петя одну, а Вася две, пока не останутся 3 палочки. Если из них можно сложить треугольник, то выигрывает Петя, в противном случае выигрывает Вася. Начинает Петя. Кто выиграет при правильной игре?

5. Маляр ходит по доске 7×7. Как только он попадает на клетку, он ее закрашивает. После этого он может переместиться на соседнюю по стороне клетку, если остальные соседние с ней по стороне клетки еще не закрашены. Может ли маляр закрасить 32 клетки?

6. Найдите все простые числа p, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 такие, что $p^2 = q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2+q_5^2$.

7. Как известно, четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны и равны, называется *параллелограммом*. Все точки плоскости покрашены в черный и белый цвета так, что выполняется свойство: в любом параллелограмме с тремя одноцветными вершинами четвертая вершина того же цвета. Докажите, что все точки плоскости покрашены в один цвет.

8. Точка E — середина стороны CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. На стороне AB отмечена точка F. Оказалось, что $\angle EBA = \angle EAB = \angle EAD$, $\angle BEF+\angle CEF = \angle AED$. Докажите, что $BF+CF = AD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 20.02.2012

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Положительные числа a, b, x и y удовлетворяют условию $ab \geq ax+by$. Докажите, что $ab \geq 4xy$.

2. Вася взял три различных натуральных числа a, b и c и выписал на бумажку семь чисел a, b, c, $a+b$, $b+c$, $c+a$, $a+b+c$. Какое наибольшее количество простых чисел может быть среди них?

3. Каждый житель острова людоедов принадлежит к одному из двух племён: рыцарей, которые всегда говорят правду, или лжецов, которые всегда лгут. Однажды 1000 островитян встали в круг, и каждый заявил: «Оба моих соседа не из моего племени». Какое наибольшее количество рыцарей могло стоять в кругу?

4. На столе лежат палочки длиной 10 см, 11 см, …, 100 см. Петя и Вася играют в игру. Они по очереди убирают со стола по одной палочке, пока не останутся 3 палочки. Если из них можно сложить треугольник, то выигрывает Петя, в противном случае выигрывает Вася. Начинает Петя. Кто выиграет при правильной игре?

5. Маляр ходит по доске 7×7. Как только он попадает на клетку, он ее закрашивает. После этого он может переместиться на соседнюю по стороне клетку, если остальные соседние с ней по стороне клетки еще не закрашены. Может ли маляр закрасить 32 клетки?

6. Произведение четырех натуральных чисел заканчивается на 2012, а их сумма нечетна. Докажите, что одно из чисел делится на 4.

7. Число назовем *хорошим*, если оно 20-значное и любое другое 20-значное число с такой же суммой цифр больше него. Сколько существует хороших чисел?

8. Точка E — середина стороны CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. На стороне AB отмечена точка F. Оказалось, что $\angle EBA = \angle EAB = \angle EAD$, $\angle BEF+\angle CEF = \angle AED$. Докажите, что $BF+CF = AD$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 20.02.2012

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Маляр ходит по доске 7×7. Как только он попадает на клетку, он ее закрашивает. После этого он может переместиться на соседнюю по стороне клетку, если остальные соседние с ней по стороне клетки еще не закрашены. Может ли маляр закрасить 33 клетки?

2. Произведение четырех натуральных чисел заканчивается на 2012, а их сумма нечетна. Докажите, что одно из чисел делится на 4.

3. На доске записаны числа от 1 до 100. Петя и Вася играют в игру: они по очереди стирают эти числа по одному пока не останутся 3 числа. Начинает Петя. Он выигрывает, если каждое из оставшихся чисел будет меньше суммы двух других, в противном случае выигрывает Вася. Кто выиграет при правильной игре?

4. Каждый житель острова людоедов принадлежит к одному из двух племён — рыцарей, которые всегда говорят правду, или лжецов, которые всегда лгут. Однажды 2013 островитян встали в круг и каждый заявил: «Оба моих соседа — лжецы». Тут началась перебранка, и одного из островитян съели. После этого оставшиеся 2012 островитян снова встали в круг, возможно, в другом порядке, и каждый заявил: «Оба моих соседа не из моего племени». Кого съели — рыцаря или лжеца?

5. Число назовем *хорошим*, если оно 20-значное и любое другое 20-значное число с такой же суммой цифр больше него. Сколько существует хороших чисел?

6. Найдите все простые числа p, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 такие, что $p^2 = q_1^2+q_2^2+q_3^2+q_4^2+q_5^2$.

7. В молодежном движении «Ихние» состоят 2012 мальчиков и 2012 девочек. Каждый из участников движения не более двух раз принимал участие в митингах в поддержку стабильности. Известно, что каждый мальчик вместе с каждой девочкой посетил по крайней мере один митинг. Докажите, что был митинг, в котором принимали участие хотя бы 2012 человек.

8. Вася взял десять различных натуральных чисел. Затем он выписал на доску всевозможные суммы нескольких из этих чисел (из одного слагаемого, из двух слагаемых, из трех слагаемых, ..., из десяти слагаемых). Всего Вася выписал 1023 числа (среди которых могли быть и равные). Могло ли среди выписанных чисел оказаться хотя бы 520 простых чисел?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 20.02.2012

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Маляр ходит по доске 7×7. Как только он попадает на клетку, он ее закрашивает. После этого он может переместиться на соседнюю по стороне клетку, если остальные соседние с ней по стороне клетки еще не закрашены. Может ли маляр закрасить 32 клетки?

2. Произведение трех натуральных чисел заканчивается на 2012, а их сумма четна. Докажите, что одно из чисел делится на 4.

3. На доске записаны числа от 1 до 100. Петя и Вася играют в игру: они по очереди стирают эти числа по одному пока не останутся 3 числа. Начинает Петя. Он выигрывает, если каждое из оставшихся чисел будет меньше суммы двух других, в противном случае выигрывает Вася. Кто выиграет при правильной игре?

4. Каждый житель острова людоедов принадлежит к одному из двух племён: рыцарей, которые всегда говорят правду, или лжецов, которые всегда лгут. Однажды 1000 островитян встали в круг, и каждый заявил: «Оба моих соседа не из моего племени». Какое наибольшее количество рыцарей могло стоять в кругу?

5. Число назовем *хорошим*, если оно 20-значное и любое другое 20-значное число с такой же суммой цифр больше него. Сколько существует хороших чисел?

6. Двойка в натуральной степени равна сумме двух квадратов простых чисел (эти квадраты могут совпадать). Найдите все такие пары простых чисел и докажите, что других нет.

7. Незнайка задумал число МАЙ, умножил его на другое число и получил МАРТ (здесь одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные). Докажите, что он не умеет считать.

8. Вася взял четыре различных натуральных числа. Затем он выписал на доску всевозможные суммы нескольких из этих чисел (из одного слагаемого, из двух слагаемых, из трех слагаемых и из четырех слагаемых). Всего Вася выписал 15 чисел (среди которых могли быть и равные). Могло ли среди них оказаться 10 простых?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 20.02.2012

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

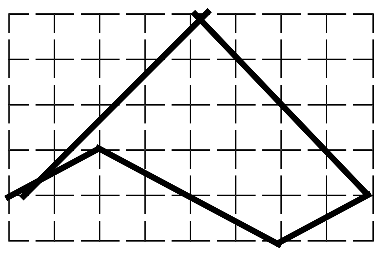
1. Маляр ходит по доске 7 ×7. Как только он попадает на клетку, он ее закрашивает. После этого он может переместиться на соседнюю по стороне клетку, если остальные соседние с ней по стороне клетки еще не закрашены. Может ли маляр закрасить 32 клетки?

2. Произведение трех натуральных чисел заканчивается на 2012, а их сумма четна. Докажите, что одно из чисел делится на 4.

3. Число, записанное на доске, делят на 2, если оно четное, в противном случае прибавляют 3. Какое число было записано на доске, если известно, что оно делилось на 7 и после того, как к нему применили 6 раз указанную операцию, на доске оказалось число 9.

4. Каждый житель острова людоедов принадлежит к одному из двух племён: рыцарей, которые всегда говорят правду, или лжецов, которые всегда лгут. Однажды островитяне встали в круг, и каждый заявил: «Оба моих соседа не из моего племени». Известно, что в кругу стояло 100 лжецов. Какое наибольшее количество рыцарей могло стоять в кругу?

