



**XXVII УРАЛЬСКИЙ
(XIV КИРОВСКИЙ) ТУРНИР
ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ**
17–23 ФЕВРАЛЯ 2006 ГОДА

КИРОВ 2006

Правила “Математической карусели”

Математическая карусель – это командное соревнования по решению задач. Побеждает в нем команда, набравшая наибольшее число очков. Задачи решаются на двух рубежах – исходном и зачетном, но очки начисляются только за задачи, решенные на зачетном рубеже. В начале игры все члены команды располагаются на исходном рубеже, причем им присвоены номера от 1 до 6. По сигналу ведущего команды получают задачу и начинают ее решать. Если команда считает, что задача решена, ее представитель, имеющий номер 1, предъявляет решение судье. Если оно верное, игрок №1 переходит на зачетный рубеж и получает задачу там, а члены команды, оставшиеся на исходном рубеже, тоже получают новую задачу. В дальнейшем члены команды, находящиеся на исходном и зачетном рубежах, решают разные задачи независимо друг от друга.

Чтобы понять следующую часть правил, надо представить себе, что на каждом рубеже находящиеся на нем члены команды выстроены в очередь. Перед началом игры на исходном рубеже они идут в ней в порядке номеров. Если члены команды, находящиеся на каком-либо из двух рубежей, считают, что они решили очередную задачу, решение предъявляется судье игроком, стоящим в очереди первым. Если решение правильное, то с исходного рубежа этот игрок переходит на зачетный, а на зачетном возвращается на свое место в очереди. Если решение неправильное, то на исходном рубеже игрок возвращается на свое место в очереди, а с зачетного переходит на исходный. Игрок, перешедший с одного рубежа на другой, становится в конец очереди. И на исходном, и на зачетном рубежах команда может в любой момент отказаться от решения задачи. При этом задача считается нерешенной.

После того, как часть команды, находящаяся на каком-либо из двух рубежей, рассказала решение очередной задачи или отказалась решать ее дальше, она получает новую задачу. Если на рубеже в этот момент нет ни одного участника, задача начинает решаться тогда, когда этот участник там появляется.

За первую верно решенную на зачетном рубеже задачу команда получает 3 балла. Если команда на зачетном рубеже верно решает несколько задач подряд, то за каждую следующую задачу она получает на 1 балл больше, чем за предыдущую. Если же очередная задача решена неверно, то цена следующей задачи зависит от ее цены следующим образом. Если цена неверно решенной задачи была больше 6 баллов, то следующая задача стоит 5 баллов. Если цена неверно решенной задачи была 4, 5 или 6 баллов, то следующая задача стоит на балл меньше. Если же неверно решенная задача стоила 3 балла, то следующая задача тоже стоит 3 балла.

Игра для команды оканчивается, если

- а) кончилось время, или
- б) кончились задачи на зачетном рубеже, или
- в) кончились задачи на исходном рубеже, а на зачетном рубеже нет ни одного игрока.

Время игры, количество исходных и зачетных задач заранее оговаривается.

Игра оканчивается, если она закончилась для всех команд.

Математическая карусель на XXVII Уральском турнире юных математиков.

Младшая группа

1. (Исход, младшие)

В каком году состоится ближайший из Уральских турниров, сумма цифр номера которого будет равна сумме цифр номера года? Напомним, что каждый год проходят два Уральских турнира: в феврале и ноябре-декабре, а сейчас идет 27-й турнир.

2. (Исход, младшие)

В записи $-1-2-3-\dots-2006$ разрешается расставить любое число пар скобок. Какой наибольший результат можно получить таким образом (ответ дать в виде **одного** числа)?

3. (Исход, младшие)

Семь гномов построились по росту, чтобы Белоснежка раздала им 707 грибов. Сначала она дает сколько-то грибов самому маленькому. Каждый следующий получает на 1 гриб больше, чем предыдущий. Сколько грибов получит самый большой?

4. (Исход, младшие)

Найдите все решения ребуса

$$\text{КИРОВ+РОВ} = \text{ВЯТКА}.$$

Однаковые буквы означают одинаковые цифры, различные буквы — разные цифры.

5. (Исход, младшие)

На доске надо записать несколько двузначных чисел так, чтобы их произведение делилось на все простые числа от 2 до 17. Каким наименьшим числом различных цифр можно для этого обойтись?

6. (Исход, младшие)

На плоскости провели 9 прямых. Какое наибольшее число квадратов могло при этом образоваться?

7. (Исход, младшие)

Пятая часть пяти процентов от пяти процентов — сколько это в процентах?

8. (Исход, младшие)

За круглым столом сидят 2006 человек. Каждый из них — либо из клана рыцарей, всегда говорящих правду, либо из клана лжецов, которые всегда лгут. Каждый из сидящих заявил: «Оба моих соседа — из одного клана». Сколько рыцарей могло быть за столом (перечислите все возможности)?

9. (Исход, младшие)

В турнире по мини-футболу за победу в матче дают 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0. Четыре команды сыграли друг с другом по разу. «Спартак» набрал 5 очков, «Динамо» — 2, «Торпедо» — 1. Какое место заняла команда «Локомотив»?

10. (Исход, младшие)

За один ход разрешается к числу прибавить 1 или умножить его на 2. За какое наименьшее число ходов можно из 0 получить 2006?

11. (Исход, младшие)

Петя отправился пешком из лагеря в поселок. В 12:00, когда Петя был в a км от лагеря, его нагнал велосипедист, посадил и подвез, высадив в a км от поселка. После этого Петя пришел в поселок в 14:00. Сколько времени потребуется Петя на обратный путь пешком, если известно, что на велосипеде его везли с вдвое большей скоростью, чем он ходит пешком?

12. (Исход, младшие)

Найдите все такие пары (m,n) натуральных чисел, что $\text{НОК}(m,n) = m+n$. ($\text{НОК}(m,n)$ — наименьшее общее кратное чисел m и n .)

13. (Исход, младшие)

Одно положительное число поделили на другое. Найдите частное, если известно, что оно в 8 раз меньше делителя и в 4 раза больше делимого.

14. (Исход, младшие)

Назовем натуральное число любопытным, если произведение его цифр равно 8. Найдите все любопытные трехзначные числа.

1. (Зачёт, младшие)

Найдите наибольшее натуральное число такое, что ни оно само, ни любое из чисел, полученное из него вычёркиванием любого количества цифр (но не всех) не делится на 3.

2. (Зачёт, младшие)

У пяти человек в карманах лежит в совокупности 9000 рублей. Этих людей выстроили в ряд по убыванию капитала (если есть люди, имеющие поровну денег, их ставят друг за другом в произвольном порядке). Каков наибольший возможный капитал третьего человека в ряду?

3. (Зачёт, младшие)

Мимо наблюдателя по дороге проехали с равными между собой промежутками времени автобус, мотоцикл и автомобиль. Мимо другого наблюдателя они проехали с такими же промежутками, но в другом порядке: автобус, автомобиль, мотоцикл. Найдите скорость автобуса, если скорость автомобиля 60 км/ч, а мотоцикла — 30 км/ч.

4. (Зачёт, младшие)

Найдите все такие a , что для любого b существует ровно одно c , для которого $ab^3 = c^2$.

5. (Зачёт, младшие)

У часов три стрелки: часовая, минутная и секундная. Сколько в сутках моментов, когда какие-то две (или все три) из них сходятся вместе? (Полночь, с которой начинаются сутки, в них включается полночь, которой они заканчиваются — нет.)

6. (Зачёт, младшие)

В комнате дед, два отца, два сына и два внука (это дед, отцы, сыновья и внуки людей, находящихся в комнате). Сколько людей могло быть в комнате (перечислите все возможности)?

7. (Зачёт, младшие)

Найдите все такие трехзначные числа, после вычитания из которых суммы их цифр остается произведение их цифр.

8. (Зачёт, младшие)

Покупатель купил несколько фломастеров на сумму 5 долларов 6 центов, но передумал и 3 фломастера вернул обратно. Часть возвращенных денег он истратил на альбом за 72 цента. Сколько фломастеров и по какой цене он купил?

9. (Зачёт, младшие)

На сколько частей могут разбивать плоскость четыре различные окружности? Укажите все возможности.

10. (Зачёт, младшие)

На витрине ювелирного магазина лежат 9 золотых монет весом 100 г, 101 г, ..., 108 г. Рядом с каждой монетой лежала этикетка, указывающая вес монеты. Первого апреля шутник переложил этикетки. Продавец точно знает, какая монета сколько весит. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках, он сможет показать хозяину, который не знает, какая монета сколько весит, как правильно положить этикетки?

11. (Зачёт, младшие)

Сумма всех цифр двух 200-значных чисел a и b равна 2006. Какова наименьшая возможная сумма цифр числа $a+b$?

12. (Зачёт, младшие)

Андрей вышел из городка A в 10 часов 18 минут и, двигаясь с постоянной скоростью, пришел в город B в 13 часов 30 минут. В тот же день Борис вышел из B в ровно 9 часов и, идя по той же дороге с постоянной скоростью, пришел в A в 11 часов 40 минут. Дорога пересекает реку. Андрей и Борис одновременно подошли к мосту через эту реку, каждый со своей стороны. Андрей ушел с моста на одну минуту позже Бориса. Когда они подошли к мосту?

13. (Зачёт, младшие)

В однокруговом турнире по волейболу участвовало несколько команд. По окончании оказалось возможным разбить команды на группы: так в первой — одна команда, во второй — две, ..., в k -ой — k команд; при этом суммарное число очков, набранное командами каждой группы — одно и то же. Сколько команд участвовало в турнире?

14. (Зачёт, младшие)

За продажу ... пирогов по 49 руб. 36 коп. получено ... 7 руб. 28 коп. Восстановите пропущенные цифры, если известно, что у суммы их пропущено три.

15. (Зачёт, младшие)

Решите арифметический ребус СТО × СТО = СЕКРЕТ

16. (Зачёт, младшие)

С каждым четырехзначным числом проделали следующую операцию: записали его цифры в обратном порядке и сложили полученное число с исходным. Сколько различных сумм при этом получилось?

17. (Зачёт, младшие)

Найдите наименьшее натуральное n такое, что все цифры в записи числа $11111n$ различны.

18. (Зачёт, младшие)

На плоскости провели 2006 различных прямых, среди которых нет параллельных. Какое наибольшее количество углов, равных 60 градусам, могло при этом образоваться?

19. (Зачёт, младшие)

Найдите наибольшее натуральное n такое, что все цифры в записи числа $11111n$ различны.

20. (Зачёт, младшие)

На доске выписали названия всех натуральных чисел от 1 до 1000: один, два, ..., тысяча. Сколько раз в этой записи встречается буква «с»?

Ответы к ИСХОДНЫМ задачам (МЛАДШИЕ)

1. в 2013
2. 2013019
3. 104
4. $29713+713=30426$
5. тремя
6. 20
7. 0,05%
8. 2006
9. второе
10. за 18 ходов
11. 4 часа
12. таких пар нет
13. $1/32$
14. 118, 181, 811, 124, 142, 214, 241, 412, 421, 222

Ответы к ЗАЧЕТНЫМ задачам (МЛАДШИЕ)

1. 88
2. 3000 руб.
3. 45 км/ч
4. $a = 0$
5. 2872
6. 4, 5, 6 или 7 человек
7. таких чисел нет
8. 11 фломастеров по 46 центов
9. на 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14
10. за 2 взвешивания
11. 206
12. в 11.00
13. 6 команд
14. 98 пирогов за 4837 руб. 28 коп.
15. $897 \times 897 = 804609$
16. 342

17. 2116
18. 4010
19. 888894
20. 2411

Старшая группа

1. (Исход, старшие)

Семь гномов построились по росту, чтобы Белоснежка раздала им 707 грибов. Сначала она дает сколько-то грибов самому маленькому. Каждый следующий получает на 1 гриб больше, чем предыдущий. Сколько грибов получит самый большой?

2. (Исход, старшие)

В записи $-1-2-3-\dots-2006$ разрешается расставить любое число пар скобок. Какой наибольший результат можно получить таким образом (ответ дать в виде **одного** числа)?

3. (Исход, старшие)

На доске надо записать несколько двузначных чисел так, чтобы их произведение делилось на все простые числа от 2 до 13. Каким наименьшим числом различных цифр можно для этого обойтись?

4. (Исход, старшие)

Найдите все решения ребуса

$$\text{КИРОВ+РОВ} = \text{ВЯТКА}.$$

Однаковые буквы означают одинаковые цифры, различные буквы — разные цифры.

5. (Исход, старшие)

На плоскости провели 11 прямых. Какое наибольшее число квадратов могло при этом образоваться?

6. (Исход, старшие)

Мимо наблюдателя по дороге проехали с равными между собой промежутками времени автобус, мотоцикл и автомобиль. Мимо другого наблюдателя они проехали с такими же промежутками, но в другом порядке: автобус, автомобиль, мотоцикл. Найдите скорость автобуса, если скорость автомобиля 60 км/ч, а мотоцикла — 30 км/ч.

7. (Исход, старшие)

Пятая часть пятой части пяти процентов от пяти процентов — сколько это в процентах?

8. (Исход, старшие)

За круглым столом сидят 2007 человек. Каждый из них — либо из клана рыцарей, всегда говорящих правду, либо из клана лжецов, которые всегда лгут. Каждый из сидящих заявил: «Оба моих соседа — из одного клана». Сколько рыцарей могло быть за столом (перечислите все возможности)?

9. (Исход, старшие)

Найдите все такие a , что для любого b существует ровно одно c , для которого $ab^3 = c^2$.

10. (Исход, старшие)

У часов три стрелки: часовая, минутная и секундная. Сколько в сутках моментов, когда какие-то две (или все три) из них сходятся вместе? (Полночь, с которой начинаются сутки, в них включается, полночь, которой они заканчиваются — нет.)

11. (Исход, старшие)

У пяти человек в карманах лежит в совокупности 9000 рублей. Этих людей выстроили в ряд по убыванию капитала (если есть люди, имеющие поровну денег, их ставят друг за другом в произвольном порядке). Каков наибольший возможный капитал третьего по счету человека?

12. (Исход, старшие)

Найдите все решения уравнения $x^2 = [x]^2 + \{x\}^2$. Напомним, что $[x]$ — это наибольшее целое число, не превосходящее x , а $\{x\} = x - [x]$.

13. (Исход, старшие)

Одно положительное число поделили на другое. Найдите частное, если известно, что оно в 8 раз меньше делителя и в 4 раза больше делимого.

14. (Исход, старшие)

На сколько частей могут разбивать плоскость три различных окружности? Перечислите все возможности.