5. Число назовем *хорошим*, если оно 20-значное и любое другое 20-значное число с такой же суммой цифр больше него. Сколько существует хороших чисел?



6. Разрежьте фигуру с рисунка на две одинаковые части.

7. Незнайка задумал число МАЙ, умножил его на другое число и получил МАРТ (здесь одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные). Докажите, что он не умеет считать.

8. Вася взял четыре различных натуральных числа. Затем он выписал на доску всевозможные суммы нескольких из этих чисел (из одного слагаемого, из двух слагаемых, из трех слагаемых и из четырех слагаемых). Всего Вася выписал 15 чисел (среди которых могли быть и равные). Могло ли среди них оказаться 9 нечетных?

XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 21.02.2012

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Биссектрисы внешних углов DAC и DBC пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle APD = \angle BPC$ тогда и только тогда, когда $AD+AC = BC+BD$.

2. При каком наименьшем k в любой раскраске клеток таблицы $2n\times k$ в n цветов найдутся четыре клетки одного цвета, стоящие на пересечении двух строк и двух столбцов?

3. В мешке 100 котов — черных, белых и серых. Количество чёрных котов больше, чем удвоенное количество белых; утроенное количество белых котов больше, чем учетверённое количество серых; утроенное количество серых котов больше количества чёрных. Сколько котов каждого цвета в мешке?

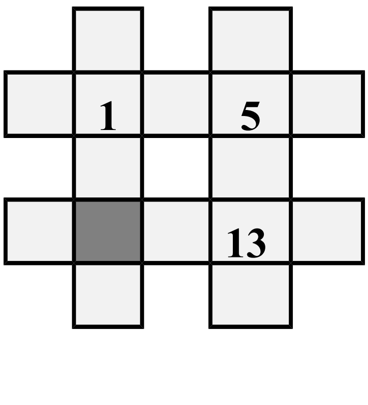
4. Функция $f(x)$ определена при каждом натуральном x условием $f(x) = y$, где $y! \leq x < (y+1)!$. Докажите, что $f(a^2)+f(b^2) \leq 2f(ab)+1$ при всех натуральных a и b.

5. В 8а, 8б, 8в классах по 30 учеников. Оказалось, что если взять по ученику из каждого класса, то среди этих трех учеников найдутся двое знакомых и двое незнакомых. Докажите, что найдется ученик, который знает всех учеников в одном из двух других классов.

6. Точка X лежит внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$. Оказалось, что основания P, Q, R и S перпендикуляров, опущенных из X на прямые AB, BC, CD и DA соответственно, лежат на сторонах четырехугольника. Докажите, что $PA\cdot AB+RC\cdot CD = (AD^2+BC^2)/2$ тогда и только тогда, когда $QB\cdot BC+SD\cdot DA = (AB^2+CD^2)/2$.

7. Найдите все натуральные числа n, для которых произведение $(2^n+1)(3^n+2)$ делится на 5^n.

8. В клетки фигуры на рисунке вписаны все натуральные числа от 1 до 16 так, что суммы чисел в обеих строчках и обоих столбцах одинаковы. Положения чисел 1, 5 и 13 показаны на рисунке. Какое число может стоять в заштрихованной клетке?



XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 21.02.2012

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Биссектрисы внешних углов DAC и DBC пересекаются в точке P. Докажите, что $\angle APD = \angle BPC$ тогда и только тогда, когда $AD+AC = BC+BD$.

2. При каком наименьшем k в любой раскраске клеток таблицы $10\times k$ в 5 цветов найдутся четыре клетки одного цвета, стоящие на пересечении двух строк и двух столбцов?

3. В мешке 100 котов — черных, белых и серых. Количество чёрных котов больше, чем удвоенное количество белых; утроенное количество белых котов больше, чем учетверённое количество серых; утроенное количество серых котов больше количества чёрных. Сколько котов каждого цвета в мешке?

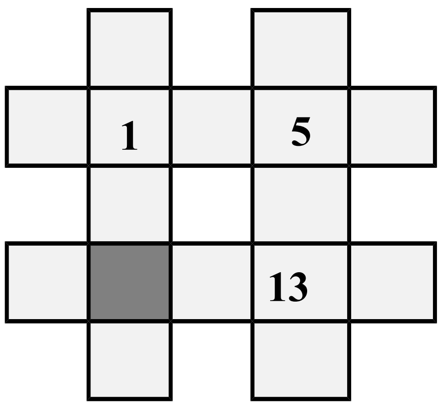
4. Функция $f(x)$ определена при каждом натуральном x условием $f(x) = y$, где $y! \leq x < (y+1)!$. Докажите, что $f(a^2)+f(b^2) \leq 2f(ab)+1$ при всех натуральных a и b.

5. В 8а, 8б, 8в классах по 30 учеников. Оказалось, что если взять по ученику из каждого класса, то среди этих трех учеников найдутся двое знакомых и двое незнакомых. Докажите, что найдется ученик, который знает всех учеников в одном из двух других классов.

6. Дан треугольник ABC, где $\angle BAC = 60°$. Точка S — середина биссектрисы AD. Известно, что $\angle SBA = 30°$. Найдите DC/BS.

7. Найдите все натуральные числа n, для которых произведение $(2^n+1)(3^n+2)$ делится на 5^n.

8. В клетки фигуры на рисунке вписаны все натуральные числа от 1 до 16 так, что суммы чисел в обеих строчках и обоих столбцах одинаковы. Положения чисел 1, 5 и 13 показаны на рисунке. Какое число может стоять в заштрихованной клетке?



XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 21.02.2012

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Биссектрисы внешних углов DAC и DBC пересекаются в точке P. Докажите, что если $AD+AC = BC+BD$, то $\angle APD = \angle BPC$.

2. При каком наименьшем k в любой раскраске клеток таблицы $10\times k$ в 5 цветов найдутся четыре клетки одного цвета, стоящие на пересечении двух строк и двух столбцов?

3. В мешке 73 кота — черных, белых и серых. Количество чёрных котов больше, чем удвоенное количество белых; утроенное количество белых котов больше, чем учетверённое количество серых; утроенное количество серых котов больше количества чёрных. Сколько котов каждого цвета в мешке?

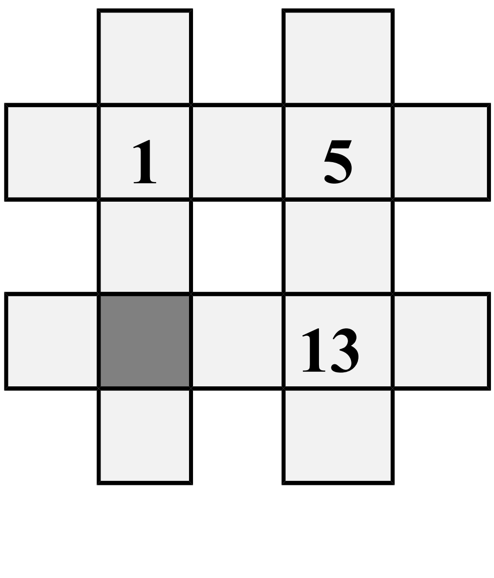
4. Докажите, что если $x = |a|+|b|+|c|$ и $y = |a-1|+|b-2|+|c-3|$, то $x+y \geq 6$. Здесь a, b, c — произвольные действительные числа.

5. В 8а, 8б, 8в классах по 20 учеников. Оказалось, что если взять по ученику из каждого класса, то среди этих трех учеников найдутся двое знакомых. Докажите, что найдется ученик, у которого в каком-то классе не менее 10 знакомых.

6. Дан треугольник ABC, где $\angle BAC = 60°$. Точка S — середина биссектрисы AD. Известно, что $\angle SBA = 30°$. Найдите DC/BS.

7. Найдите все натуральные числа n, для которых произведение $(2^n+1)(3^n+2)$ делится на 5^n.

8. В клетки фигуры на рисунке вписаны все натуральные числа от 1 до 16 так, что суммы чисел в обеих строчках и обоих столбцах одинаковы. Положения чисел 1, 5 и 13 показаны на рисунке. Какое число может стоять в заштрихованной клетке?



МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 21.02.2012

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. У Пети есть весы, которые при взвешивании любого предмета показывают вес либо на A граммов, либо на B граммов больше истинного. Ему известно об этой особенности весов, но неизвестны числа A и B. Пете подарили 10 одинаковых монет. Как ему узнать, сколько весит монета?