1. (Зачёт, старшие)

Найдите наибольшее натуральное число такое, что ни оно само, ни любое из чисел, полученное из него вычёркиванием любого количества цифр (но не всех) не делится на 3.

2. (Зачёт, старшие)

Найдите все такие трехзначные числа, после вычитания из которых суммы их цифр остается произведение их цифр.

3. (Зачёт, старшие)

На стороне AB квадрата $ABCD$ со стороной длины a вне его построен равносторонний треугольник ABE . Найти радиус окружности, проходящей через точки C, D и E .

4. (Зачёт, старшие)

Треугольник разливован прямыми, параллельными его сторонам, на 16 равных треугольников. Сколько различных трапеций, составленных из этих треугольников, можно насчитать на получившемся чертеже? (Равные, но по-разному расположенные трапеции, считаются различными).

5. (Зачёт, старшие)

Покупатель купил несколько фломастеров на сумму 19 долларов 78 центов, но передумал и 3 фломастера вернул обратно. Часть возвращенных денег он истратил на альбом за 1 доллар 40 центов. Сколько фломастеров и по какой цене он купил?

6. (Зачёт, старшие)

Решите арифметический ребус СТО \times СТО = СЕКРЕТ.

7. (Зачёт, старшие)

На доске надо записать несколько натуральных чисел так, чтобы их произведение делилось на все простые числа, меньшие 100. Каким наименьшим числом различных цифр можно для этого обойтись?

8. (Зачёт, старшие)

В комнате дед, два отца, два сына и два внука (это дед, отцы, сыновья и внуки людей, находящихся в комнате). Сколько людей могло быть в комнате (перечислите все возможности)?

9. (Зачёт, старшие)

В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC равны 1 и 2006 соответственно, а длина AB равна 2005. На прямой AD отметили точку E , равноудаленную от вершин C и D . Найдите DE .

10. (Зачёт, старшие)

На витрине ювелирного магазина лежат 18 золотых монет весом 100 г, 101 г, ..., 117 г. Рядом с каждой монетой лежала этикетка, указывающая вес монеты. Первого апреля шутник переложил этикетки. Продавец точно знает, какая монета сколько весит. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках, он сможет показать хозяину, который не знает, какая монета сколько весит, как правильно положить этикетки?

11. (Зачёт, старшие)

Сумма всех цифр двух 200-значных чисел a и b равна 2006. Какова наименьшая возможная сумма цифр числа $a+b$?

12. (Зачёт, старшие)

В однокруговом турнире по волейболу участвовало несколько команд. По окончании оказалось возможным разбить команды на группы: так в первой — одна команда, во второй — две, ..., в k -ой — k команд; при этом суммарное число очков, набранное командами каждой группы — одно и то же. Сколько команд участвовало в турнире?

13. (Зачёт, старшие)

Андрей вышел из городка A в 10 часов 18 минут и, двигаясь с постоянной скоростью, пришел в город B в 13 часов 30 минут. В тот же день Борис вышел из B в ровно 9 часов и, идя по той же дороге с постоянной скоростью, пришел в A в 11 часов 40 минут. Дорога пересекает реку. Андрей и Борис одновременно подошли к мосту через эту реку, каждый со своей стороны. Андрей ушел с моста на одну минуту позже Бориса. Когда они подошли к мосту?

14. (Зачёт, старшие)

За продажу ... пирогов по 49 руб. 36 коп. получено ... 7 руб. 28 коп. Восстановите пропущенные цифры, если известно, что у суммы их пропущено три.

15. (Зачёт, старшие)

На координатной плоскости провели все прямые вида $x = n$ и $y = n$, где n — всевозможные целые числа, а также окружность радиуса 2007 с центром в начале координат. В скольких различных точках эта окружность пересекается с проведёнными прямыми?

16. (Зачёт, старшие)

С каждым шестизначным числом проделали следующую операцию: записали его цифры в обратном порядке и сложили полученное число с исходным. Сколько различных сумм при этом получилось?

17. (Зачёт, старшие)

Найдите наименьшее натуральное n такое, что все цифры в записи числа $11111n$ различны.

18. (Зачёт, старшие)

На плоскости провели 2006 различных прямых, среди которых нет параллельных. Какое наибольшее количество углов, равных 1 градусу, могло при этом образоваться?

19. (Зачёт, старшие)

Найдите наибольшее натуральное n такое, что все цифры в записи числа $11111n$ различны.

20. (Зачёт, старшие)

На доске выписали названия всех натуральных чисел от 1 до 1000: один, два, ..., тысяча. Сколько раз в этой записи встречается буква «с»?

Ответы к ИСХОДНЫМ задачам (СТАРШИЕ)

1. 104
2. 2013019
3. двумя
4. $29713+713=30426$
5. 40
6. 45 км/ч
7. 0,01%
8. 669 или 2007
9. $a = 0$
10. 2872
11. 3000 рублей
12. Все целые x и все $0 < x < 1$.
13. $1/32$
14. 4, 5, 6, 7, 8

Ответы к ЗАЧЕТНЫМ задачам (СТАРШИЕ)

1. 88
2. таких чисел нет
3. a
4. 57
5. 23 фломастера по 86 центов
6. $897 \times 897 = 804609$
7. двумя
8. 4, 5, 6 или 7 человек
9. $DE = 2005$
10. за 3 взвешивания
11. 206
12. 6 команд
13. в 11.00
14. 98 пирогов за 4837 руб. 28 коп.
15. в 8028 точках
16. $18 \times 19 \times 19 = 6498$
17. 2116
18. 4010
19. 888894
20. 2411

РГУБОВ.РФ

Математическая карусель

	<i>Старшая группа</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	сумма	место
1	Казань	3	4	5	6	7	8	9	10	11	-	-	-									63	1
2	Снежинск	3	4	5	6	7	8	9	-	5	-	5	-	5								57	2
3	Пермь 9-8-1	3	4	5	-	-	4	5	6	7	-	5	-	-	4							43	3
4	Киров 8-1	3	4	5	-	5	6	7	-	-	4	-	-	4								38	4-5
5	Киров 8-2	3	4	5	-	5	6	-	5	6	-	-	4	-								38	4-5
6	ВолКИ (Вологда-Инкутск-Киров)	3	4	5	-	5	6	7	-	5	-	-										35	6
7	Набережные Челны	3	4	5	6	7	-	-	4	5	-	-	-	-								34	7-8
8	Омск	3	4	-	-	3	4	-	4	5	-	5	6	-								34	7-8
9	Дзержинск	3	4	5	-	5	6	-	-	4	-	-	3	-								30	9-10
10	Саров	3	4	5	-	5	6	-	-	4	-	-	3	-								30	9-10
11	Красноярск 8	-	3	4	5	6	7	-	-	4	-											29	11-12
12	Школа Пифагора	-	3	4	5	6	7	-	-	4	-											29	11-12
13	ЮМШ	3	4	5	-	5	6	-	-	4	-	-	-									27	13
14	Оренбург	-	3	4	-	4	5	-	-	4	-	4										24	14
15	Магнитогорск 8	3	4	5	-	5	6	-	-	-												23	15
16	Курган 8	-	3	4	5	6	-	-	4	-												22	16-17
17	Пермь 146-8	-	3	4	5	-	5	-	5	-	-	-	-	-								22	16-17
18	Антропоники	-	3	4	-	4	5	-	5													21	18
19	Томск 8	3	4	5	-	5	-	-														17	19
20	Нижний Тагил	-	3	4	-	4	-	-	-	3	-											14	20
21	Пермь 9-8-2	3	4	5	-	-																12	21
22	Екатеринбург 9-8	-	3	4	-	-	-	-	-													7	22
	Кол-во команд, верно решивших	14	22	21	7	18	16	5	8	14	1	4	4	2	1	0	0	0	0	0			

	<i>Младшие группы</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	сумма	место
1	Курган 7	3	4	-	4	-	4	5	6	7	-	5	6	-							44	1	
2	Киров 7	3	4	-	4	5	-	5	6	7	8										42	2	
3	Пермь 9-7-1	3	4	-	4	5	-	5	6	7	-	-									34	3	
4	Подмосковье	3	4	5	6	-	-	4	5	6	-	-	-	-							33	4	
5	<i>Екатеринбург 9-6</i>	3	4	-	4	-	-	3	4	-	-	3	4	-	3	4	-	-	-		32	5	
6	Челябинск	-	3	-	3	-	-	3	4	5	-	5	6								29	6	
7	<i>Санкт-Петербург</i>	-	3	4	5	-	-	4	-	4	-	4	-	4	-	-	-	-			28	7	
8	Магнитогорск 7-1	3	4	-	-	-	-	3	4	5	-	5	-	-	-						24	8	
9	Долгопрудный	3	4	-	4	-	-	3	4	5											23	9-10	
10	Набережные Челны 7-1	3	4	-	4	-	-	3	4	5	-	-	-	-							23	9-10	
11	Пермь 9-7-2	-	-	-	3	4	-	4	5	6	-	-									22	11	
12	<i>Екатеринбург 37</i>	-	3	-	3	-	-	3	4	5											18	12-16	
13	<i>Курган 6</i>	3	4	-	-	-	-	3	4	-	4										18	12-16	
14	Нижнекамск 7	3	-	-	3	-	-	3	4	5	-	-	-								18	12-16	
15	Озерск 7	3	-	-	3	-	-	3	4	5	-										18	12-16	
16	Ярославль	-	3	-	3	-	-	3	4	5	-	-									18	12-16	
17	<i>Киров 6</i>	-	3	-	3	-	-	3	4	-	-	-	-	3							16	17	
18	Барнаул	3	4	-	4	-	4	-													15	18-19	
19	Пермь 17	3	-	-	-	-	-	3	4	5	-	-	-								15	18-19	
20	Магнитогорск 7-2	3	4	-	4	-	-	-	-	-	3	-	-								14	20	
21	Ижевск	-	-	-	-	-	-	3	4	5	-	-	-								12	21-22	
22	Иркутск	3	-	-	3	-	-	3	-	3											12	21-22	
23	Математический центр СПбГДТЮ	-	-	-	3	-	3	4	-	-	-	-									10	23	
24	Набережные Челны 7-2	-	-	-	3	-	-	3	-	3											9	24-25	
25	Томск 6-7	-	3	-	3	-	3														9	24-25	
26	<i>Киров 5-6</i>	-	3	-	-	-	-	3													6	26-28	
27	<i>Красноярск 6</i>	3	-	-	-	-	-	3													6	26-28	
28	Пермь 146-7	-	3	-	3	-	-														6	26-28	
29	<i>Магнитогорск 6</i>	-	-	-	-	-	-	3	-												3	29	
30	<i>Нижнекамск 6</i>	-	-	-	-	-	-														0	30	

Кол-во команд, верно
решивших задачу

16 19 2 22 3 5 24 18 19 2 5 3 2 1 1 0 0 0 0 0



КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 18.02.2006

ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. Мальчик по вторникам всегда врёт, а по четвергам и пятницам говорит только правду. Однажды у него шесть дней подряд спрашивали, как его зовут. Ответы были такими: Коля, Петя, Коля, Петя, Вася, Петя. Как зовут мальчика?

2. Можно ли клетчатый квадрат 10×10 разрезать по линиям сетки на попарно различные прямоугольники, одна сторона каждого из которых вдвое короче другой стороны?

3. Найдите наименьшее натуральное n такое, что все дроби $\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \frac{K}{n+93}$ несократимы.

4. В прямоугольнике $ABCD$ точки P и Q — середины сторон BC и CD соответственно. Оказалось, что $AP \perp BD$. Докажите, что $\angle PAQ > 30^\circ$.

5. Натуральные числа a, b, c , где $b > a$, удовлетворяют уравнению $a^2 + b^2 - ab = c^2$. Докажите, что число b — составное.

6. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка L таким образом, что $\angle ALB = 60^\circ$, $2AL = BC$ и $LC = AB$. Найдите углы треугольника.

7. x, y и z — неотрицательные числа. Докажите, что если все подкоренные выражения неотрицательны, то

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{4-2y+2x} + \sqrt{9-3z+3y} + \sqrt{16+4z} \leq 10.$$

8. На турнир приехало 100 человек. Из любых пяти из них можно по крайней мере двумя способами выбрать трех попарно знакомых. Докажите, что среди них есть по крайней мере 4850 пар знакомых.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. Мальчик по четвергам и пятницам всегда говорит правду, а по вторникам всегда лжет. Однажды его 7 дней подряд спрашивали, как его зовут. Шесть первых дней он давал такие ответы: Андрей, Борис, Андрей, Борис, Виктор, Борис. Какой ответ он дал на седьмой день?

2. В ящике лежат 20 мандаринов. Известно, что любые 11 из них весят в сумме больше одного килограмма, а любые 10 весят в сумме меньше одного килограмма. Докажите, что найдется мандарин, весящий от 90 до 100 г.

3. Можно ли клетчатый квадрат 10×10 разрезать по линиям сетки на попарно различные прямоугольники, одна сторона каждого из которых вдвое короче другой стороны?

4. Школьника попросили записать на доске шесть таких натуральных чисел, чтобы разности между любыми двумя соседними числами были одинаковыми. Он написал числа 113, 137, 149, 155 и 173. При этом выяснилось, что одно число он просто забыл написать, а в еще в одном ошибся. Какое число он забыл написать? (Укажите все возможные случаи и докажите, что других нет.)

5. На доске записаны все девятизначные натуральные числа, десятичная запись которых содержит каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу. Каждую минуту выбирают наибольшее и наименьшее среди записанных на доске чисел и стирают. Какая пара чисел будет стерта последней?

6. Натуральные числа a, b, c удовлетворяют уравнению: $a^2 + b^2 - ab = c^2$. Известно, что $b > c > a$. Докажите, что b — составное.

7. На турнир приехали 66 участников. Известно, что среди любых шести из них найдутся четыре попарно знакомых. Докажите, что среди участников турнира есть по крайней мере 2006 пар знакомых.

- 8.** На стороне BC треугольника ABC выбрана точка L таким образом, что $\angle ALB = 60^\circ$, $2AL = BC$ и $LC = AB$. Найдите углы треугольника ABC .

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ГРУППЫ «СТАРТ»

1. Мальчик по четвергам и пятницам всегда говорит правду, а по вторникам всегда лжет. Однажды его 7 дней подряд спрашивали, как его зовут. Шесть первых дней он давал такие ответы: Андрей, Борис, Андрей, Борис, Виктор, Борис. Какой ответ он дал на седьмой день?