2. При каком наименьшем k в любой раскраске клеток таблицы $10\times k$ в 5 цветов найдутся четыре клетки одного цвета, стоящие на пересечении двух строк и двух столбцов?

3. Для чисел $0 < x < 2$ и $0 < y < 2$ докажите неравенство $\dfrac{x-y}{x+y-xy} < 1$.

4. Клетки доски 101×101 раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Можно ли во всех клетках этой доски расставить единицы, двойки или тройки таким образом, чтобы в любой строке и любом столбце сумма чисел на белых клетках была равна сумме чисел на черных клетках?

5. В 7а, 7б, 7в классах по 30 учеников. Оказалось, что если взять по ученику из каждого класса, то среди этих трех учеников найдутся двое знакомых и двое незнакомых. Докажите, что найдется ученик, который знает всех учеников в одном из двух других классов.

6. Найдите все натуральные n, для которых $\{\sqrt{n}\} = \{\sqrt{n+100}\}$. Здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x, то есть разность между числом x и наибольшим не превосходящим его целым числом (например, $\{2{,}7\} = 0{,}7$, $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1$).

7. Найдите все натуральные числа n, для которых произведение $(2^n+1)(3^n+2)$ делится на 5^n.

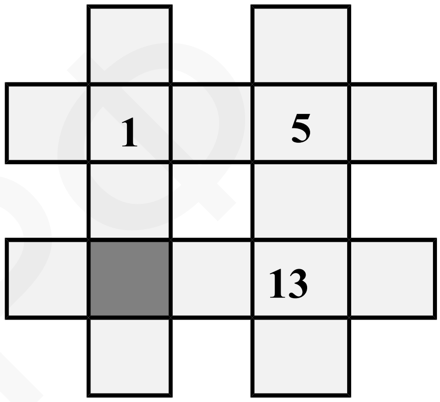
8. Дан треугольник ABC, где $\angle BAC = 60°$. Точка S — середина биссектрисы AD. Известно, что $\angle SBA = 30°$. Найдите DC/BS.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 21.02.2012

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Для любого натурального числа $n \geq 2$ обозначим через a_n наибольшее простое число, не превосходящее n. Вычислите сумму $a_2 – a_3 + a_4 – a_5 + \ldots + a_{10000}$.

2. В клетки фигуры на рисунке вписаны все натуральные числа от 1 до 16 так, что суммы чисел в обеих строчках и обоих столбцах одинаковы. Положения чисел 1, 5 и 13 показаны на рисунке. Какое число может стоять в заштрихованной клетке?



3. Для чисел $0 < x < 2$ и $0 < y < 2$ докажите неравенство $\dfrac{x-y}{x+y-xy} < 1$.

4. Клетки доски 101×101 раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Можно ли во всех клетках этой доски расставить единицы, двойки или тройки таким образом, чтобы в любой строке и любом столбце сумма чисел на белых клетках была равна сумме чисел на черных клетках?

5. В 7а, 7б, 7в классах по 30 учеников. Оказалось, что если взять по ученику из каждого класса, то среди этих трех учеников найдутся двое знакомых и двое незнакомых. Докажите, что найдется ученик, который знает всех учеников в одном из двух других классов.

6. Найдите все натуральные n, для которых $\{\sqrt{n}\} = \{\sqrt{n+31}\}$. Здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x, то есть разность между числом x и наибольшим не превосходящим его целым числом (например, $\{2{,}7\} = 0{,}7$, $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - 1$).

7. Найдите все натуральные числа n, для которых произведение $(2^n+1)(3^n+2)$ делится на 5^n.

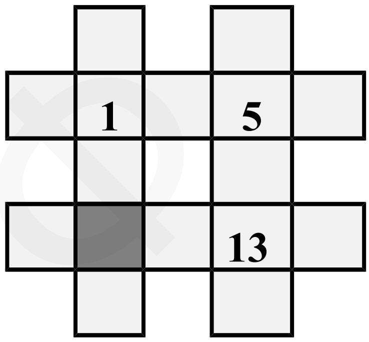
8. Дан треугольник ABC, где $\angle BAC = 60°$. Точка S — середина биссектрисы AD. Известно, что $\angle SBA = 30°$. Найдите DC/BS.

XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 21.02.2012

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Для любого натурального числа $n \geq 2$ обозначим через a_n наибольшее простое число, не превосходящее n. Вычислите сумму $a_2–a_3+a_4–a_5+... +a_{10000}$.



2. В клетки фигуры на рисунке вписаны все натуральные числа от 1 до 16 так, что суммы чисел в обеих строчках и обоих столбцах одинаковы. Положения чисел 1, 5 и 13 показаны на рисунке. Какое число может стоять в заштрихованной клетке?

3. Докажите, что если $x = |a|+|b|+|c|$ и $y = |a–1|+|b–2|+|c–3|$, то $x+y \geq 6$. Здесь a, b, c — произвольные действительные числа.

4. Клетки доски 5×5 раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Можно ли во всех клетках этой доски расставить единицы, двойки или тройки таким образом, чтобы в любой строке и любом столбце сумма чисел на белых клетках была равна сумме чисел на черных клетках?

5. В 7а, 7б, 7в классах по 20 учеников. Оказалось, что если взять по ученику из каждого класса, то среди этих трех учеников найдутся двое знакомых. Докажите, что найдется ученик, у которого в каком-то классе не менее 10 знакомых.

6. У торговца есть 2012 одинаковых персиков. Каждый весит целое число граммов. Покупатель знает, что весы торговца всегда показывают вес положенного на них груза с одним и тем же (не зависящим от веса) завышением не более чем на полкило (это завышение не обязательно на целое число грамм). За какое наименьшее число взвешиваний покупатель может узнать, сколько весит один персик?

7. Бизнесмен Борис Михайлович хочет купить Дворец Юных и превратить его в Торговый центр. Официальная цена Дворца — 10 000 000 000 рублей. Но бизнесмен обнаружил, что если дать взятку в размере 1 000 000 руб, то цена Дворца уменьшается вдвое (например, после двух взяток цена дворца уменьшится в 4 раза). Какое количество взяток должен дать бизнесмен, чтобы купить Дворец с наименьшими затратами?

8. Дан треугольник ABC, где $\angle BAC = 60°$. Точка S — середина биссектрисы AD. Известно, что $\angle SBA = 30°$. Найдите DC/BS.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 21.02.2012

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Клетки доски 101×101 раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Можно ли во всех клетках этой доски расставить единицы, двойки или тройки таким образом, чтобы в любой строке и любом столбце сумма чисел на белых клетках была равна сумме чисел на черных клетках?

2. В 7а, 7б, 7в классах по 20 учеников. Оказалось, что если взять по ученику из каждого класса, то среди этих трех учеников найдутся двое знакомых. Докажите, что найдется ученик, у которого в каком-то классе не менее 10 знакомых.

3. Для любого натурального числа $n \geq 2$ обозначим через a_n наибольшее простое число, не превосходящее n. Вычислите сумму $a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots + a_{10000}$.

4. Найдите все натуральные числа n, для которых произведение $(2^n+1)(3^n+2)$ делится на 5^n.

5. Дана таблица, состоящая из десяти строк и шестнадцати столбцов. В каждом столбце стоят 3 фишки. Докажите, что найдутся четыре фишки, стоящие на пересечении двух строк и двух столбцов.

6. Бизнесмен Борис Михайлович хочет купить Дворец Юных и превратить его в Торговый центр. Официальная цена Дворца — 10 000 000 000 рублей. Но бизнесмен обнаружил, что если дать взятку в размере 1 000 000 руб, то цена Дворца уменьшается вдвое (например, после двух взяток цена дворца уменьшится в 4 раза). Какое количество взяток должен дать бизнесмен, чтобы купить Дворец с наименьшими затратами?

7. У Пети есть весы, которые при взвешивании любого предмета показывают вес либо на A граммов, либо на B граммов больше истинного. Ему известно об этой особенности весов, но неизвестны числа A и B. Пете подарили 10 одинаковых монет. Как ему узнать, сколько весит монета?

8. В мешке 80 котов — черных и белых. Учетверенное количество чёрных котов больше, чем упятеренное количество белых; учетверенное количество белых котов больше, чем утроенное количество чёрных. Сколько котов каждого цвета сидят в мешке?

XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 21.02.2012

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Клетки доски 101×101 раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Можно ли во всех клетках этой доски расставить единицы, двойки или тройки таким образом, чтобы в любой строке и любом столбце сумма чисел на белых клетках была равна сумме чисел на черных клетках?

2. На окружности отмечено 10 красных, 10 синих и 10 зеленых точек. Некоторые пары точек соединены отрезками. Если выбрать 3 точки разного цвета, то среди них найдется точка, соединенная отрезками с двумя другими. Докажите, что всего проведено не менее 100 отрезков.

3. Набор из нескольких простых чисел таков, что какие бы три числа из него ни взять, разность двух из них окажется простым числом. Какое наибольшее количество чисел может быть в наборе?

4. Какое наибольшее число различных шахматных фигур можно поставить на доску, чтобы все били различное число других фигур. Фигурами являются короли, ферзи, ладьи, слоны и кони.

5. Вася написал в ряд числа от 2 до 2012 включительно. Петя по каждым из написанных Васей чисел написал самое большое простое число, не превосходящее этого числа, после чего Вася просуммировал Петины числа, написанные на четных местах, и написанные на нечетных местах. Какая из полученных им сумм больше и на сколько?

6. Бизнесмен Борис Михайлович хочет купить Дворец Юных и превратить его в Торговый центр. Официальная цена Дворца — 10 000 000 000 рублей. Но бизнесмен обнаружил, что если дать взятку в размере 1 000 000 руб, то цена Дворца уменьшается вдвое (например, после двух взяток цена дворца уменьшится в 4 раза). Какое количество взяток должен дать бизнесмен, чтобы купить Дворец с наименьшими затратами?

7. У Пети есть весы, которые при взвешивании любого предмета показывают вес либо на A граммов, либо на B граммов больше истинного. Ему известно об этой особенности весов, но неизвестны числа A и B. Пете подарили 10 одинаковых монет. Как ему узнать, сколько весит монета?

8. В мешке 80 котов — черных и белых. Учетверенное количество чёрных котов больше, чем упятеренное количество белых; учетверенное количество белых котов больше, чем утроенное количество чёрных. Сколько котов каждого цвета сидят в мешке?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 21.02.2012

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Клетки доски 5×5 раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Можно ли во всех клетках этой доски расставить единицы, двойки или тройки таким образом, чтобы в любой строке и любом столбце сумма чисел на белых клетках была равна сумме чисел на черных клетках?

2. На окружности отмечено 10 красных, 10 синих и 10 зеленых точек. Некоторые пары точек соединены отрезками. Если выбрать 3 точки разного цвета, то среди них найдется точка, соединенная отрезками с двумя другими. Докажите, что всего проведено не менее 100 отрезков.

3. Имеется набор из шести простых чисел. Докажите, что из него можно выбрать три числа, разность любых двух из которых окажется составным числом.

4. Какое наибольшее число различных шахматных фигур можно поставить на доску, чтобы все били различное число других фигур? Фигурами являются короли, ферзи, ладьи, слоны и кони.

5. Сколько решений имеет ребус УРАЛ+XXXIX = КИРОВ? Как всегда, одинаковыми буквами здесь обозначены одинаковые цифры, а разными — разные.

6. Бизнесмен Борис Михайлович хочет купить Дворец Юных и превратить его в Торговый центр. Официальная цена Дворца — 10 000 000 000 рублей. Но бизнесмен обнаружил, что если дать взятку в размере 1 000 000 руб, то цена Дворца уменьшается вдвое (например, после двух взяток цена дворца уменьшится в 4 раза). Какое количество взяток должен дать бизнесмен, чтобы купить Дворец с наименьшими затратами?

7. Известно, что продавец волейбольных мячей на каждой продаже (продаваться может и несколько мячей сразу) обсчитывает покупателя на одну и ту же сумму. Как, не зная цену мяча, за две покупки узнать эту сумму?

8. Тридцать три кошки весят больше тридцати двух котов. Кто весит больше: тридцать две кошки или тридцать один кот? (Все кошки весят одинаково и коты – тоже.)

XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 23.02.2012

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В классе $n+1$ ученик ($n > 2$). Ученики этого класса организовали $2n+1$ клуб так, что для любых n клубов имеется не менее n школьников, входящих хотя бы в один из них. Докажите, что есть три клуба, каждые два из которых имеют общего члена.

2. Найдите все натуральные n и простые p такие, что $n^3 = p^2 - p - 1$.

3. На множестве S определена операция $*$, удовлетворяющая условиям:

(i) $x*(y*z) = (x*y)*z$ при всех $x, y, z \in S$;

(ii) если $x \neq y$, то $x*y \neq y*x$.

Докажите, что $x*(y*z) = x*z$ при всех $x, y, z \in S$.

4. Ева хочет дать Адаму k сладких яблок. Но, кроме них, у неё есть не более 2012 кислых яблок, которые она даёт Адаму до сладких. Каждое яблоко, которое получает Адам, он может съесть или выкинуть. То, что сначала идут кислые яблоки, а потом сладкие, а также то, что кислых яблок не более 2012, а сладких ровно k, Адаму известно. Найдите наименьшее k, при котором Адам гарантированно может съесть больше сладких яблок, чем кислых.

5. На доске написаны несколько (не обязательно различных) натуральных чисел, не превосходящих 7. Разрешается выбрать на доске набор из различных чисел (не менее одного), стереть их и дописать на доску все числа, не превосходящие 7, которых не было в этом наборе. Докажите, что если с помощью таких операций на доске можно оставить одно число, то это число не зависит от выбора операций.

6. В лотерее 36 шаров, пронумерованных от 1 до 36. Играющий заполняет карточку, где указывает 6 номеров. В розыгрыше лотереи 6 шаров объявляются неудачными. Та карточка, на которой не указано ни одного неудачного номера, считается выигравшей. Какое наименьшее число карточек можно заполнить так, чтобы среди них с гарантией нашлась выигравшая?

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AD = DC$, $AC = AB$ и $\angle ADC = \angle CAB$. Точки M и N — середины сторон AD и AB. Докажите, что треугольник MNC равнобедренный.

8. Через вершину A неравнобедренного остроугольного треугольника ABC проведена прямая $l_A \parallel BC$, а через вершину B — прямая $l_B \parallel AC$. Биссектриса угла ABC пересекает сторону AC в точке D, а прямую l_A — в точке E.

Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке F, а прямую l_B — в точке G. Оказалось, что $DE = FG$. Найдите угол C.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 23.02.2012

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В классе $n+1$ ученик ($n > 2$). Ученики этого класса организовали $2n+1$ клуб так, что для любых n клубов имеется не менее n школьников, входящих хотя бы в один из них. Докажите, что есть три клуба, каждые два из которых имеют общего члена.

2. Решите уравнение $x(3x+1)+2y(y-2x) = 2$ в целых числах.

3. На множестве S определена операция $*$, удовлетворяющая условиям:

(i) $x*(y*z) = (x*y)*z$ при всех $x, y, z \in S$;

(ii) если $x \neq y$, то $x*y \neq y*x$.

Докажите, что $x*(y*z) = x*z$ при всех $x, y, z \in S$.

4. Ева хочет дать Адаму k сладких яблок. Но, кроме них, у неё есть не более 2012 кислых яблок, которые она даёт Адаму до сладких. Каждое яблоко, которое получает Адам, он может съесть или выкинуть. То, что сначала идут кислые яблоки, а потом сладкие, а также то, что кислых яблок не более 2012, а сладких ровно k, Адаму известно. Найдите наименьшее k, при котором Адам гарантированно может съесть больше сладких яблок, чем кислых.

5. На доске написаны несколько (не обязательно различных) натуральных чисел, не превосходящих 7. Разрешается выбрать на доске набор из различных чисел (не менее одного), стереть их и дописать на доску все числа, не превосходящие 7, которых не было в этом наборе. Докажите, что если с помощью таких операций на доске можно оставить одно число, то это число не зависит от выбора операций.

6. В лотерее 36 шаров, пронумерованных от 1 до 36. Играющий заполняет карточку, где указывает 6 номеров. В розыгрыше лотереи 6 шаров объявляются неудачными. Та карточка, на которой не указано ни одного неудачного номера, считается выигравшей. Какое наименьшее число карточек можно заполнить так, чтобы среди них с гарантией нашлась выигравшая?

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AD = DC$, $AC = AB$ и $\angle ADC = \angle CAB$. Точки M и N — середины сторон AD и AB соответственно. Докажите, что треугольник MNC равнобедренный.