2. Дано неверное равенство $5 \times 6 \times 7 + 4 \times 8 \times 3 = 3 \times 10 \times 6 + 5 \times 4 \times 6$. Расставьте в нем скобки так, чтобы оно стало верным.

3. В коробке лежат 5 мандаринов. Известно, что любые три из них весят в сумме больше 300 г, но меньше 600 г. Докажите, что найдется мандарин, весящий от 100 до 200 г.

4. Можно ли клетчатый квадрат 10×10 разрезать по линиям сетки на попарно различные прямоугольники, одна сторона каждого из которых вдвое короче другой стороны?

5. На доске записаны все девятизначные натуральные числа, десятичная запись которых содержит каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу. Каждую минуту выбирают наибольшее и наименьшее среди записанных на доске чисел и стирают. Какая пара чисел будет стерта последней?

6. На турнир приехали 65 участников. Известно, что среди любых четырех из них найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что среди участников турнира есть по крайней мере 2006 пар знакомых.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ СТАРШЕЙ ГРУППЫ.

Задача 1. Мальчик по вторникам всегда врёт, а по четвергам и пятницам говорит только правду. Однажды у него шесть дней подряд спрашивали, как его зовут. Ответы были такими: Коля, Петя, Коля, Петя, Вася, Петя. Как зовут мальчика?

Ответ: Коля. Решение. Поскольку среди ответов мальчика нет двух идущих подряд одинаковых, он либо начал отвечать в пятницу, либо закончил в четверг. Но второе невозможно, потому что мальчик не может дать во вторник и четверг одинаковые ответы. Отсюда — ответ.

Задача 2. Можно ли клетчатый квадрат 10×10 разрезать по линиям сетки на попарно различные прямоугольники, одна сторона каждого из которых вдвое короче другой стороны?

Ответ: Нет. Решение. Возможны прямоугольники размерами 5×10 , 4×8 , 3×6 , 2×4 и 1×2 . Их площади — 50, 32, 18, 8 и 2 клетки соответственно. Из этих чисел можно составить 100 единственным способом: $50+32+18$. Но из прямоугольников 4×8 и 3×6 нельзя сложить прямоугольник 5×10 , который дополнит другой прямоугольник 5×10 до квадрата.

Задача 3. Найдите наименьшее натуральное n такое, что все дроби $\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, K, \frac{91}{n+93}$ несократимы.

Ответ: 95. Решение. Представив знаменатели в виде $(n+2)+19, \dots, (n+2)+91$, заметим, что все дроби будут несократимыми тогда и только тогда, когда число $n+2$ взаимно просто с каждым из чисел 19, ..., 91. Наименьшим из таких чисел $n+2$ будет наименьшее простое число, большее 91, то есть 97, откуда $n = 95$. Все числа, меньшие 97, имеют простые делители, меньшие 91, а для каждого такого простого делителя среди чисел от 19 до 91 найдется делящееся на него число.

Задача 4. В прямоугольнике $ABCD$ точки P и Q — середины сторон BC и CD соответственно. Оказалось, что $AP \perp BD$. Докажите, что $\angle PAQ > 30^\circ$.

Решение. PQ — средняя линия треугольника BCD . Поэтому $PQ \perp AP$ и $PQ = BD/2$. В треугольнике AQC угол Q — тупой. Поэтому $BD = AC > AQ$, откуда $PQ > AQ/2$. Следовательно, на отрезке PQ найдется такая точка R , что $PR = AQ/2$. В прямоугольном треугольнике APR катет PR вдвое короче гипотенузы. Поэтому $\angle PAQ > \angle PAR = 30^\circ$.

Задача 5. Натуральные числа a, b, c , где $b > a$, удовлетворяют уравнению $a^2 + b^2 - ab = c^2$. Докажите, что число b — составное.

Решение. Приведем данное в условии равенство к виду $b^2 - ab = c^2 - a^2 \Leftrightarrow b(b-a) = (c-a)(c+a)$ (*). Допустим, число b — простое. Тогда $c+a$ делится на b ($c-a$ делиться на b не может, потому что $a^2 + b^2 - ab < b^2$, откуда $c < b$ и $0 < c-a < c < b$). Но $c+a < 2b$. Поэтому $c+a = b$. Деля равенство (*) на последнее равенство, получаем $b-a = c-a$, откуда $b = c$. Противоречие.

Задача 6. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка L таким образом, что $\angle ALB = 60^\circ$, $2AL = BC$ и $LC = AB$. Найдите углы треугольника.

Ответ: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Решение. Отложим на луче LB отрезок $LM = AL$. Получится равносторонний треугольник ALM . Пусть точка M оказалась между точками B и L . Тогда $AB+BM = LC+BM = BC-LM = BC/2 = AL = AM$, то есть в треугольнике ABM сторона AM равна сумме двух других, что невозможно. Допустим, точка M оказалась за точкой B . Тогда $AB-BM = LC-BM = BC/2 = AL = AM$, и неравенство треугольника снова нарушено. Стало быть, $M = B$, а L — середина стороны BC , откуда легко получается ответ.

Задача 7. x, y и z — неотрицательные числа. Докажите, что если все подкоренные выражения неотрицательны, то

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{4-2y+2x} + \sqrt{9-3z+3y} + \sqrt{16+4z} \leq 10.$$

Решение. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим имеем: $2\sqrt{1(1-x)} \leq 2-x$, $2\sqrt{2(2-y+x)} \leq 4-y+x$, $2\sqrt{3(3-z+y)} \leq 6-z+y$, $2\sqrt{4(4+z)} \leq 8+z$. Сложив эти четыре неравенства и поделив результат на 2, получаем искомое неравенство.

Задача 8. На турнир приехало 100 человек. Из любых пяти из них можно по крайней мере двумя способами выбрать трех попарно знакомых. Докажите, что среди них есть по крайней мере 4850 пар знакомых.

Решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются участники турнира, а ребрами — пары участников, незнакомых между собой. Если в этом графе есть треугольник ABC , то в любой пятерке $ABCDE$ участники D и E должны быть знакомы между собой, и каждый из них должен быть знаком с двоими из тройки ABC . Тогда пар знакомых получается не меньше, чем $97 \times 96/2 + 2 \times 97 = 97 \times 50 = 4850$. Дальше будем считать, что треугольников нет. Пусть есть цикл $ABCD$ длины 4. Добавляя сюда произвольного участника E , находим, что он дружит со всеми участниками из этого цикла, A дружит с C и B дружить с D . Таким образом, каждый цикл длины 4 в нашем графе является компонентой связности. Заметим далее, что в нашем графе нет незамкнутых путей длины 4: если есть такой путь $ABCDE$, то в пятерке $ABCDE$ нет двух троек попарно знакомых. Поэтому нет и циклов длины больше 4, то есть каждая компонента связности нашего графа — либо цикл длины 4, либо дерево. Но в такой ситуации ребер у этого графа не больше, чем вершин, то есть не больше 100. Соответственно, пар знакомых не меньше, чем $100 \times 99/2 - 100 = 4850$.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ МЛАДШЕЙ ГРУППЫ.

Задача 1. Мальчик по четвергам и пятницам всегда говорит правду, а по вторникам всегда лжет. Однажды его 7 дней подряд спрашивали, как его зовут. Шесть первых дней он давал такие ответы: Андрей, Борис, Андрей, Борис, Виктор, Борис. Какой ответ он дал на седьмой день?

Ответ: Андрей. Решение. Поскольку среди ответов мальчика нет двух идущих подряд одинаковых, он начал отвечать в пятницу или субботу. Но второе невозможно, потому что мальчик

не может дать во вторник и четверг одинаковые ответы. Поэтому он закончил отвечать в четверг, и ответил то же, что и в предыдущую пятницу.

Задача 2. В ящике лежат 20 мандаринов. Известно, что любые 11 из них весят в сумме больше одного килограмма, а любые 10 весят в сумме меньше одного килограмма. Докажите, что найдется мандарин, весящий от 90 до 100 г.

Решение. Пусть утверждение задачи неверно. Тогда каждый мандарин либо легче 90 г, либо тяжелее 100 г. «Тяжёлых» мандаринов не больше 9, иначе найдутся 10 мандаринов, весящих в сумме больше килограмма. Но тогда «лёгких» мандаринов — не меньше 11, а 11 «лёгких» мандаринов вместе весят меньше килограмма. Противоречие.

Задача 3. Можно ли клетчатый квадрат 10×10 разрезать по линиям сетки на попарно различные прямоугольники, одна сторона каждого из которых вдвое короче другой стороны?

Ответ: Нет. **Решение.** Возможны прямоугольники размерами 5×10 , 4×8 , 3×6 , 2×4 и 1×2 . Их площади — 50, 32, 18, 8 и 2 клетки соответственно. Из этих чисел можно составить 100 единственным способом: $50+32+18$. Но из прямоугольников 4×8 и 3×6 нельзя сложить прямоугольник 5×10 , который дополнил бы другой прямоугольник 5×10 до квадрата.

Задача 4. Школьника попросили записать на доске шесть таких натуральных чисел, чтобы разности между любыми двумя соседними числами были одинаковыми. Он написал числа 113, 137, 149, 155 и 173. При этом выяснилось, что одно число он просто забыл написать, а в еще в одном ошибся. Какое число он забыл написать? (Укажите все возможные случаи и докажите, что других нет.)

Ответ: 125 или 161. **Решение.** Обозначим разность между соседними числами через d . Допустим, оба числа 149 и 155 записаны верно. Тогда $d \leq 6$, и разность между крайними числами — не больше 30. Но она получается больше 30 даже в случаях, когда неверно записаны 113 (173–137) или 173 (155–113). Значит, ошибка в одном из чисел 149 и 155, а остальные числа записаны верно. Поэтому кратны d разности $173-113=60$ и $137-113=24$, то есть d является делителем для НОД($60, 24$) = 12. С другой стороны, $173-113 \leq 6d$, откуда $d \geq 10$. Стало быть, $d=12$, и потому числа 113 и 173 — соответственно наибольшее и наименьшее из тех, которые надо было записать. Из них на доске не записаны числа 125 и 161, любое из которых может быть пропущенным.

Задача 5. На доске записаны все девятизначные натуральные числа, десятичная запись которых содержит каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу. Каждую минуту выбирают наибольшее и наименьшее среди записанных на доске чисел и стирают. Какая пара чисел будет стерта последней?

Ответ: 561234789 и 549876321. **Решение.** На доске записано по $8!$ чисел, начинающихся с 1, 2, ..., 9. Поэтому после $4 \times 8!$ стираний на ней останутся в точности все числа, начинающиеся с пятерки. Сотрем все начальные пятерки — порядок чисел от этого не изменится. Останется по $7!$ чисел, начинающихся с 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 и 9. Последними, очевидно, будут стерты самое большое число, начинающееся на 4: 49876321 и самое маленькое, начинающееся на 6: 61234789. Вернув стертые пятерки, получаем ответ.

Задача 6. Натуральные числа a , b , c удовлетворяют уравнению: $a^2+b^2-ab=c^2$. Известно, что $b > c > a$. Докажите, что b — составное.

Решение. Приведем данное в условии равенство к виду $b^2-ab=c^2-a^2 \Leftrightarrow b(b-a)=(c-a)(c+a)$ (*). Допустим, число b — простое. Тогда $c+a$ делится на b ($c-a$ делиться на b не может, потому что $0 < c-a < b$). Но $c+a < 2b$. Поэтому $c+a=b$. Деля равенство (*) на последнее равенство, получаем $b-a=c-a$, откуда $b=c$. Противоречие.

Задача 7. На турнир приехали 66 участников. Известно, что среди любых шести из них найдутся четыре попарно знакомых. Докажите, что среди участников турнира есть по крайней мере 2006 пар знакомых.

Решение. Допустим, есть четыре человека таких, что А не знаком с Б, а В — с Г. Возьмем любых двоих Д и Е не из этой четверки. Чтобы для шестерки А,Б,В,Г,Д,Е было выполнено условие задачи, в четверку попарно знакомых должны входить Д, Е и по одному из пар А,Б и В,Г. Получается, что любые два из 62 человек, не входящих в четверку А,Б,В,Г, знакомы между собой. Это дает нам $62 \times 61 / 2 = 1891$ знакомство. Кроме того, каждый из этих 62 человек знаком минимум с двумя из четверки А,Б,В,Г. Это дает еще 126 знакомств, итого — 2017, достаточно. Рассмотрим теперь случай, когда в любые две пары незнакомых входит общий человек. Тогда, как легко показать, найдется либо трое попарно незнакомых (и больше пар незнакомых людей нет), либо человек, входящий во все пары незнакомых. В обоих случаях пар незнакомых не больше, чем 65, а пар знакомых — не меньше, чем $66 \times 65 / 2 - 65 = 2080$.

Задача 8. На стороне ВС треугольника ABC выбрана точка L таким образом, что $\angle ALB = 60^\circ$, $2AL = BC$ и $LC = AB$. Найдите углы треугольника.

Ответ: 30° , 60° , 90° . Решение. Отложим на луче LB отрезок LM = AL. Получится равносторонний треугольник ALM. Пусть точка M оказалась между точками B и L. Тогда $AB + BM = LC + BM = BC - LM = BC / 2 = AL = AM$, то есть в треугольнике ABM сторона AM равна сумме двух других, что невозможно. Допустим, точка M оказалась за точкой B. Тогда $AB - BM = LC - BM = BC / 2 = AL = AM$, и неравенство треугольника снова нарушено. Стало быть, M = B, а L — середина стороны BC, откуда легко получается ответ.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ ГРУППЫ «СТАРТ».

Задача 1. Мальчик по четвергам и пятницам всегда говорит правду, а по вторникам всегда лжет. Однажды его 7 дней подряд спрашивали, как его зовут. Шесть первых дней он давал такие ответы: Андрей, Борис, Андрей, Борис, Виктор, Борис. Какой ответ он дал на седьмой день?

Ответ: Андрей. Решение. Поскольку среди ответов мальчика нет двух идущих подряд одинаковых, он начал отвечать в пятницу или субботу. Но второе невозможно, потому что мальчик не может дать во вторник и четверг одинаковые ответы. Поэтому он закончил отвечать в четверг, и ответил то же, что и в предыдущую пятницу.

Задача 2. Дано неверное равенство $5 \times 6 \times 7 + 4 \times 8 \times 3 = 3 \times 10 \times 6 + 5 \times 4 \times 6$. Рассставьте в нем скобки так, чтобы оно стало верным.

Решение. $5 \times 6 \times (7+4) \times 8 \times 3 = 3 \times 10 \times (6+5) \times 4 \times 6$.