8. В треугольнике ABC угол B равен 80°. На стороне BC отмечена точка D такая, что $AB = AD = CD$; на стороне AB отмечена точка F такая, что

$AF = BD$; на продолжении стороны BC за точку C отмечена точка E такая, что $\angle BEF = 20°$. Докажите, что $DE = AC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 23.02.2012

СТАРШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. В классе 2012 учеников. Ученики этого класса организовали 4023 клуба так, что для любых 2011 клубов имеется не менее 2011 школьников, входящих хотя бы в один из них. Докажите, что есть три клуба, каждые два из которых имеют общего члена.

2. Решите уравнение $x(3x+1)+2y(y-2x) = 2$ в целых числах.

3. Произведение положительных чисел a, b и c равно 60, а сумма равна 15. Докажите неравенство $(a+b)(a+c) \geq 60$.

4. Докажите, что для каждого целого числа $2k$ существует такое n, что при некоторой расстановке знаков $\pm$ будет верно равенство $\pm 1\cdot 2 \pm 2\cdot 3 \pm 3\cdot 4 \pm \ldots \pm n(n+1) = 2k$.

5. На доске написаны несколько (не обязательно различных) натуральных чисел, не превосходящих 7. Разрешается выбрать на доске набор из различных чисел (не менее одного), стереть их и дописать на доску все числа, не превосходящие 7, которых не было в этом наборе. Докажите, что если с помощью таких операций на доске можно оставить одно число, то это число не зависит от выбора операций.

6. В лотерее 39 шаров, пронумерованных от 1 до 39. Играющий заполняет карточку, где указывает 6 номеров. В розыгрыше лотереи 6 шаров объявляются неудачными. Та карточка, на которой не указано ни одного неудачного номера, считается выигравшей. Какое наименьшее число карточек можно заполнить так, чтобы среди них с гарантией нашлась выигравшая?

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $AD = DC$, $AC = AB$ и $\angle ADC = \angle CAB$. Точки M и N — середины сторон AD и AB соответственно. Докажите, что треугольник MNC равнобедренный.

8. В треугольнике ABC угол B равен 80°. На стороне BC отмечена точка D такая, что $AB = AD = CD$; на стороне AB отмечена точка F такая, что $AF = BD$. На отрезке AC отмечена точка E такая, что $AB = AE$. Найдите угол AEF.

XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 23.02.2012

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно выбрать таким образом, чтобы сумма любых двух из них была простым числом, либо степенью двойки?

2. Произведение положительных чисел a, b и c равно 60, а сумма равна 15. Докажите неравенство $(a+b)(a+c) \geq 60$.

3. Решите уравнение $x(3x+1)+2y(y-2x) = 2$ в целых числах.

4. Обозначим через $S(k)$ сумму цифр числа k. Существуют ли такие натуральные числа n и m, что $S(n)S(n+1)\ldots S(n+m) = 700^{2012}$?

5. На доске написаны несколько (не обязательно различных) натуральных чисел, не превосходящих 7. Разрешается выбрать на доске набор из различных чисел (не менее одного), стереть их и дописать на доску все числа, не превосходящие 7, которых не было в этом наборе. Докажите, что если с помощью таких операций на доске можно оставить одно число, то это число не зависит от выбора операций.

6. В школе 500 учеников и 502 клуба. В каждом клубе состоит хотя бы один ученик, в любых двух разных клубах — разные наборы учеников. Известно, что для любых 498 клубов есть не менее 498 учеников, состоящих хотя бы в одном из этих клубов. Докажите, что есть ученик, состоящий хотя бы в трех клубах.

7. В лотерее 36 шаров, пронумерованных от 1 до 36. Играющий заполняет карточку, где указывает 6 номеров. В розыгрыше лотереи 6 шаров объявляются неудачными. Та карточка, на которой не указано ни одного неудачного номера, считается выигравшей. Какое наименьшее число карточек можно заполнить так, чтобы среди них с гарантией нашлась выигравшая?

8. В треугольнике ABC угол B равен 80°. На стороне BC отмечена точка D такая, что $AB = AD = CD$; на стороне AB отмечена точка F такая, что $AF = BD$; на продолжении стороны BC за точку C отмечена точка E такая, что $\angle BEF = 20°$. Докажите, что $DE = AC$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 23.02.2012

МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно выбрать таким образом, чтобы сумма любых двух из них была простым числом, либо степенью двойки?

2. Произведение положительных чисел a, b и c равно 60, а сумма равна 15. Докажите неравенство $(a+b)(a+c) \geq 60$.

3. Решите уравнение $x(3x+1)+2y(y-2x) = 2$ в целых числах.

4. Обозначим через $S(k)$ сумму цифр числа k. Существуют ли такие натуральные числа n и m, что $S(n)S(n+1)\ldots\mathrm{S}(n+m) = 700^{2012}$?

5. На доске написаны несколько (не обязательно различных) натуральных чисел, не превосходящих 7. Разрешается выбрать на доске набор из различных чисел (не менее одного), стереть их и дописать на доску все числа, не превосходящие 7, которых не было в этом наборе. Докажите, что если с помощью таких операций на доске можно оставить одно число, то это число не зависит от выбора операций.

6. В школе 500 учеников и 502 клуба. В каждом клубе состоит хотя бы один ученик, в любых двух разных клубах — разные наборы учеников. Известно, что для любых 499 клубов есть не менее 499 учеников, состоящих хотя бы в одном из этих клубов. Докажите, что есть ученик, состоящий хотя бы в трех клубах.

7. В лотерее 39 шаров, пронумерованных от 1 до 39. Играющий заполняет карточку, где указывает 6 номеров. В розыгрыше лотереи 6 шаров объявляются неудачными. Та карточка, на которой не указано ни одного неудачного номера, считается выигравшей. Какое наименьшее число карточек можно заполнить так, чтобы среди них с гарантией нашлась выигравшая?

8. В треугольнике ABC угол B равен 80°. На стороне BC отмечена точка D такая, что $AB = AD = CD$; на стороне AB отмечена точка F такая, что $AF = BD$. На отрезке AC отмечена точка E такая, что $AB = AE$. Найдите угол AEF.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 23.02.2012

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Назовем четырехзначное число *ультрачетным*, если его десятичная запись состоит только из четных цифр. На доску в порядке возрастания выписаны все ультрачетные числа. Какова наибольшая возможная разность между двумя соседними числами?

2. Произведение положительных чисел a, b и c равно 60, а сумма равна 15. Докажите неравенство $(a+b)(a+c) \geq 60$.

3. Даны натуральные числа $k \geq 2$ и n. Известно, что $2^{2k+1} \geq n^2$. Докажите неравенство $2^{2k+1} \geq n^2+7$.

4. Обозначим через $S(k)$ сумму цифр числа k. Существует ли такое натуральное число n, что $S(n)S(n+1) = 2011^{2012}$?

5. На доске написаны несколько (не обязательно различных) натуральных чисел, не превосходящих 3. Разрешается выбрать на доске набор из различных чисел (не менее одного), стереть их и дописать на доску все числа, не превосходящие 3, которых не было в этом наборе. Вася сделал несколько таких операций, после чего на доске осталось ровно одно число и оно равно 1. Докажите, что если Петя тоже сделает несколько таких операций, в результате которых на доске останется ровно одно число, то это число также будет равно 1.

6. В школе учатся 500 детей. Ученики школы организовали 752 клуба (в некоторых клубах может быть по одному ученику). Известно, что в любых двух клубах состоят разные наборы школьников. Докажите, что есть школьник, состоящий по крайней мере в трех клубах.

7. В лотерее 36 шаров, пронумерованных от 1 до 36. Играющий заполняет карточку, где указывает 6 номеров. В розыгрыше лотереи 6 шаров объявляются неудачными. Та карточка, на которой не указано ни одного неудачного номера, считается выигравшей. Докажите, что как бы ни заполнять 7 карточек, может так случиться, что ни одна из них не окажется выигравшей.

8. В треугольнике ABC угол B равен 80°. На стороне BC отмечена точка D такая, что $AB = AD = CD$; на стороне AB отмечена точка F такая, что $AF = BD$. На отрезке AC отмечена точка E такая, что $AB = AE$. Найдите угол AEF.

XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 23.02.2012

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Шестизначные числа вида $\overline{abcabc}$ и $\overline{ababab}$ оба делятся на 165 (здесь разные буквы *не обязательно* обозначают разные цифры). Найдите все такие пары чисел.

2. Какое наибольшее количество различных натуральных чисел можно выбрать таким образом, чтобы сумма любых двух из них была простым числом, либо степенью двойки?

3. В лотерее 39 шаров, пронумерованных от 1 до 39. Играющий заполняет карточку, где указывает 6 номеров. В розыгрыше лотереи 6 шаров объявляются неудачными. Та карточка, на которой не указано ни одного неудачного номера, считается выигравшей. Какое наименьшее число карточек можно заполнить так, чтобы среди них с гарантией нашлась выигравшая?

4. На экране компьютера горит число, большее 1 000 000. Каждую секунду из числа на экране вычитается его первая цифра. Будет ли когда-нибудь на экране гореть число 80 000?

5. Вася выписал несколько (больше одного) идущих подряд натуральных чисел. Затем он нашел у каждого из них сумму цифр и полученные суммы перемножил. Мог ли он получить число 700^{2012}?

6. Назовем *триминошкой* прямоугольник 1×3. Прямоугольник 2012×2013 разбит на триминошки. Верно ли, что этот прямоугольник всегда можно разбить на триминошки другим способом так, чтобы ни одна триминошка первого разбиения не совпадала ни с одной триминошкой второго?

7. В 6а классе 29 учеников, каждый дружит не менее, чем с 15 одноклассниками, причем любые двое не дружащих между собой имеют не более двух общих друзей. Докажите, что на самом деле, все ученики 6а дружат между собой.

8. Петя и Вася играют в игру: перед ними лежит куча, в которой 2012 синих и 2000 красных бусинок. Петя начинает и своим ходом может взять либо 2 красных, либо 1 синюю бусинку. Вася своим ходом может взять либо 2 синих, либо 1 красную бусинку. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре?

XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 23.02.2012

ГРУППА «СТАРТ», ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Шестизначные числа вида $\overline{abcabc}$ и $\overline{ababab}$ оба делятся на 165 (здесь разные буквы *не обязательно* обозначают разные цифры). Найдите все такие пары чисел.

2. Квадрат со стороной 1 разрезан на три прямоугольника с одинаковыми периметрами. Какими могут быть стороны этих прямоугольников? Укажите все возможности.

3. В лотерее 22 шара, пронумерованных от 1 до 22. Играющий заполняет карточку, где указывает 4 номера. В розыгрыше 5 шаров объявляются неудачными. Та карточка, на которой не указано ни одного неудачного номера, считается выигравшей. Можно ли заполнить 7 карточек так, чтобы хотя бы одна из них о независимо от итогов розыгрыша с гарантией оказалась выигрышной?

4. На экране компьютера горит число, большее 100 000. Каждую секунду из числа на экране вычитается его первая цифра. Будет ли когда-нибудь на экране гореть число 800?

5. Мальчик взял шесть подряд идущих натуральных чисел, посчитал у каждого из них сумму цифр и перемножил эти шесть сумм цифр. Могло ли у него получится 300 000?

6. У продавца было 35 арбузов, но он уронил арбуз, масса которого была на 5 кг меньше средней. Ему пришлось выбросить разбитый и заменить его другим. Оказалось, что масса нового арбуза на 12 кг больше новой средней массы. На сколько килограмм разбитый арбуз был легче, чем новый?

7. В 6а классе 29 учеников, каждый дружит не менее, чем с 15 одноклассниками, причем любые двое не дружащих между собой имеют не более двух общих друзей. Докажите, что на самом деле, все ученики 6а дружат между собой.

8. Петя и Вася играют в игру: перед ними лежит куча, в которой 2012 красных бусинок и 2010 синих. Петя начинает и своим ходом может взять либо 2 красных, либо 1 синюю бусину. Вася своим ходом может взять либо 2 синих, либо 1 красную бусину. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 23.02.2012

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

1. Шестизначные числа вида $\overline{abcabc}$ и $\overline{ababab}$ оба делятся на 165 (здесь разные буквы *не обязательно* обозначают разные цифры). Найдите все такие пары чисел.

2. В семье шестеро детей, троих из которых зовут Женя, Саша и Валя. Рассказывая про свою семью, они сказали следующее. Женя: «У меня есть ровно три родных сестры». Саша: «У меня есть ровно один родной брат». Валя: «У меня есть и старший, и младший братья». Определите про каждого ребенка (Женю, Сашу и Валю), девочка это или мальчик?

3. Назовем четырехзначное число *ультрачетным*, если его десятичная запись состоит только из четных цифр. На доску в порядке возрастания выписаны все ультрачетные числа. Какова наибольшая возможная разность между двумя соседними числами?

4. На экране компьютера горит число, большее 100 000. Каждую секунду из числа на экране вычитается его первая цифра. Докажите, что на экране обязательно появится либо 2012, либо 2011.

5. Мальчик взял три подряд идущих натуральных числа, посчитал у каждого из них сумму цифр и перемножил эти три суммы цифр. Могло ли у него получится 2012?

6. Квадрат со стороной 1 разрезан на три прямоугольника с одинаковыми периметрами. Какими могут быть стороны этих прямоугольников? Укажите все возможности.

7. У продавца было 35 арбузов, но он уронил арбуз, масса которого была на 5 кг меньше средней. Ему пришлось выбросить разбитый и заменить его другим. Оказалось, что масса нового арбуза на 12 кг больше новой средней массы. На сколько килограмм разбитый арбуз был легче, чем новый?

8. Петя и Вася играют в игру: перед ними лежит куча, в которой 900 красных и 900 синих бусинок. Петя начинает и своим ходом может взять либо 2 красных, либо 1 синюю бусинку. Вася своим ходом может взять либо 2 синих, либо 1 красную бусинку. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто выиграет при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 24.02.2012

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА. ПЕРВАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 1 МЕСТО

1. Внутри параллелограмма $ABCD$ с углом ABC, равным 105°, расположена точка M такая, что треугольник BMC — равносторонний и $\angle CMD = 135°$. Точка K — середина стороны AB. Докажите, что $\angle BKC = 45°$.

2. Последовательности целых чисел (a_n) и (b_n) удовлетворяют условиям $|a_{n+2} - a_n| \le 2$ и $a_m + a_n = b_{m^2+n^2}$ при всех целых m и n. Докажите, что в последовательности (a_n) встречается не более 6 различных чисел.

3. Пусть n — натуральное число. Докажите, что любой общий нечётный делитель чисел $C_{2n}^n, C_{2n-1}^n, \ldots, C_{n+1}^n$ делит 2^n-1.

4. В левой верхней клетке прямоугольной клетчатой поляны $m\times n$ сидят k ёжиков ($k < m \le n$). За один ход один из ёжиков переходит на одну клетку вправо или вниз. Через несколько ходов все ёжики собрались в правой нижней клетке. Каким может быть наименьшее количество клеток, не посещенных ни одним ёжиком?

5. На плоскости дано семейство L, состоящее из 2012 прямых, среди которых нет параллельных и пересекающихся более чем по две в одной точке. Скажем, что прямая $l_1\in L$ *ограничивает* другую прямую $l_2\in L$, если все точки пересечения прямой l_2 с остальными прямыми из семейства L лежат по одну сторону от прямой l_1. Докажите, что в семействе L найдутся две прямые l и l' такие, что прямая l ограничивает прямую l', а прямая l' не ограничивает прямую l.

6. Пусть a и b — положительные числа такие, что $|a-2b| \le 1/\sqrt{a}$ и $|2a-b| \le 1/\sqrt{b}$. Докажите, что $a+b \le 2$.

7. Точка P расположена внутри треугольника ABC таким образом, что $\angle BPC = 90°$ и $\angle BAP = \angle BCP$. Точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно. Докажите, что если $BP = 2PM$, то точки A, P и N лежат на одной прямой.

8. Два игрока по очереди выписывают числа на доску. Первый пишет +1 или –1, второй дописывает +2 или –2, первый — +3 или –3 и т.д. Игрок, после хода которого сумма выписанных чисел становится по модулю не менее 2012, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 24.02.2012

СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО. ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3-6 МЕСТА

1. Внутри параллелограмма $ABCD$ с углом ABC, равным 105°, расположена точка M такая, что треугольник BMC — равносторонний и $\angle CMD = 135°$. Точка K — середина стороны AB. Докажите, что $\angle BKC = 45°$.