Задача 3. В коробке лежат 5 мандаринов. Известно, что любые три из них весят в сумме больше 300 г, но меньше 600 г. Докажите, что найдется мандарин, весящий от 100 до 200 г.

Решение. Пусть утверждение задачи неверно. Тогда каждый мандарин либо легче 100 г, либо тяжелее 200 г. «Тяжёлых» мандаринов не больше двух, иначе найдутся три мандарина, весящие в сумме больше 600 г. Но тогда «лёгких» мандаринов — не меньше трех, а три «лёгких» мандарина вместе весят меньше 300 г. Противоречие.

Задача 4. Можно ли клетчатый квадрат 10×10 разрезать по линиям сетки на попарно различные прямоугольники, одна сторона каждого из которых вдвое короче другой стороны?

Ответ: Нет. Решение. Возможны прямоугольники размерами 5×10 , 4×8 , 3×6 , 2×4 и 1×2 . Их площади — 50, 32, 18, 8 и 2 клетки соответственно. Из этих чисел можно составить 100 единственным способом: $50+32+18$. Но из прямоугольников 4×8 и 3×6 нельзя сложить прямоугольник 5×10 , который дополнил бы другой прямоугольник 5×10 до квадрата.

Задача 5. На доске записаны все девятизначные натуральные числа, десятичная запись которых содержит каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу. Каждую минуту выбирают наибольшее и наименьшее среди записанных на доске чисел и стирают. Какая пара чисел будет стерта последней?

Ответ: 561234789 и 549876321. Решение. На доске, очевидно, записано поровну чисел, начинающихся с 1, 2, ..., 9. Поэтому после некоторого числа стираний на ней останутся в точности все числа, начинающиеся с пятерки. Сотрем все начальные пятерки — порядок чисел от этого не изменится. Останется поровну чисел, начинающихся с 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8 и 9. Последними, очевидно, будут стерты самое большое число, начинающееся на 4: 49876321 и самое маленькое, начинающееся на 6: 61234789. Вернув стертые пятерки, получаем ответ.

Задача 6. На турнир приехали 65 участников. Известно, что среди любых четырех из них найдутся трое попарно знакомых. Докажите, что среди участников турнира есть по крайней мере 2006 пар знакомых.

Решение. Пусть участники А и Б незнакомы. Возьмем любых двоих В и Г из оставшихся 63 человек. Чтобы в четверке А,Б,В,Г нашлись трое попарно знакомых, нужно, чтобы В и Г были знакомы между собой, а кто-то из А и Б был знаком с обоими из них. Таким образом, среди оставшихся 63 человек каждый знаком с каждым, что дает $63 \times 62 / 2 = 1953$ знакомства, и каждый из этих 63-х знаком с А или Б, что дает еще 63 знакомства. Итого, самое меньшее, среди участников турнира есть по крайней мере $1953 + 63 = 2016 > 2006$ пар знакомых

ИТОГИ КОМАНДНОЙ ОЛИМПИАДЫ
СТАРШАЯ ГРУППА

№	Команда	1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма	Место	Высшая лига
1	Киров 8-1	7	7	7	7	7	7	7	0	49	1	
2	Пермь 146-8	7	7	7	6	6	5	0	0	38	2	
3	Снежинск 127 8-7	7	3	7	7	6	5	0	0	35	3	
4	ЮМШ	7	7	7	4	0	4	0	6	35	4	
5	Омск-8	7	7	7	7	6	0	0	0	34	5	
6	Екатеринбург 9-8	7	7	6	5	7	0	0	0	32	6	
7	Школа Пифагора	7	6	2	5	0	7	0	1	28	7	
8	Казань	7	7	7	0	7	0	0	0	28	8	
9	Магнитогорск 8	7	3	5	7	0	0	0	0	22	9	
10	Курган-8	7	7	1	0	6	0	0	0	21	10	
11	Саров	7	5	4	0	0	5	0	0	21	11	
12	Оренбург	7	7	7	0	0	0	0	0	21	12	
13	Дзержинск	7	2	6	0	0	5	0	0	20	13	
14	Набережные Челны-8	7	7	6	0	0	0	0	0	20	14	
15	Пермь 9-8-1	7	7	4	0	0	0	0	0	18	15	
16	Антрапоники	7	5	5	0	0	0	0	0	17	16	
17	Киров 8-2	7	2	6	0	0	0	0	0	15	17	Вторая лига
18	Красноярск-8	7	4	4	0	0	0	0	0	15	18	
19	ВолКИ	7	7	0	0	0	0	0	0	14	19	
20	Пермь 9-8-2	7	7	0	0	0	0	0	0	14	20	
21	Томск-8	7	2	2	0	0	1	0	0	12	21	
22	Нижний Тагил	7	4	0	0	0	0	0	0	11	22	

При равенстве очков рейтинговые места команд определялись жребием

МЛАДШАЯ ГРУППА

№	Команда	1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма	Место
1	Санкт-Петербург	7	7	7	7	7	7	7	7	56	1
2	Пермь-17	7	7	7	4	4	7	0	0	36	2
3	Курган 7	7	7	7	0	6	7	0	0	34	3
4	Магнитогорск 7-1	7	7	7	5	7	0	0	0	33	4
5	Набережные Челны 7-1	7	7	7	1	7	0	2	0	31	5
6	Пермь 146-7	7	7	7	6	3	0	0	0	30	6
7	Ярославль	7	7	7	4	4	0	0	0	29	7
8	Нижнекамск 7	7	6	4	6	4	1	0	0	28	8
9	Подмосковье	7	7	7	2	4	0	0	0	27	9
10	Киров 7	7	7	7	4	2	0	0	0	27	10
11	Долгопрудный	7	7	4	1	7	0	0	0	26	11
12	Екатеринбург-37	7	7	7	2	2	0	0	0	25	12
13	Челябинск	7	6	7	2	3	0	0	0	25	13
14	Набережные Челны 7-2	7	7	6	4	0	0	0	0	24	14
15	Ижевск	7	2	5	4	4	0	0	0	22	15
16	Пермь 9-7-1	7	2	7	2	2	0	0	0	20	16
17	Озерск 7	7	0	7	3	2	0	0	0	19	17
18	Барнаул	7	0	7	1	3	0	0	0	18	18
19	Магнитогорск 7-2	7	0	6	2	0	0	0	0	15	19
20	Иркутск	0	6	5	2	0	0	0	0	13	20
21	Томск 6-7	7	0	0	1	0	0	0	0	8	21
22	Пермь 9-7-2	5	0	0	2	0	0	0	0	7	22

1	Магнитогорск-6	7	7	7	7	1	0			29	1
2	Екатеринбург 9-6	7	7	7	7	0	0			28	2
3	Санкт-Петербург ГДТЮ	6	7	7	5	0	0			25	3
4	Курган-6	7	7	3	4	2	0			23	4
5	Киров-6	7	7	0	7	0	0			21	5
6	Нижнекамск-6	5	7	0	4	1	0			17	6
7	Киров-5-6	7	7	0	0	3	0			17	7
8	Красноярск-6	3	7	0	1	3	1			15	8

При равенстве очков рейтинговые места команд определялись жребием.

ЛИЧНАЯ ОЛИМПИАДА 18.02.2006
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

- 1.** Можно ли разрезать квадрат на треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник?
- 2.** Есть три деревянных столбика разной высоты. От любого столбика можно отпилить разность между высотами двух других столбиков. Можно ли, делая так много раз, получить три столбика одной высоты?
- 3.** Магическим квадратом называется такая таблица 3×3 , в которой суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух диагоналей равны одной и той же «магической сумме». Известно, что в двух противоположных углах магического квадрата стоят числа 11 и 19. Какое число может стоять в центральной клетке квадрата? (Перечислите все возможные случаи и докажите, что других нет.)
- 4.** Натуральные числа от 1 до 100 раскрашены в три цвета так, что разность любых двух одноцветных чисел не равна 3, 8 и 11. Докажите, что какая-то разность двух одноцветных чисел равна 10.
- 5.** У нумизматов Пети есть три внешне неотличимые монеты, две из которых настоящие и имеют одинаковый вес, а третья, отличающаяся от них по весу, фальшивая. Его чашечные весы без гирь испортились и всегда показывают неправильный результат взвешивания (при взвешивании двух монет одинакового веса одна из них будет перевешивать другую, а при взвешивании двух монет разного веса эти весы или будут находиться в равновесии, или монета с меньшим весом будет перевешивать монету с большим весом). Может ли Петя с помощью таких весов наверняка определить среди этих трех монет хотя бы одну настоящую?

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

- 1.** Есть три деревянных столбика разной высоты. От любого столбика можно отпилить разность между высотами двух других столбиков. Можно ли, делая так много раз, получить три столбика одной высоты?
- 2.** Магическим квадратом называется такая таблица 3×3 , в которой суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух диагоналей равны «магической сумме» S . Известно, что в двух противоположных углах магического квадрата стоят числа 31 и 33, а в еще одной из клеток стоит число 28. Чему может быть равна магическая сумма для такого квадрата? (Перечислите все возможные случаи и докажите, что других нет.)
- 3.** У нумизматов Пети есть три внешне неотличимые монеты, две из которых настоящие и имеют одинаковый вес, а третья, отличающаяся от них по весу, фальшивая. Его чашечные весы без гирь испортились и всегда показывают неправильный результат взвешивания (при взвешивании двух монет одинакового веса одна из них будет перевешивать другую, а при взвешивании двух монет разного веса эти весы или будут находиться в равновесии, или монета с меньшим весом будет перевешивать монету с большим весом). Может ли Петя с помощью таких весов наверняка определить среди этих трех монет хотя бы одну настоящую?
- 4.** На сторонах треугольника ABC , как на основаниях, построены равносторонние треугольники: ABC_1 и BCA_1 – во внешнюю сторону и CAB_1 – вовнутрь. Точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Докажите, что вершина B лежит на той же прямой.
- 5.** Натуральные числа от 1 до 100, раскрасили в три цвета. Докажите, что найдутся два одноцветных числа, разность которых — точный квадрат.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. В клетках квадрата 5×5 расставлены числа так, что суммы чисел во всех строках и во всех столбцах одинаковы. Сумма всех чисел в левом верхнем квадрате 2×2 равна 10, а в правом нижнем квадрате 3×3 — 15. Найдите сумму всех чисел в таблице.

2. На острове в Тихом океане живут честные люди и лжецы. Честные люди всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. На президентских выборах было $n \geq 3$ кандидатов. Во время теледебатов все кандидаты по очереди сделали по одному заявлению. k -й по счету кандидат сказал: "Среди всех кандидатов, кроме меня, лжецов на k больше, чем честных людей". Сколько было кандидатов?

3. На сторонах треугольника ABC , как на основаниях, построены равносторонние треугольники: ABC_1 и BCA_1 — во внешнюю сторону и CAB_1 — вовнутрь. Точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Найдите угол ABC .

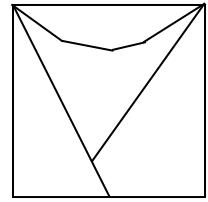
4. Вася поставил на шахматную доску 8×8 31 фишку: 16 на черные поля и 15 на белые. Докажите, что какие-то две фишки стоят на полях, имеющих общую сторону.

5. Натуральные числа от 1 до 100, раскрасили в три цвета. Докажите, что найдутся два одноцветных числа, разность которых — точный квадрат.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ 6 КЛАССА.

Задача 1. Можно ли разрезать квадрат на треугольник, четырехугольник, пятиугольник и шестиугольник?

Ответ: Да. **Решение.** См. рисунок справа.



Задача 2. Есть три деревянных столбика разной высоты. От любого столбика можно отпилить разность между высотами других двух столбиков. Можно ли, делая так много раз, получить три столбика одной высоты?

Ответ: Нет. **Решение.** Допустим, все три столбика сравнялись. Но тогда перед последним ходом два должны были быть равны, а третий — не равен им. Но в такой ситуации мы отпилить от третьего столбика ничего не сможем. Противоречие.

Задача 3. Магическим квадратом называется такая таблица 3×3 , в которой суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух диагоналей равны одной и той же «магической сумме». Известно, что в двух противоположных углах магического квадрата стоят числа 11 и 19. Какое число может стоять в центральной клетке квадрата? (Перечислите все возможные случаи и докажите, что других нет.)

Ответ: 15. **Решение.** Пусть в центральной клетке квадрата стоит число a , а его сумма равна S . Сосчитаем суммы чисел в средней строке, среднем столбце и на двух диагоналях таблицы и сложим их. Получится $4S$, причем все числа таблицы, кроме центрального, сосчитываются по одному разу, а центральное — четыре раза. Вычитая отсюда сумму всех чисел таблицы, равную $3S$, получим, что $3a = S$, то есть $a = S/3$. Складывая числа на диагонали, где стоят 11 и 19, найдем, что $30 + S/3 = S$, откуда и получается ответ.

Задача 4. Натуральные числа от 1 до 100 раскрашены в три цвета так, что разность любых двух одноцветных чисел не равна 3, 8 и 11. Докажите, что какая-то разность двух одноцветных чисел равна 10.

Решение. Заметим, что числа в каждой из троек 1, 4, 12 и 1, 9, 12 должны быть трех разных цветов. Поэтому числа 4 и 9 — одного цвета. То же верно и для троек 6, 9, 17 и 6, 14 и 17.

Поэтому числа 9 и 14 одного цвета. Стало быть, числа 4 и 14 — одноцветные, что и доказывает утверждение задачи.

Задача 5. У нумизмата Пети есть три внешне неотличимые монеты, две из которых настоящие и имеют одинаковый вес, а третья, отличающаяся от них по весу, фальшивая. Его чашечные весы без гирь испортились и всегда показывают неправильный результат взвешивания (при взвешивании двух монет одинакового веса одна из них будет перевешивать другую, а при взвешивании двух монет разного веса эти весы или будут находиться в равновесии, или монета с меньшим весом будет перевешивать монету с большим весом). Может ли Петя с помощью таких весов наверняка определить среди этих трех монет хотя бы одну настоящую?

Ответ: Да. Решение. Взвесим монеты попарно. Если хотя бы раз было равновесие, фальшивая монета при этом взвешивании была на весах, стало быть, оставшаяся — настоящая. Если же равновесия не было, то фальшивая либо дважды перевесила (если она легче настоящих), либо дважды не перевесила (если тяжелее). Тогда та монета, которая перевесила ровно один раз (легко проверить, что такая найдется) — настоящая.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ 7 КЛАССА.

Задача 1. Есть три деревянных столбика разной высоты. От любого столбика можно отпилить разность между высотами других двух столбиков. Можно ли, делая так много раз, получить три столбика одной высоты?