2. Последовательности целых чисел (a_n) и (b_n) удовлетворяют условиям $|a_{n+2} - a_n| \le 2$ и $a_m + a_n = b_{m^2+n^2}$ при всех целых m и n. Докажите, что в последовательности (a_n) встречается не более 6 различных чисел.

3. Найдите все простые числа p и q такие, что $pq–555p$ и $pq+555q$ — точные квадраты.

4. В левой верхней клетке прямоугольной клетчатой поляны $m\times n$ сидят k ёжиков ($k < m \le n$). За один ход один из ёжиков переходит на одну клетку вправо или вниз. Через несколько ходов все ёжики собрались в правой нижней клетке. Каким может быть наименьшее количество клеток, не посещенных ни одним ёжиком?

5. На стене в ряд расположены n переключателей. Каждый может находиться в четырех положениях: влево, вправо, вверх или вниз. Если какие-то три переключателя подряд находятся в трех разных положениях, сумасшедший электрик переключает их в четвертое положение. Докажите, что он не может делать это бесконечно долго.

6. Пусть a и b — положительные числа такие, что $|a–2b| \le 1/\sqrt{a}$ и $|2a–b| \le 1/\sqrt{b}$. Докажите, что $a+b \le 2$. (Т.Андрееску, Mathematical Reflections, 2011, N 1)

7. Точка P расположена внутри треугольника ABC таким образом, что $\angle BPC = 90°$ и $\angle BAP = \angle BCP$. Точки M и N — середины сторон AC и BC соответственно. Докажите, что если $BP = 2PM$, то точки A, P и N лежат на одной прямой.

8. Два игрока по очереди выписывают числа на доску. Первый пишет +1 или –1, второй дописывает +2 или –2, первый — +3 или –3 и т.д. Игрок, после хода которого сумма выписанных чисел становится по модулю не менее 2012, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 24.02.2012

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО. ВТОРАЯ ЛИГА

1. Внутри параллелограмма $ABCD$ с углом ABC, равным 105°, расположена точка M такая, что треугольник BMC — равносторонний и $\angle CMD = 135°$. Точка K — середина стороны AB. Докажите, что $\angle BKC = 45°$.

2. Обозначим через n количество упорядоченных пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих условию $x^2+xy+y^2 \leq 2012$. Найдите остаток от деления n на 4.

3. Найдите все простые числа p и q такие, что $pq–555p$ и $pq+555q$ — точные квадраты.

4. В левой верхней клетке прямоугольной клетчатой поляны $m\times n$ сидят k ёжиков ($k < m \leq n$). За один ход один из ёжиков переходит на одну клетку вправо или вниз. Через несколько ходов все ёжики собрались в правой нижней клетке. Каким может быть наименьшее количество клеток, не посещенных ни одним ёжиком?

5. На стене в ряд расположены n переключателей. Каждый может находиться в четырех положениях: влево, вправо, вверх или вниз. Если какие-то три переключателя подряд находятся в трех разных положениях, сумасшедший электрик переключает их в четвертое положение. Докажите, что он не может делать это бесконечно долго.

6. Даны положительные числа x, y и z. Докажите, что числа $x+y+z–xyz$ и $xy+yz+zx–3$ не могут быть одновременно отрицательными.

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ каждый из углов ADB, ACB, CAB и DBA равен 15°. Докажите, что из отрезков DB, CA и DC можно составить прямоугольный треугольник.

8. Два игрока по очереди выписывают числа на доску. Первый пишет +1 или –1, второй дописывает +2 или –2, первый — +3 или –3 и т.д. Игрок, после хода которого сумма выписанных чисел становится по модулю не менее 2012, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 24.02.2012

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА. ПЕРВАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 1 МЕСТО

1. Даны попарно различные натуральные числа a, b, c и d. Известно, что $(ab+cd)^2$ делится на нечетное число $ac+bd$. Докажите, что $ab+cd$ имеет хотя бы два различных простых делителя.

2. Из четырех одинаковых квадратов, прикладывая их сторонами друг к другу, можно составить пять различных фигур (прямоугольник 1×4, букву Г, букву Т, букву Z и квадрат 2×2). Имеется по пять экземпляров каждой из этих фигур. Какой наибольший квадрат можно сложить из них? Фигуры можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга. Можно использовать не все 25 фигур.

3. Даны положительные числа x, y и z. Докажите, что числа $x+y+z-xyz$ и $xy+yz+zx-3$ не могут одновременно быть отрицательными.

4. В левой верхней клетке прямоугольной поляны 1000×2000 сидят 100 ёжиков. За один ход один из ёжиков переходит на одну клетку вправо или вниз. Через несколько ходов все ёжики собрались в правой нижней клетке. Каким может быть наименьшее количество клеток, не посещенных ни одним ёжиком?

5. Даны различные простые числа p и q. Натуральные числа m и n таковы, что число $(mp-1)/q+(nq-1)/p$ — целое. Докажите неравенство $m/q+n/p > 1$.

6. На стене в ряд расположены n переключателей. Каждый может находиться в четырех положениях: влево, вправо, вверх или вниз. Если какие-то три переключателя подряд находятся в трех разных положениях, сумасшедший электрик переключает их в четвертое положение. Докажите, что он не может делать это бесконечно долго.

7. Изначально на доске написано число 2. Два игрока ходят по очереди. Первый прибавляет или вычитает из числа на доске 1, затем второй прибавляет или вычитает 2, затем первый прибавляет или вычитает 3 и так далее. Игрок, после хода которого на доске появляется число, по модулю не меньшее 2012, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Серединный перпендикуляр к диагонали AC пересекает сторону AD в точке Y, а серединный перпендикуляр к диагонали BD пересекает сторону AD в точке X, лежащей между точками A и Y. Оказалось, что прямые BX и CY параллельны. Докажите, что AC и BD перпендикулярны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 24.02.2012

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО. ПЕРВАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 3-8 МЕСТА

1. Даны попарно различные натуральные числа a, b, c и d. Известно, что $ab+cd$ делится на нечетное число $ac+bd$. Докажите, что $ab+cd$ имеет хотя бы два различных простых делителя.

2. Из четырех одинаковых квадратов, прикладывая их сторонами друг к другу, можно составить пять различных фигур (прямоугольник 1×4, букву Г, букву Т, букву Z и квадрат 2×2). Имеется по пять экземпляров каждой из этих фигур. Какой наибольший квадрат можно сложить из них? Фигуры можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга. Можно использовать не все 25 фигур.

3. Даны положительные числа x, y и z. Докажите, что числа $x+y+z-xyz$ и $xy+yz+zx-3$ не могут одновременно быть отрицательными.

4. Сколькими различными способами из чисел 1, 2, ..., 26 можно выбрать несколько (больше одного), сумма которых не больше, чем 175?

5. Даны различные простые числа p и q. Натуральные числа m и n таковы, что число $(mp-1)/q+(nq-1)/p$ — целое. Докажите неравенство $m/q+n/p > 1$.

6. На стене по кругу расположены 100 переключателей. Каждый может находиться в трех положениях: влево, вправо, вверх. Если какие-то три переключателя подряд находятся в трех разных положениях, сумасшедший электрик переключает все их в то положение, которое имеет один их крайних переключателей среди этих трех. Докажите, что он не сможет проделать эту операцию более 100 раз.

7. Два игрока по очереди выписывают числа на доску. Первый пишет +1 или –1, второй дописывает +2 или –2, первый — +3 или –3 и т.д. Игрок, после хода которого сумма выписанных чисел становится по модулю не менее 2012, проигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Серединный перпендикуляр к диагонали AC пересекает сторону AD в точке Y, а срединный перпендикуляр к диагонали BD пересекает сторону AD в точке X, лежащей между точками A и Y. Оказалось, что прямые BX и CY параллельны. Докажите, что AC и BD перпендикулярны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 24.02.2012

МЛАДШАЯ ГРУППА, ВТОРАЯ ЛИГА

1. Назовем *интересными* 70-значные числа, в десятичной записи которых встречаются только цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7, причем каждая цифра встречается ровно 10 раз. Может ли одно интересное число делиться на другое?

2. На полке лежат 623 карточки, пронумерованные числами от 1 до 623. Вася и Петя играют в следующую игру. Вася выбирает любую карточку и кладет ее на стол, Петя выбирает любую из оставшихся карточек и кладет ее справа от Васиной, потом Вася кладёт справа ещё одну карточку и т.д. Число на каждой карточке, начиная со второй, должно давать в сумме с числом на предыдущей карточке полный квадрат. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход (возможно, из-за того, что карточки кончились). Кто выиграет при правильной игре?