Ответ: Нет. Решение. Допустим, все три столбика сравнялись. Тогда перед последним ходом два должны были быть равны, а третий — не равен им. Но в такой ситуации мы отпилить от третьего столбика ничего не сможем. Противоречие.

Задача 2. Магическим квадратом называется такая таблица 3×3 , в которой суммы чисел в каждой строке, каждом столбце и каждой из двух диагоналей равны «магической сумме» S . Известно, что в двух противоположных углах магического квадрата стоят числа 31 и 33. Чему может быть равна магическая сумма для такого квадрата? (Перечислите все возможные случаи и докажите, что других нет.)

Ответ: 96. Решение. Пусть в центральной клетке квадрата стоит число a , а его сумма равна S . Сосчитаем суммы чисел в средней строке, среднем столбце и на двух диагоналях таблицы и сложим их. Получится $4S$, причем все числа таблицы, кроме центрального, сосчитываются по одному разу, а центральное — четыре раза. Вычитая отсюда сумму всех чисел таблицы, равную $3S$, получим, что $3a = S$, то есть $a = S/3$. Складывая теперь числа на диагонали, где стоят 31 и 33, найдем, что $64 + S/3 = S$, откуда и получается ответ.

Задача 3. У нумизмата Пети есть три внешне неотличимые монеты, две из которых настоящие и имеют одинаковый вес, а третья, отличающаяся от них по весу, фальшивая. Его чашечные весы без гирь испортились и всегда показывают неправильный результат взвешивания (при взвешивании двух монет одинакового веса одна из них будет перевешивать другую, а при взвешивании двух монет разного веса эти весы или будут находиться в равновесии, или монета с меньшим весом будет перевешивать монету с большим весом). Может ли Петя с помощью таких весов наверняка определить среди этих трех монет хотя бы одну настоящую?

Решение. Пусть в центральной клетке квадрата стоит число a , а его сумма равна S . Сосчитаем суммы чисел в средней строке, среднем столбце и на двух диагоналях таблицы и сложим их. Получится $4S$, причем все числа таблицы, кроме центрального, сосчитываются по одному разу, а центральное — четыре раза. Вычитая отсюда сумму всех чисел таблицы, равную $3S$, получим, что $3a = S$, то есть $a = S/3$. Складывая теперь числа на диагонали, где стоят 31 и 33, найдем, что $64 + S/3 = S$, откуда и получается ответ.

Задача 4. На сторонах треугольника ABC , как на основаниях, построены равносторонние треугольники: ABC_1 и BCA_1 — во внешнюю сторону и CAB_1 — вовнутрь. Точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Найдите угол ABC .

Ответ: 60° . Решение. Треугольник C_1AB_1 равен треугольнику BAC по двум сторонам и углу между ними. Аналогично, треугольник B_1CA_1 равен треугольнику BCA . Поэтому $\angle AB_1C_1 = \angle BCA$, а $\angle CB_1A_1 = \angle BAC$. Поскольку $\angle AB_1C_1 + \angle AB_1C + \angle CB_1A_1 = 180^\circ$, $\angle ABC = \angle AB_1C = 60^\circ$.

Задача 5. Натуральные числа от 1 до 100, раскрасили в три цвета. Докажите, что найдутся два одноцветных числа, разность которых — точный квадрат.

Решение. Пусть $10 \leq n \leq 84$. Поскольку $9+16=25$, числа в каждой из троек $n-9$, n , $n+16$ и $n-9$, $n+7$, $n+16$ должны быть трех разных цветов. Поэтому при указанных значениях n числа n и $n+7$ — одного цвета. Следовательно, одноцветными будут, например, числа 10 и $10+7\times7=59$, что и требовалось доказать.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ 8 КЛАССА.

Задача 1. В клетках квадрата 5×5 расположены числа так, что суммы чисел во всех строках и во всех столбцах одинаковы. Сумма всех чисел в левом верхнем квадрате 2×2 равна 10, а в правом нижнем квадрате 3×3 — 15. Найдите сумму всех чисел в таблице.

Ответ: 25. Решение. Рассмотрим прямоугольник размером 2×3 клетки, образованный двумя верхними строками и тремя правыми столбцами таблицы. Пусть сумма чисел в каждой строке равна S , а сумма чисел в нашем прямоугольнике равна X . Тогда сумма всех чисел в двух верхних строках равна $2S=10+X$, а в трех правых столбцах — $3S=15+X$. Отсюда находим, что $S=5$, и получаем ответ.

Задача 2. На острове в Тихом океане живут честные люди и лжецы. Честные люди всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. На президентских выборах было $n \geq 3$ кандидатов. Во время теледебатов все кандидаты по очереди сделали по одному заявлению. k -й по счету кандидат сказал: "Среди всех кандидатов, кроме меня, лжецов на k больше, чем честных людей". Сколько было кандидатов?

Ответ: 3. Решение. Если все кандидаты — лжецы, то предпоследний из них сказал правду: «Среди всех кандидатов, кроме меня, лжецов на $n-1$ больше, чем честных людей». Противоречие. Значит, есть честный кандидат. При этом он ровно один, иначе двое честных сделали бы два противоречащих друг другу утверждения. Не считая него, среди всех кандидатов лжецов на $n-1$ больше, чем честных людей, поэтому честный кандидат высказывался предпоследним. Возьмем теперь любого кандидата-лжеца. Не считая него, среди всех кандидатов лжецов на $n-3$ больше, чем честных людей. Поэтому лжец не может выступать $(n-3)$ -им, то есть $n-3 \leq 0 \Leftrightarrow n \leq 3$. Легко проверить, что $n=3$ подходит.

Задача 3. На сторонах треугольника ABC , как на основаниях, построены равносторонние треугольники: ABC_1 и B_1CA — во внешнюю сторону и CAB_1 — вовнутрь. Точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на одной прямой. Найдите угол ABC .

Ответ: 60° . Решение. Треугольник C_1AB_1 равен треугольнику BAC по двум сторонам и углу между ними. Аналогично, треугольник B_1CA_1 равен треугольнику ACB . Поэтому $\angle AB_1C_1 = \angle BCA$, а $\angle CB_1A_1 = \angle BAC$. Поскольку $\angle AB_1C_1 + \angle AB_1C + \angle CB_1A_1 = 180^\circ$, $\angle ABC = \angle AB_1C = 60^\circ$.

Задача 4. Вася поставил на шахматную доску 8×8 31 фишку: 16 на черные поля и 15 на белые. Докажите, что какие-то две фишки стоят на полях, имеющих общую сторону.

Решение. Разобьем доску на 16 квадратов 2×2 . Если в каком-то квадрате отмечены хотя бы три клетки, утверждение задачи выполнено. В противном случае в 15 квадратах 2×2 из 16 стоят по 2 фишки, причем на клетках одного цвета, иначе доказывать нечего. Возьмем два квадрата, в одном из которых фишки стоят на двух белых клетках, а в другом — на двух черных, и соединим их цепочкой квадратов, в которой каждый два соседних квадрата имеют общую сторону, и в каждом стоят по 2 фишки (что возможно, ибо единственный квадрат 2×2 , в котором стоит одна фишка, очевидно, можно обойти). Где-то по пути обязательно произойдет смена цвета клеток, на

которых стоят фишki в соседних квадратах. Тут-то и найдутся две фишki, стоящие на соседних клетках.

Задача 5. Натуральные числа от 1 до 100, раскрасили в три цвета. Докажите, что найдутся два одноцветных числа, разность которых — точный квадрат.

Решение. Пусть $10 \leq n \leq 84$. Поскольку $9+16=25$, числа в каждой из троек $n-9$, n , $n+16$ и $n-9$, $n+7$, $n+16$ должны быть трех разных цветов. Поэтому при указанных значениях n числа n и $n+7$ — одного цвета. Поэтому одноцветными будут, например, числа 10 и $10+7\times7=59$, что и требовалось доказать.

ПОБЕДИТЕЛИ И ПРИЗЕРЫ ЛИЧНОЙ ОЛИМПИАДЫ

Фамилия, имя, отчество	класс	команда	1	2	3	4	5	сумма	награда
Брагин Владимир	8	Снежинск I	7	7	5	7	7	33	Диплом I ст.
Белошапко Георгий	8	Красноярск II	7	7	5	3	7	29	Диплом II ст.
Болгарова Анна	8	ЮМШ	7	7	1	7	0	22	Диплом III ст.
Таран Александр	8	Омск	7	7	1	7	0	22	Диплом III ст.
Шабалин Филипп	8	Киров-8-1	7	7	0	7	0	21	Диплом III ст.
Асипович Ася	8	ЮМШ	7	7	1	5	0	20	Диплом III ст.
Гусев Даниил	8	Дзержинск	7	6	0	7	0	20	Диплом III ст.
Горюнов Семен	8	Казань	7	5	0	7	0	19	Диплом III ст.
Краснов Дмитрий	8	Курган-8	7	7	0	5	0	19	Диплом III ст.
Кузнецов Ростислав	8	Киров-8-1	7	7	0	5	0	19	Диплом III ст.
Устинов Никита	8 (7)	Санкт-Петербург	6	5	4	4	0	19	Диплом III ст.
Гусев Антон	8	Омск	7	5	0	0	6	18	Диплом III ст.
Ефимов Максим	8	Курган-8	7	5	1	5	0	18	Диплом III ст.
Рожков Григорий	8	ЮМШ	7	7	0	0	4	18	Диплом III ст.
Смирнов Константин	8	ЮМШ	7	5	0	6	0	18	Диплом III ст.
Антропов Александр	8	Пермь146-8	7	3	7	0	0	17	ПГ
Лоскутников Станислав	8	Екатеринбург 9-8	7	5	0	5	0	17	ПГ
Бочкарев Михаил	8	Пермь-9-8-1	7	7	0	1	0	15	ПГ
Клепова Анна	8	Киров-8-2	7	7	1	0	0	15	ПГ
Лобастов Степан	8	Киров-8-1	7	7	1	0	0	15	ПГ
Василенко Артем	8	Омск	7	7	0	0	0	14	ПГ
Горбатов Антон	8	Снежинск I	6	3	5	0	0	14	ПГ
Золотов Алексей	8	ВолКИ	7	7	0	0	0	14	ПГ
Кожевников Роберт	8	Нижний Тагил	7	7	0	0	0	14	ПГ
Костарев Илья	8	ЮМШ	7	6	1	0	0	14	ПГ
Куркотов Олег	8	Наб.Челны-8	7	7	0	0	0	14	ПГ
Медведева Евгения	8	Школа Пифагора	1	7	6	0	0	14	ПГ
Мошкин Виталий	8	Магнитогорск 8	7	0	7	0	0	14	ПГ
Орлов Олег	8	Пермь146-8	7	7	0	0	0	14	ПГ
Пасынков Николай	8	Снежинск I	7	7	0	0	0	14	ПГ
Сафин Аскар	8	Казань	7	0	0	7	0	14	ПГ
Цой Валерия	8	Школа Пифагора	7	7	0	0	0	14	ПГ
Савенков Кирилл	8 (7)	Санкт-Петербург	7	0	0	7	0	14	ПГ
Тышук Константин	8 (7)	Санкт-Петербург	7	7	0	0	0	14	ПГ
Исаак Евгений	7	Курган	7	7	7	7	4	32	Диплом I ст.
Матдинов Марсель	7	Оренбург	7	6	2	0	7	22	Диплом III ст.
Бондаренко Михаил	7	Санкт-Петербург	7	7	0	7	0	21	Диплом III ст.
Кондаков Иван	7	Ярославль	7	7	7	0	0	21	Диплом III ст.
Майоров Михаил	7	Пермь	7	7	0	0	7	21	Диплом III ст.

Фамилия, имя, отчество	класс	команда	1	2	3	4	5	сумма	награда
Тарасов Артем	7	Киров	7	7	0	7	0	21	Диплом III ст.
Ладан Екатерина	7	Набережные Челны	7	6	7	0	0	20	Диплом III ст.
Меньщиков Андрей	7	Курган	7	7	5	0	0	19	Диплом III ст.
Сербина Дарья	7	Курган	7	7	4	0	0	18	Диплом III ст.
Островский Лев	7	Барнаул	7	7	3	0	0	17	ПГ
Рыков Андрей	7	Снежинск	7	7	2	0	0	16	ПГ
Коновалов Александр	7	Долгопрудный	7	6	2	0	0	15	ПГ
Михайлов Алексей	7	Челябинск	6	7	2	0	0	15	ПГ
Вотяков Александр	7	Ижевск	7	0	7	0	0	14	ПГ
Глазков Евгений	7	Озерск	7	7	0	0	0	14	ПГ
Ерохин Станислав	7	Санкт-Петербург	7	7	0	0	0	14	ПГ
Колупаев Александр	7	Киров	7	7	0	0	0	14	ПГ
Комаров Андрей	7	Пермь	7	7	0	0	0	14	ПГ
Павленко Роман	7	Набережные Челны	7	1	6	0	0	14	ПГ
Рыбак Андрей	7	Пермь	7	7	0	0	0	14	ПГ
Телешева Ольга	7	Набережные Челны	7	7	0	0	0	14	ПГ
Чулкова Мария	7	Пермь	7	0	7	0	0	14	ПГ
Костина Елена	7	Киров	7	1	6	0	0	14	ПГ
Попов Максим	7	Нижнекамск	7	7	0	0	0	14	ПГ
Степанов Борис	7	Екатеринбург	7	7	0	0	0	14	ПГ
Мингалеев Алмаз	7	Нижнекамск	7	6	0	0	0	13	ПГ
Пологова Анна	7	Ижевск	7	1	5	0	0	13	ПГ
Упоров Сергей	7	Курган	0	6	7	0	0	13	ПГ
Гуков Константин	7	Екатеринбург	7	0	5	0	0	12	ПГ
Куркотов Вадим	7	Набережные Челны	6	1	4	0	0	11	ПГ
Курносов Артем	7	Нижнекамск	7	0	4	0	0	11	ПГ
Ивкина Екатерина	6	Киров-6	7	7	7	7	0	28	Диплом I ст.
Фарафонов Геннадий	6	Екатеринбург 9-6	7	7	2	0	7	23	Диплом II ст.
Новиков Александр	6	Пермь-9-7-2	7	7	1	0	7	22	Диплом II ст.
Фоминых Сергей	6	"Ежики в тумане"	7	7	1	0	7	22	Диплом II ст.
Земцов Иван	6	Киров-6	7	7	7	0	0	21	Диплом II ст.
Ляховец Даниил	6	Екатеринбург 9-6	7	7	0	7	0	21	Диплом II ст.
Наполов Георгий	6	"Ежики в тумане"	7	7	5	0	0	19	Диплом III ст.
Красавина Варвара	6	"Ежики в тумане"	7	4	5	0	1	17	Диплом III ст.
Березин Роман	6	Курган-6	7	7	1	0	1	16	ПГ
Корчемкина Татьяна	6	Киров-6	7	7	1	0	1	16	ПГ
Паньков Александр	6	Пермь-9-7-1	7	7	1	0	1	16	ПГ
Гольцова Надежда	6	Магнитогорск 7-1	7	0	1	0	7	15	ПГ
Корчемкин Дмитрий	6	Киров-6	7	7	0	0	1	15	ПГ
Филимонов Иван	6	Красноярск I	7	7	0	0	1	15	ПГ
Циглер Александр	6	Магнитогорск 6	7	7	0	0	1	15	ПГ
Чугаева Валерия	6	Екатеринбург 9-6	7	7	0	0	1	15	ПГ
Тумынин Владимир	6 (5)	Киров	7	7	0	0	1	15	ПГ
Ануфриева Ксения	6	Нижнекамск-6	7	7	0	0	0	14	ПГ
Бесман Дмитрий	6	Курган-6	7	7	0	0	0	14	ПГ
Воинкова Юлия	6	Курган-6	7	7	0	0	0	14	ПГ
Голышев Виктор	6	Курган-6	7	7	0	0	0	14	ПГ

Фамилия, имя, отчество	класс	команда	1	2	3	4	5	сумма	награда
Ершов Никодим	6	"Ежики в тумане"	7	7	0	0	0	14	ПГ
Ивин Артем	6	Магнитогорск 6	7	7	0	0	0	14	ПГ
Новиков Вячеслав	6	Екатеринбург 9-6	7	7	0	0	0	14	ПГ
Павлик Никита	6	Магнитогорск 6	7	7	0	0	0	14	ПГ
Сафонов Вадим	6	Курган-6	7	7	0	0	0	14	ПГ
Сулимова Александра	6	Красноярск I	7	7	0	0	0	14	ПГ
Ячник Игорь	6	Киров-6	7	6	0	0	1	14	ПГ
Тарабарина Мария	6 (5)	Киров	7	7	0	0	0	14	ПГ
Фофанов Владислав	6 (5)	Киров	7	7	0	0	0	14	ПГ
Плужников Тимур	6	Красноярск I	5	7	0	0	0	12	ПГ

ПРАВИЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО БОЯ

Общие положения. Математический бой – это соревнование двух команд в решении математических задач. Он состоит из двух частей. Сначала команды получают условия задач и определенное время на их решение. При решении задач команда может использовать любую литературу, но не имеет права общаться по поводу решения задач ни с кем, кроме жюри. По истечении этого времени начинается собственно бой, когда команды в соответствии с правилами рассказывают друг другу решения задач. Если одна команда рассказывает решение, то другая оппонирует его, т.е. ищет в нем ошибки (недостатки), и, если решения нет, то, возможно, приводит свое. При этом выступления оппонента и докладчика оцениваются жюри в баллах (за решение и за оппонирование). Если команды, обсудив предложенное решение, все-таки до конца задачу не решили или не обнаружили допущенные ошибки, то часть баллов (или даже все баллы) может забрать себе жюри боя. Если по окончании боя результаты команд отличаются не более чем на 3 балла, то считается, что бой закончился вничью. В противном случае побеждает команда, которая по окончании боя набирает больше баллов. Если же по условиям боя он не может закончиться вничью, то жюри до боя объявляет это командам и оглашает процедуру определения победителя.

Капитаны команд имеют право попросить жюри о предоставлении перерыва в ходе боя на 5–10 минут (примерно через каждые полтора часа). Перерыв может предоставляться только между обсуждением двух различных задач (между раундами). При этом команда, которая должна сделать вызов, делает его в письменной форме (без оглашения) непосредственно перед началом перерыва и сдает жюри, которое оглашает этот вызов сразу после окончания перерыва.

Вызовы. Бой состоит из нескольких раундов. В начале каждого раунда (если не происходит отказ от вызова – см. ниже пункт “Окончание боя”) одна из команд *вызывает* другую на одну из задач, решения которых еще не рассказывались (например: “Мы вызываем команду соперников на задачу номер 8”). После этого вызванная команда сообщает, *принимает ли она вызов*, т.е. согласна ли рассказывать решение задачи, на которую была вызвана (ответ можно обдумывать, но не более 1 минуты). Если да, то она выставляет *докладчика*, который должен рассказать решение, а вызвавшая команда выставляет *оппонента*, обязанность которого – искать в решении ошибки. Если нет, то докладчика обязана выставить команда, которая вызывала, а отказавшаяся отвечать команда выставляет оппонента. Команда, желающая сохранить выходы к доске, может отказаться выставлять оппонента. Тогда она в этом раунде не участвует (и изменить своего решения уже не может).

Ход раунда. Доклад. В начале раунда докладчик рассказывает решение. Доклад должен содержать ответы на все поставленные в задаче вопросы и доказательство правильности и полноты полученных ответов. В частности, докладчик обязан доказать каждое сформулированное им промежуточное утверждение либо сослаться на него, как на общеизвестное. Докладчик должен стремиться к ясности изложения, в частности, он обязан повторить по просьбе оппонента или жюри любую часть своего доклада. Время на доклад ограничивается 15 минутами, после чего жюри решает, разрешать ли докладчику рассказывать дальше.

Докладчик может иметь при себе записи и заглядывать в них, но жюри имеет право запретить ему ими пользоваться, если сочтет, что докладчик читает решение по бумажке. В докладе нельзя ссылаться на вычисления, проведенные с помощью калькулятора или иной вычислительной техники и не подтвержденные иным способом.

Докладчик имеет право :

- до начала выступления вынести на доску всю необходимую информацию (чертежи, вычисления и т.п.);
- не отвечать на вопросы оппонента, заданные до начала обсуждения;
- просить оппонента уточнить свой вопрос (в частности, докладчик может предложить свою версию вопроса: “Правильно ли я понимаю, что вы спросили о том-то и том-то?”);
- отказаться отвечать на вопрос, сказав, что: (а) он не имеет ответа на этот вопрос; (б) он уже ответил на этот вопрос (объяснив, когда и как); (в) вопрос некорректен или выходит за рамки научной дискуссии по поставленной задаче. В случае несогласия оппонента с основаниями (б) и (в) арбитром выступает жюри.

Докладчик не обязан:

- излагать способ получения ответа, если он может доказать правильность и полноту ответа другим путем;
- сравнивать свой метод решения с другими возможными методами, в том числе с точки зрения краткости, красоты и пригодности для решения других задач.

Докладчик обязан рассказывать решение в вежливой, корректной форме, критикуя действия оппонента, не допускать критики его личности, обращаться к оппоненту только на “Вы”.

Оппонирование. Пока доклад не окончен, оппонент может задавать вопросы только с согласия докладчика, но имеет право просить повторения части решения и разрешать докладчику не доказывать какие-либо очевидные с точки зрения оппонента факты. После окончания доклада оппонент имеет право задавать вопросы докладчику. Если в течение минуты оппонент не задал ни одного вопроса, то считается, что у него нет вопросов. Если докладчик в течение минуты не начинает отвечать на вопрос, то считается, что у него нет ответа.

В качестве вопроса оппонент может :

- потребовать у докладчика повторить любую часть доклада;
- попросить уточнения любого из высказываний докладчика, в том числе: (а) попросить дать определение любого термина (“Что Вы понимаете под ...”); (б) переформулировать утверждение докладчика своими словами и попросить подтверждения (“Правильно ли я понимаю, что Вы утверждаете следующее: ...”);
- попросить докладчика доказать сформулированное тем неочевидное необщеизвестное утверждение (в спорных случаях вопрос об известности или очевидности решает жюри; во всяком случае, известными считаются факты, изучающиеся в общеобразовательной школе);
- после ответа на вопрос выразить удовлетворенность или мотивированную неудовлетворенность ответом.

Если оппонент считает, что докладчик тянет время, придумывая решение у доски, или что существенная часть доклада не является изложением решения обсуждаемой задачи, он имеет право (но не ранее, чем через 10 минут после начала доклада) попросить докладчика предъявить ответ (если таковой в задаче подразумевается) или план дальнейших рассуждений.

Оппонент обязан:

- формулировать свои вопросы в вежливой, корректной форме, обращаться к докладчику только на “Вы”;
- критикуя доклад, не допускать критики докладчика;
- повторять и уточнять свои вопросы по просьбе докладчика или жюри.

По итогам доклада и ответов на вопросы оппонент имеет право дать свою оценку докладу и обсуждению в одной из следующих форм: (а) признать решение правильным; (б) признать решение (ответ) в основном правильным, но имеющим недостатки и/или пробелы с обязательным их указанием; (в) признать решение (ответ) неправильным с указанием ошибок в обоснованиях ключевых утверждений доклада или контрпримеров к ним (или ответу), или указанием существенных пробелов в обоснованиях или плане решения. Если оппонент согласился с решением, он и его команда в этом раунде больше не участвуют.

Если оппонент имеет контрпример, опровергающий решение докладчика в целом, и этот контрпример сам является решением задачи (такое бывает, например, в случаях, когда вопрос задачи звучит как “Можно ли ...?”, “Верно ли, что ...?” и т.п.), то оппонент имеет право заявить: “Я с решением не согласен, у меня есть контрпример”, но сам контрпример пока докладчику не предъявлять (хотя жюри имеет право потребовать от оппонента предъявления контрпримера в письменном виде, чтобы убедиться в корректности заявления оппонента). В этом случае, если докладчик не изменит своего решения в течение минуты или после взятого командой перерыва, оппонент получает право предъявить докладчику упомянутый контрпример, причем докладчик и его команда уже не имеют права менять решение или ответ.

Аналогично, если решение требует перебора случаев, оппонент имеет право заявить “Я с решением не согласен, рассмотрены не все случаи”, не указывая пока докладчику явно, какой именно случай не рассмотрен. Дальнейшие действия докладчика, жюри и оппонента такие же, как в ситуации с контрпримером.

Участие жюри в обсуждении. После окончания диалога докладчика и оппонента жюри задает свои вопросы. При необходимости оно может вмешиваться и раньше.

Выступающие и команда. Докладчик и оппонент могут обращаться к своим капитанам с просьбой о замене или перерыве для консультации. Другое общение между командой и докладчиком (оппонентом) допускается только во время полуминутного перерыва, который любая команда может взять в любой момент (при этом соперники тоже могут пользоваться этим временем). Каждая команда может взять в течение одного боя не более 6 полуминутных перерывов (см. также ниже пункт “Число выходов к доске”). Команда имеет право полностью использовать полуминутный перерыв, взятый командой соперников, даже если та закончила его досрочно.

Перемена ролей. Некорректный вызов. Порядок вызовов. Если *по ходу дискуссии* жюри установило, что оппонент доказал отсутствие у докладчика решения и ранее не произошел отказ от вызова, то возможны два варианта. Если вызов на этот раунд был принят, то оппонент получает право (но не обязан) рассказать свое решение. Если оппонент взялся рассказывать свое решение, то происходит *полная перемена ролей*: бывший докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование. Если же вызов на этот раунд не был принят, то говорят, что вызов был *некорректным*. В этом случае перемены ролей не происходит, а команда, вызывавшая некорректно, должна снова вызывать соперника в следующем раунде. Во всех остальных случаях в следующем раунде вызывает та команда, которая была вызвана в текущем раунде.

Принятый вызов всегда считается корректным!

Если же оппонент не доказал, что у докладчика нет решения, но выявил в предложенном решении некоторые конкретные недостатки, то, если ранее не произошел отказ от вызова и вызов на этот раунд был принят, оппонент получает право (но не обязан) устраниТЬ все (или некоторые) из этих недостатков (“зАлатать дыры’’). Такое же право оппонент получает, если он доказал, что у докладчика нет решения, но отказался рассказывать собственное решение. Если оппонент взялся “зАлатывать дыры”, то происходит *частичная перемена ролей*: оппонент обязан сформулировать предварительно, что именно он будет делать (например, разбирать такой-то не разобранный докладчиком случай, доказывать такое-то недоказанное докладчиком утверждение или что-либо еще), а бывший докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование сформулированных утверждений. *При проверке корректности вызова частичная перемена ролей невозможна.*

Обратной перемены ролей ни в каком случае не происходит!

Число выходов к доске. Каждый член команды имеет право выйти к доске в качестве докладчика или оппонента не более двух раз за бой. Команда имеет право *не более трех раз за бой* заменять докладчика или оппонента, причем каждый раз выход засчитывается как тому, кого заменили, так и тому, кто вышел на замену. Кроме того, при замене время, отведенное команде на перерывы, уменьшается на 1 минуту (эту минуту можно использовать непосредственно перед заменой, а можно и не использовать – в последнем случае команда соперников тоже *не имеет права* пользоваться ею).

Отказ от вызова. Окончание боя. В любой момент боя команда, которая должна вызывать, может отказаться делать это (обычно это происходит, когда у команды больше нет решенных задач, если она не хочет делать вызов, который может оказаться некорректным). Тогда другая команда получает право (но не обязана) рассказывать решения оставшихся задач. При этом команда, отказавшаяся делать вызов, может выставлять оппонентов и получать баллы только за оппонирование, но рассказывать решения она уже не имеет права, даже если они у нее и появятся (то есть после отказа от вызова не происходит ни полной, ни частичной перемены ролей).

Бой заканчивается, когда не остается необсужденных задач либо когда одна из команд отказалась от вызова, а другая команда отказалась рассказывать решения оставшихся задач.

Первый вызов. Конкурс капитанов. Кто будет делать первый вызов, определяет команда, победившая в конкурсе капитанов. Он проводится в начале боя. Капитанам предлагается задача. Капитан, первым сообщивший жюри о своем желании отвечать, получает такое право. Если он рассказывает правильное решение, то он победил, а если неправильное – победил его соперник. При этом что понимается под “правильным решением”: просто верный ответ, ответ с объяснением или что-либо еще – жюри при необходимости уточняет перед началом конкурса капитанов.

На решение задачи конкурса капитанов жюри отводит определенное время. Если за это время ни один из капитанов не высказал желания отвечать, жюри может заменить задачу или выявить победителя жребием. Вместо задачи жюри может предложить капитанам сыграть в игру. В этом случае победителем считается тот, кто выигрывает игру. Возможны и другие схемы проведения конкурса капитанов. Жюри боя заранее определяет способ проведения конкурса капитанов и сообщает о нем командам перед началом боя.