3. Даны положительные числа x, y и z. Докажите, что числа $x+y+z-xyz$ и $xy+yz+zx-3$ не могут быть одновременно отрицательными.

4. В левой верхней клетке квадратной поляны 20×20 сидят 3 ёжика. За один ход один из ёжиков переходит на одну клетку вправо или вниз. Через несколько ходов все ёжики собрались в правой нижней клетке. Каким может быть наибольшее количество клеток, на которых побывал хотя бы один ёжик?

5. Произведение цифр 100-значного числа равно 3^{100}. Какое наибольшее значение может принимать сумма цифр этого числа?

6. На стене в ряд расположены 100 переключателей. Каждый может находиться в четырех положениях: влево, вправо, вверх, вниз. Если какие-то три переключателя подряд находятся в трех разных положениях, сумасшедший электрик переключает средний в то положение, которое имеет один их крайних переключателей среди этих трех. Докажите, что он не может проделать эту операцию более 100 раз.

7. Обозначим через n количество упорядоченных пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих условию $x^2+xy+y^2 \leq 2012$. Найдите остаток от деления n на 4.

8. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Серединный перпендикуляр к диагонали AC пересекает сторону AD в точке Y, а серединный перпендикуляр к диагонали BD пересекает сторону AD в точке X, лежащей между точками A и Y. Оказалось, что прямые BX и CY параллельны. Докажите, что AC и BD перпендикулярны.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 24.02.2012

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОИ ЗА 1-6 МЕСТА

1. В левой верхней клетке прямоугольной поляны 100×100 сидят 20 ёжиков. За один ход один из ёжиков переходит на одну клетку вправо или вниз. Через несколько ходов все ёжики собрались в правой нижней клетке. Каким может быть наименьшее количество клеток, не посещенных ни одним ёжиком?

2. Произведение каких-то трех делителей числа n делится на n^2. Докажите, что произведение любых двух из них делится на n.

3. Произведение цифр 100-значного числа равно 3^{100}. Какое наибольшее значение может принимать сумма цифр этого числа?

4. В каждой клетке квадрата 10×10 стоит рыцарь или лжец. Соседями считаются люди, стоящие в клетках, имеющих общую сторону. Каждый из стоящих сказал: «Среди моих соседей чётное число лжецов». Известно, что в угловых клетках стоят рыцари. Докажите, что в центральном квадрате 8×8 стоит чётное число лжецов.

5. Знайка вырезал из квадрата прямоугольник с тем же центром и сторонами, параллельными сторонам исходного квадрата, но не лежащими на них. Незнайка заявил, что может разрезать получившуюся фигуру на 6 треугольников. Мог ли он оказаться прав?

6. На полке лежат 623 карточки, пронумерованные числами от 1 до 623. Вася и Петя играют в следующую игру. Вася выбирает любую карточку и кладет ее на стол, Петя выбирает любую из оставшихся карточек и кладет ее справа от Васиной, потом Вася кладёт справа ещё одну карточку и т.д. Число на каждой карточке, начиная со второй, должно давать в сумме с числом на предыдущей карточке полный квадрат. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход (возможно, из-за того, что карточки кончились). Кто выиграет при правильной игре?

7. На стене по кругу расположены 100 переключателей. Каждый может находиться в трех положениях: влево, вправо, вверх. Если какие-то три переключателя подряд находятся в трех разных положениях, сумасшедший электрик переключает все их в то положение, которое имеет один из крайних переключателей среди этих трех. Докажите, что он не может проделать эту операцию более 100 раз.

8. Даны положительные числа x, y и z. Докажите, что числа $x+y+z-xyz$ и $xy+yz+zx-3$ не могут быть одновременно отрицательными.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 24.02.2012

ГРУППА «СТАРТ», ВЫСШАЯ ЛИГА, БОЙ ЗА 7 МЕСТО. ПЕРВАЯ ЛИГА

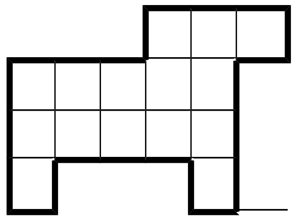
1. В левой верхней клетке квадратной поляны 20×20 сидят 3 ёжика. За один ход один из ёжиков переходит на одну клетку вправо или вниз. Через несколько ходов все ёжики собрались в правой нижней клетке. Каким может быть наибольшее количество клеток, на которых побывал хотя бы один ёжик?

2. 10 натуральных чисел записаны в ряд. Докажите, что между ними можно расставить знаки сложения и умножения (по одному знаку между каждыми двумя соседними числами) и скобки так, что результат будет делиться на 32.

3. Найдутся ли четыре различные дроби, дающие в сумме 3, у каждой из которых числитель на единицу меньше знаменателя.

4. Назовём число *симпатичным*, если у него все цифры, кроме последней, одинаковые, а последняя отличается от них. Например, 33335 – симпатичное число. При каких n, больших 3, n-значное симпатичное число может нацело делиться на (n–1)-значное симпатичное число?

5. Разрежьте на два центрально-симметричных кусочка (**не обязательно** равных) фигуру, показанную на рисунке справа.



6. Произведение цифр 100-значного числа равно 3^{100}. Какое наибольшее значение может принимать сумма цифр этого числа?

7. Дата 24 февраля 2012 года записывается как 24022012 (без точек внутри). Все даты января 2012 года набрали указанным выше образом из металлических цифр. Хулиган Вася рассыпал набор. Можно ли, использовав все эти цифры, составить несколько одинаковых многозначных чисел?

8. На полке лежат 119 карточек, пронумерованных числами от 1 до 119. Вася и Петя играют в следующую игру. Вася выбирает любую карточку и кладет ее на стол, Петя выбирает любую из оставшихся карточек и кладет ее справа от Васиной, потом Вася кладёт справа ещё одну карточку и т.д. Число на каждой карточке, начиная со второй, должно давать в сумме с числом на предыдущей карточке полный квадрат. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход (возможно, из-за того, что карточки кончились). Кто выиграет при правильной игре?

XXXIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 18-24.02.2012

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 24.02.2012

ГРУППА «СТАРТ», ВТОРАЯ ЛИГА

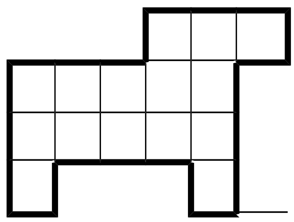
1. В левой верхней клетке квадратной поляны 20×20 сидят 3 ёжика. За один ход один из ёжиков переходит на одну клетку вправо или вниз. Через несколько ходов все ёжики собрались в правой нижней клетке. Каким может быть наибольшее количество клеток, на которых побывал хотя бы один ёжик?

2. 10 натуральных чисел записаны в ряд. Докажите, что между ними можно расставить знаки сложения и умножения (по одному знаку между каждыми двумя соседними числами) и скобки так, что результат будет делиться на 32.

3. Дата 24 февраля 2012 года записывается как 24022012 (без точек внутри). Все даты января 2012 года набрали указанным выше образом из металлических цифр. Хулиган Вася рассыпал набор. Можно ли, использовав все эти цифры, составить несколько одинаковых многозначных чисел?

4. Назовём число *симпатичным*, если у него все цифры, кроме последней, одинаковые, а последняя отличается от них. Например, 33335 — симпатичное число. Может ли четырехзначное симпатичное число нацело делится на трехзначное симпатичное число?

5. Разрежьте на два центрально-симметричных кусочка (**не обязательно** равных) фигуру, показанную на рисунке справа.



6. Произведение цифр 10-значного числа равно 3^{10}. Какое наибольшее значение может принимать сумма цифр этого числа?

7. Разговаривают 200 попугаев. Первый: «Второй попугай — оранжевый». Второй: «Третий попугай — оранжевый». …. 198-й попугай: «199-й попугай — оранжевый». 199-й попугай: «200-й попугай — зеленый». 200-й попугай: «Я вовсе не зеленый!» Известно, что все оранжевые попугаи, и только они, лгут. Сколько оранжевых попугаев участвовало в разговоре?

8. В семье трое братьев. Известно, что Коля родился на следующий год после того года, когда до рождения младшего из братьев оставалось 5 лет, а Ваня родился на два года раньше, чем среднему исполнилось 3 года. Сейчас Пете 10 лет. Сколько лет Ване и Коле?