При желании на конкурс вместо капитана можно выставить любого другого члена команды.

Начисление баллов. Каждая задача оценивается в 12 баллов, которые по итогам раунда распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри. Если докладчик, не опираясь существенно на наводящие вопросы и иные соображения жюри и/или оппонента, рассказал правильное и полное решение, все 12 баллов достаются ему. Если же в решении были выявлены “дыры” (пробелы), то жюри по окончании дискуссии определяет их стоимость. После этого оппонент, как правило, сразу получает половину стоимости *обнаруженных им* дыр. Если некоторые из этих “дыр” были в ходе дискуссии полностью или частично закрыты, соответствующая часть остатка их общей стоимости распределяется между докладчиком и оппонентом пропорционально их вкладу в закрытие “дыр”. При этом вкладом оппонента может признаваться не только закрытие им дыры (в случае полной или частичной перемены ролей), но и помочь докладчику в закрытии дыр путем высказанных *по окончании доклада* наводящих соображений. Все оставшиеся баллы жюри забирает себе.

Если не было полной перемены ролей, то оппонент не может получить больше 6 баллов.

Если ошибки или пробелы в докладе указаны самим докладчиком и не устраниены его командой, то оппонент получает за них баллы так, как если бы он сам нашел эти недостатки. В частности, если, получив отказ от вызова, капитан вызывающей команды сразу признается, что у его команды нет решения, то команда соперников получает 6 баллов за оппонирование (которое в этом случае могло бы состоять из одной фразы: “У Вас нет решения”), а вызов признается некорректным. Докладчик и оппонент в этом случае не назначаются и выходы к доске не засчитываются.

Капитан. Во время боя только капитан может от имени команды обращаться к жюри и соперникам: сообщать о вызове или отказе, просить перерыв и т.д. Он имеет право в любой момент прекратить доклад или оппонирование представителя своей команды. Если капитан у доски, он оставляет за себя заместителя, исполняющего в это время обязанности капитана. Имена капитана и заместителя сообщаются жюри до начала решения задач.

Во время решения задач главная обязанность капитана – координировать действия членов команды так, чтобы имеющимися силами решить как можно больше задач. Для этого капитан распределяет между членами команды задачи для решения (с учетом их пожеланий), следит, чтобы каждая задача кем-то решалась, организует проверку найденных решений. Капитан заранее выясняет, кто будет докладчиком или оппонентом по той или иной задаче и определяет всю тактику команды на предстоящем бою.

Жюри. Жюри является верховным толкователем правил боя. В случаях, не предусмотренных правилами, оно принимает решение по своему усмотрению. Решения жюри являются обязательными для команд.

Во время решения командами задач всякое существенное разъяснение условий задач, данное одной из команд, должно быть в кратчайшее время сообщено жюри всем остальным командам.

Жюри может снять вопрос оппонента (например, если он не по существу), прекратить доклад или оппонирование, если они затягиваются. Если жюри не может быстро разобраться в решении, оно может с согласия обоих капитанов выделить своего представителя, который продолжит обсуждение задачи совместно с докладчиком и оппонентом в другом помещении. При этом бой продолжается по другим задачам, а очки по этой задаче начисляются позже.

Жюри ведет протокол боя. Если одна из команд не согласна с принятым жюри решением по задаче, она имеет право немедленно потребовать перерыв на несколько минут для разбора ситуации с участием Старшего по лиге. После начала следующего раунда счет предыдущего раунда, как правило, изменен быть не может. Единственное исключение составляет случай, когда Старший по лиге по результатам разбора ситуации принимает решение поставить вопрос о ней на заседании Методической комиссии (МК) турнира. В этом случае МК должна принять решение по этому вопросу в тот же день. Вопрос о корректности вызова на заседание МК вынесен быть не может и должен разрешаться Старшим лиги на месте.

Жюри следит за порядком. Оно может оштрафовать команду за шум, некорректное поведение, общение со своим представителем, находящимся у доски.

Жюри обязано мотивировать свои решения, не вытекающие непосредственно из правил боя.

Зрители. За ходом боя могут с разрешения жюри наблюдать зрители: к ним относятся все, кроме членов играющих команд, жюри боя и методической комиссии турнира. Зрители не имеют права общаться с командами, вслух комментировать ход боя или иным образом мешать его проведению. Зрители, нарушающие эти правила, обязаны по решению жюри боя покинуть помещение, где он проходит.

ПРАВИЛА БЛИЦ-БОЯ.

1. Блиц-бой проводится для определения мест команд в случае равенства баллов в групповом турнире у двух или более команд, если (в случае двух команд) личная встреча между командами закончиласьничью, а также для определения победителя при ничейном исходе тех финальных боев, которые по регламенту не могут закончитьсяничью.
2. Командам выдается 8 задач на 25 минут.
3. Ответы сдаются в письменном виде.
4. За каждый верный ответ начисляется 3 очка, за каждый неверный снимается 1 очко.
5. Места команд определяются по сумме баллов. При равенстве сумм баллов места определяются по результатам в командной олимпиаде. Если и эти результаты равны, места определяются жребием.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2006

ВЫСШАЯ ЛИГА

1. На полке в беспорядке стоит 100-томная энциклопедия, один из томов которой — в красном переплете. Красный том можно поменять местами с любым другим. Какого наименьшего количества таких обменов заведомо хватит, чтобы расставить тома по порядку?

2. В последовательности натуральных чисел каждый член — точный квадрат, и каждый член, начиная со второго, больше предыдущего на простое число или на квадрат простого числа. Какое наибольшее количество членов в ней может быть?

3. Назовем натуральное число *убывающим*, если каждая его цифра, кроме первой, меньше или равна предыдущей. Например, числа 4221 и 751 — убывающие, а 476 и 455 — нет. Существует ли натуральное n такое, что число 16^n — убывающее?

4. 2006 школьников решали 6 задач. Оказалось, что в каждом трех работах можно найти решения по крайней мере 5 разных задач. Какое наименьшее количество решений могли сдать все школьники?

5. AB — большее, а CD — меньшее основание трапеции $ABCD$. Известно, что $BC = 2AD$ и сумма углов DAB и ABC равна 120° . Докажите, что угол DAB — прямой.

6. В треугольнике ABC $\angle ACB > \angle ABC$, биссектриса угла BAC пересекает BC в точке D , точка E на AB такова, что $\angle EDB = 90^\circ$, точка F на AC такова, что $\angle BED = \angle DEF$. Докажите, что $\angle BAD = \angle FDC$.

7. Каждое из положительных чисел x, y, z меньше 4. Докажите, что хотя бы одно из чисел $\frac{1}{x} + \frac{1}{4-y}, \frac{1}{y} + \frac{1}{4-z}, \frac{1}{z} + \frac{1}{4-x}$ не меньше 1.

8. Пусть p_n — n -е простое число, а $\pi(n)$ — количество простых чисел, не превосходящих n . Докажите, что каждое натуральное число представляется ровно в одном из видов $n+p_n-1$ или $n+\pi(n)$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2006

ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На полке в беспорядке стоит 100-томная энциклопедия, один из томов которой — в красном переплете. Красный том можно поменять местами с любым другим. Докажите, что не более, чем за 200 таких операций можно расставить тома по порядку.

2. В последовательности натуральных чисел каждый член — точный квадрат, и каждый член, начиная со второго, больше предыдущего на простое число или на квадрат простого числа. Докажите, что последовательность конечна, и определите, какое наибольшее количество членов в ней может быть.

3. Назовем натуральное число *убывающим*, если каждая его цифра, кроме первой, меньше или равна предыдущей. Например, числа 4221 и 751 — убывающие, а 476 и 455 — нет. Существует ли натуральное n такое, что число 16^n — убывающее?

4. Директор поручил Александру Владимировичу купить к Новому году 1 торт, 3 бутылки шампанского и 20 хрустальных фужеров. Вместо этого Александр Владимирович купил ровно на те же деньги 1 фужер, 3 торта и 20 бутылок шампанского. Известно, что торт дешевле бутылки шампанского. Что стоит дороже: бутылка шампанского или фужер?

5. AB — большее, а CD — меньшее основание трапеции $ABCD$. Известно, что $BC = 2AD$ и сумма углов DAB и ABC равна 120° . Докажите, что угол DAB — прямой.

6. В треугольнике ABC $\angle ACB > \angle ABC$, биссектриса угла BAC пересекает BC в точке D , точка E на AB такова, что $\angle EDB = 90^\circ$, точка F на AC такова, что $\angle BED = \angle DEF$. Докажите, что $\angle BAD = \angle FDC$.

7. Каждое из положительных чисел x, y меньше 4. Докажите, что хотя бы одно из чисел $\frac{1}{x} + \frac{1}{4-y}$ и $\frac{1}{y} + \frac{1}{4-x}$ не меньше 1.

8. Саша и Федя написали на 1000 карточках числа от 0 до 999, после чего разделили карточки между собой. Каждый из них выложил свои карточки в ряд и получил длинное число. Могут ли длинные числа у Саши и Феди совпасть?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2006

ВТОРАЯ ЛИГА

1. В последовательности натуральных чисел каждый член — точный квадрат, и каждый член, начиная со второго, больше предыдущего на простое число или на квадрат простого числа. Докажите, что последовательность конечна, и определите, какое наибольшее количество членов в ней может быть.

2. Каждое из положительных чисел x, y меньше 4. Докажите, что хотя бы одно из двух чисел $\frac{1}{x} + \frac{1}{4-y}$ и $\frac{1}{y} + \frac{1}{4-x}$ не меньше 1.

3. AB — большее, а CD — меньшее основание трапеции $ABCD$. Известно, что $BC = 2AD$ и сумма углов DAB и ABC равна 120° . Докажите, что угол DAB — прямой.

4. В треугольнике ABC $\angle ACB > \angle ABC$, биссектриса угла BAC пересекает BC в точке D . Точка E выбрана на стороне AB так, что $\angle EDB = 90^\circ$, а точка F выбрана на стороне AC так, что $\angle BED = \angle DEF$. Докажите, что $\angle BAD = \angle FDC$.

5. Из шести внешне неотличимых монет две фальшивые. Фальшивые монеты весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих. Как, проделав всего четыре взвешивания на чашечных весах без гирь и проанализировав их результаты, найти обе фальшивые монеты?

6. Три различных натуральных числа подобраны так, что сумма одного из них и произведения двух других в три раза больше того числа из этой тройки, которое является вторым по величине. Какие значения может принимать наименьшее из этих чисел?

7. 6 команд играют между собой чемпионат. В каждом туре встречаются какие-то 3 пары команд, не игравшие между собой ранее. В какой-то момент выяснилось, что очередной тур провести невозможно. Определите наименьший номер тура, в котором это могло произойти.

8. На карточках написаны все натуральные числа от 1 до 2006. Карточки расположены одна за другой в произвольном порядке. Разрешается поменять местами две карточки, если число, написанное на одной из них, делится на число, написанное на другой. Докажите, что карточки можно расположить в порядке возрастания.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2006

ВЫСШАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. В последовательности натуральных чисел каждый член — точный квадрат, и каждый член, начиная со второго, больше предыдущего на простое число или на квадрат простого числа. Докажите, что последовательность конечна, и определите, какое наибольшее количество членов в ней может быть.

2. Имеются четыре таймера. У одного промежуток между сигналами — 1 час, у другого — 2 часа, у третьего — 3 часа, у четвертого — 5 часов. Таймеры включили в случайно выбранные моменты (у каждого свой). Кот Васька уснул сразу после первого сигнала одночасового таймера и спал сутки, просыпаясь (и сразу засыпая снова) после каждого сигнала. Докажите, что ему не меньше шести раз удалось беспробудно проспать целый час.

3. Из шести внешне неотличимых монет две фальшивые (фальшивые монеты весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих). В нашем распоряжении имеются чашечные весы без гирь. Составьте план из четырех взвешиваний, позволяющий найти обе фальшивые монеты и определить, легче они или тяжелее, чем настоящие. Изменять план в зависимости от результатов предыдущих взвешиваний не разрешается.

4. На карточках записаны числа от 1 до 100. Карточки выложены одна за другой в произвольном порядке. Разрешается поменять местами две карточки, если число, написанное на одной из них, делится на число, написанное на другой. Докажите, что за 150 операций числа на карточках можно расположить в порядке возрастания.

5. Можно ли разрезать правильный 12-угольник на 6 одинаковых фигур, каждая из которых имеет ось симметрии, чтобы ни одна из осей симметрии этих фигур не проходила через центр 12-угольника?

6. Из каждого натурального числа, не превосходящего 9999, вычли сумму квадратов его цифр. Какая наибольшая разность может получиться?

7. Назовем натуральное число *убывающим*, если каждая его цифра, кроме первой, меньше или равна предыдущей. Например, числа 4221 и 751 — убывающие, а 476 и 455 — нет. Существует ли натуральное n такое, что число 16^n — убывающее?

8. В классе учатся 30 детей. В течение недели учительница поставила им в журнал несколько оценок по математике. В воскресенье оказалось, что у любых десяти детей вместе присутствуют все пять видов оценок (от 1 до 5). Какое наименьшее количество оценок могло быть выставлено в течение этой недели?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2006 **ПЕРВАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА**

1. Докажите, что $3^{40} + 12^{20} + 8^{26}$ — составное число.

2. Имеются четыре таймера. У одного промежуток между сигналами — 1 час, у другого — 2 часа, у третьего — 3 часа, у четвертого — 5 часов. Таймеры включили в случайно выбранные моменты (у каждого свой). Кот Васька уснул сразу после первого сигнала одночасового таймера и спал сутки, просыпаясь (и сразу засыпая снова) после каждого сигнала. Докажите, что ему не меньше четырех раз удалось беспробудно проспать целый час.

3. Из шести внешне неотличимых монет две фальшивые (фальшивые монеты весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих). В нашем распоряжении имеются чашечные весы без гирь. Составьте план из четырех взвешиваний, позволяющий найти обе фальшивые монеты и определить, легче они или тяжелее, чем настоящие. Изменять план в зависимости от результатов предыдущих взвешиваний не разрешается.

4. На карточках записаны числа от 1 до 2006. Карточки выложены одна за другой в произвольном порядке. Разрешается поменять местами две карточки, если число, написанное на одной из них, делится на число, написанное на другой. Докажите, что за несколько таких операций числа на карточках можно расположить в порядке возрастания.

5. На стороне AB взята такая точка D , что $BD = DC$ и $AD = AC$. Какое наименьшее значение может принимать самый большой угол треугольника ABC ?

6. 6 команд играют между собой чемпионат. В каждом туре встречаются какие-то 3 пары команд, не игравшие между собой ранее. В какой-то момент выяснилось, что очередной тур провести невозможно. Определите наименьший номер тура, в котором это могло произойти.

7. В деревне П живёт фермер Петров со своим котом Петькой, а в деревне В — фермер Васильев с котом Васькой. Однажды Петров с Петькой поехали в пункт В, а Васильев с Васькой одновременно — в пункт П. Когда они встретились, оказалось, что Петька съел в два раза больше пакетиков «Вискас», чем Васька. За всю дорогу между пунктами В и П пакетиков они съели поровну. К новому году фермеры подарили своих котов друг другу. Одиннадцатого января они снова выехали из своих деревень с котами. На этот раз за всю дорогу Васька съел 5 пакетиков «Вискас». Сколько пакетиков за всю дорогу съел Петька?

8. В классе учатся 30 детей. В течение недели учительница поставила им в журнал несколько оценок по математике. В воскресенье оказалось, что у любых десяти детей вместе присутствуют все пять видов оценок (от 1 до 5). Какое наименьшее количество оценок могло быть выставлено в течение этой недели?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2006
ВТОРАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Докажите, что $3^{40}+6^{20}+2^{38}$ — составное число.

2. Имеются три таймера. У одного промежуток между сигналами — 1 час, у второго — 2 часа, а у третьего — 2,5 часа. Таймеры включили в случайно выбранные моменты (у каждого — свой). Кот Васька уснул сразу после первого сигнала одночасового таймера и спал сутки, просыпаясь (и сразу засыпая снова) после каждого сигнала. Докажите, что ему хотя бы однажды удалось беспорубдно проспать целый час.

3. Из шести внешне неотличимых монет две фальшивые (фальшивые монеты весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих). В нашем распоряжении имеются чашечные весы без гирь. Как найти обе фальшивые монеты за четыре взвешивания?

4. На карточках записаны числа от 1 до 2006. Карточки выложены одна за другой в произвольном порядке. Разрешается поменять местами две карточки, если число, написанное на одной из них, делится на число, написанное на другой. Докажите, что за несколько таких операций числа на карточках можно расположить в порядке возрастания.

5. На стороне AB взята такая точка D , что $BD=DC$ и $AD=AC$. Какое наименьшее значение может принимать самый большой угол треугольника ABC ?

6. 6 команд играют между собой чемпионат. В каждом туре встречаются какие-то 3 пары команд, не игравшие между собой ранее. В какой-то момент выяснилось, что очередной тур провести невозможно. Докажите, что это могло произойти не ранее 4-го тура.

7. В деревне П живёт фермер Петров со своим котом Петькой, а в деревне В — фермер Васильев с котом Васькой. Однажды Петров с Петькой поехали в пункт В, а Васильев с Васькой одновременно — в пункт П. Когда они встретились, оказалось, что Петька съел в два раза больше пакетиков «Вискас», чем Васька. За всю дорогу между пунктами В и П пакетиков они съели поровну. К новому году фермеры подарили своих котов друг другу. Одиннадцатого января они снова выехали из своих деревень с котами. На этот раз за всю дорогу Васька съел 5 пакетиков «Вискас». Сколько пакетиков за всю дорогу съел Петька?

8. В классе учатся 30 детей. В течение недели учительница поставила им в журнал несколько оценок по математике. В воскресенье оказалось, что у любых десяти детей вместе присутствуют все пять видов оценок (от 1 до 5). Какое наименьшее количество оценок могло быть выставлено в течение этой недели?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2006

ЛИГА «СТАРТ»

1. Вдоль реки едет поезд и дует ветер. Анемометр на поезде показывает то же значение, что и на катере, плывущем по реке. Дым из заводской трубы обгоняет плывущий по течению реки листок на 3 м/с. Поезд обгоняет тот же листок на 20 м/с. Найдите скорость катера в стоячей воде. (Анемометр – это прибор, который позволяет измерить скорость окружающего его воздуха.)

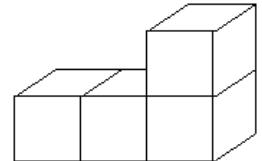
2. Число сложили с суммой его цифр, умноженной на 23. Могло ли в результате получиться 2006?

3. Из шести внешне неотличимых монет две фальшивые (фальшивые монеты весят одинаково, но неизвестно, легче или тяжелее настоящих). В нашем распоряжении имеются чашечные весы без гирь. Как за четыре взвешивания найти обе фальшивые монеты?

4. На карточках записаны числа от 1 до 2006. Карточки выложены одна за другой в произвольном порядке. Разрешается поменять местами две карточки, если число, написанное на одной из них, делится на число, написанное на другой. Докажите, что за несколько таких операций числа на карточках можно расположить в порядке возрастания.

5. Можно ли распилить куб с ребром 6 на фигуры такого вида (ребро маленького кубика равно 1)?

6. 14 команд играют между собой чемпионат – в каждом туре встречаются какие-то 7 пар команд, не игравшие между собой ранее. Докажите, что можно так провести первые 7 туров, что ни одного тура больше сыграть не удастся.



7. В деревне П живёт фермер Петров со своим котом Петькой, а в деревне В — фермер Васильев с котом Васькой. Однажды Петров с Петькой поехали в пункт В, а Васильев с Васькой одновременно — в пункт П. Когда они встретились, оказалось, что Петька съел в два раза больше пакетиков «Вискас», чем Васька. За всю дорогу между пунктами В и П пакетиков они съели поровну. К новому году фермеры подарили своих котов друг другу. Одиннадцатого января они снова выехали из своих деревень с котами. На этот раз за всю дорогу Васька съел 5 пакетиков «Вискас». Сколько пакетиков за всю дорогу съел Петька?

8. В классе учатся 30 детей. В течение недели учительница поставила им в журнал несколько оценок по математике. В воскресенье оказалось, что у любых десяти детей вместе присутствуют все пять видов оценок (от 1 до 5). Какое наименьшее количество оценок могло быть выставлено в течение этой недели?

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ ДЛЯ ЖЮРИ, 1 ТУР. ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Ответ: 148. Решение. *Пример на 148.* Построим ориентированный граф, вершинами которого будут числа от 1 до 100, а каждое из ребер связывает номер места, на котором стоит том с данным номером, с самим этим номером. Поскольку из каждой вершины этого графа выходит ровно одно ребро, и в каждую его вершину входит ровно одно ребро, все его вершины и ребра разбиваются на непересекающиеся ориентированные циклы. Цикл, в который входит красный том, назовем *особым*, прочие — *обычными*. Возьмем любой обычный цикл $a \rightarrow b \rightarrow \dots \rightarrow c \rightarrow \dots \rightarrow d \rightarrow a$ и добавим в него красный том (пусть его номер равен r): $a \rightarrow r \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow \dots \rightarrow d \rightarrow a$. Затем последовательно поменяем местами красный том со всеми остальными элементами получившегося цикла. В итоге все элементы исходного обычного цикла встанут на предписанные им места, а красный том вернется на исходное место. Проделаем описанную процедуру со всеми обычными циклами длины, не меньшей 2, а напоследок «прокрутим» особый цикл, после чего все тома окажутся на своих местах, т.е. будут идти в порядке возрастания. При этом на приведение в порядок каждого цикла длины n , кроме особого, у нас ушла $n+1$ перестановка, а на особый цикл — $n-1$ перестановка, а всего — $100+k-2$ перестановки, где k — число циклов длины не меньше 2. Поскольку циклов длины 2 и больше не более 50, мы совершили не больше 148 перестановок. Оценка. Пусть получилось 50 циклов длины 2. На приведение в порядок каждого обычного цикла

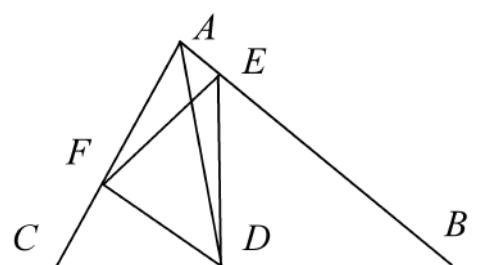
нужно минимум 3 перестановки: убрать один том, поставить на его место другой и поставить на место другого первый. Еще одна перестановка нужна на особый цикл. Итого $49 \times 3 + 1 = 148$. ♦
 Пример — из 4 баллов, оценка — из 6 баллов; если нет примера, задача считается нерешенной.

2. Ответ: 7 членов. **Решение.** Пусть a и b — два соседних члена нашей последовательности ($a > b$). По условию разность $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ равняется простому числу p или квадрату простого числа p^2 . В первом случае одна из скобок равна p , и это $a+b$, потому что она больше. В втором случае обе скобки не могут равняться p , поэтому $a+b = p^2$. В обоих случаях $a-b=1$, то есть $a=b+1$. Стало быть, наша последовательность состоит из квадратов последовательных натуральных чисел. Пусть n^2 — первый из них. Тогда разности между соседними членами последовательности равны $2n+1, 2n+3, 2n+5, 2n+7$ и т.д. Поскольку каждая из этих разностей больше предыдущей на 2, среди любых трех разностей, идущих подряд, встретится делящаяся на 3. Условию задачи она будет удовлетворять только если она равна 3 или 9. Таким образом, если среди разностей нет тройки или девятки, их не больше пяти, и в нашей последовательности не больше 6 членов. Если же среди разностей есть и 3, и 9, то $n=1$, и в максимально длинной последовательности 7 членов: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49. ♦ **Ответ без обоснования — 0.** Только обоснование того, что последовательность состоит из квадратов последовательных натуральных чисел — из 4 баллов.

3. Ответ: Нет. **Решение.** Всякая степень числа 16 оканчивается на 6, а цифра десятков повторяется циклически: $1 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 1$. Если перед шестеркой в убывающем числе идет девятка, то число имеет вид $99\dots 96 = 10^k - 4$ и не может быть степенью числа 16, потому что не делится на 8. Если же убывающая степень числа 16 оканчивается на 76, то для того, чтобы она делилась на 8, надо, чтобы цифра сотен была 7 или 9. Второе не годится (число $99\dots 976$ не делится на 16). Значит, наша степень оканчивается на 776. Чтобы она делилась на 16, снова нужно, чтобы предыдущая цифра была 7 или 9. В случае 9776 число имеет вид $9\dots 9776$ и дает при делении на 3 остаток 2, а любая степень числа 16 остаток 1. Рассмотрим случай 7776. Поскольку число 7776 делится на 32 и не является степенью числа 16, цифра десятков тысяч должна быть четной, то есть равной 8. Число, оканчивающееся на 87776, делится на 32, но не делится на 64. Поэтому цифра сотен тысяч в нем должна быть нечетной, то есть равной 9, и все идущие перед ней — тоже. Но число вида $9\dots 987776$ не может быть степенью числа 16, поскольку при делении на 3 дает остаток 2. ♦ **Неполный перебор возможностей — не больше 4 баллов.**

4. Ответ: 10000. **Решение.** Рассмотрим какие-нибудь две задачи. Легко видеть, что не решить обе ("игнорировать эту пару задач") могли максимум два школьника (если таких найдется три, то эта тройка не будет удовлетворять условию задачи). Поскольку всего пар задач 15, общее количество пар задач, проигнорированных школьниками, не более $15 \times 2 = 30$. Если школьник не решил $k+1$ задачу ($k \geq 1$), скажем, что у него k сверхнормативных нерешенных задач. Легко видеть, что такой школьник проигнорировал не менее k пар задач. Поэтому общее количество сверхнормативных нерешенных задач не больше общего количества проигнорированных пар, то есть 30. Поэтому общее количество решений не меньше, чем $2006 \times 5 - 30 = 10000$. Пример с 10000 решениями строится так: для каждой пары задач назначаем двух школьников, которые решили все задачи, кроме этих двух, а остальным 1976 школьникам поручаем решить любые 5 из них. ♦ **Только оценка — из 4 баллов.** Только пример из 4 баллов. Подсчет количества пар нерешенных задач без учета того, что один школьник может проигнорировать несколько пар — дыра в 4 балла, задача решена.

5. Отметим на отрезке AB такую точку K , что $BK = CD$. Тогда $BCDK$ — параллелограмм. Следовательно, $DK = 2AD$ и $\angle ADK = 180^\circ - \angle DAK - \angle DKA = 180^\circ - \angle DAK - \angle ABC = 60^\circ$. Поэтому треугольник ADK — прямоугольный с прямым углом $\angle DAK$. Следовательно $\angle DAB = 90^\circ$. ♦ **Подчеркнутый в решении вывод опирается на следующее утверждение: если в**



треугольнике с углом в 60° сторона, лежащая против другого угла, вдвое короче стороны, лежащей против третьего угла, то третий угол — прямой. Доказывать это утверждение не требуется, но оно должно быть четко сформулировано докладчиком. Если он вместе него сослался на обратное утверждение (про катет вдвое короче гипотенузы), это дыра в 4 балла.

6. Поскольку в треугольнике AEC AD — биссектриса внутреннего угла, а ED — биссектриса внешнего угла, FD — также биссектриса внешнего угла, то есть $\angle CFD = \angle EFD$. Тогда $\angle FDC = 90^\circ - \angle FDE = \angle DFE + \angle DEF - 90^\circ = (180^\circ - \angle AFE)/2 + (180^\circ - \angle AEF)/2 - 90^\circ = \angle FAE/2 = \angle BAD$.

7. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим имеем: $\frac{1}{x} + \frac{1}{4-y} \geq \frac{2}{\sqrt{x(4-y)}}$. Отсюда следует, что произведение трех дробей из условия задачи не меньше, чем $\frac{8}{\sqrt{x(4-x)y(4-y)z(4-z)}} \geq 1$, поскольку $x(4-x) \leq 4$. Стало быть, хотя бы одна из них не меньше 1.

8. Посмотрим, как меняется сумма $n+\pi(n)$ с ростом n . При переходе к составному числу она увеличивается на 1, при переходе к простому — на 2. Поскольку $\pi(p_n) = n$, образующаяся при этом в ряду значений функции $n+\pi(n)$ «дырка» как раз закрывается числом $n+p_n-1$. ♦ *Слушать очень внимательно, решение легко «ускользает»!*

ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Поставим на место сотый том. Для этого сначала поменяем местами красный том с томом, стоящим на последнем месте, а потом сотый том с красным. Таким же образом отправим на свои места все остальные тома. Когда все они окажутся на своих местах, красный том автоматически окажется на своем, и уйдет на все это 198 перестановок.

2. Задача 2 высшей лиги.

3. Задача 3 высшей лиги.

4. Ответ: Бутылка. Решение. По условию $T+3B+20F = F+3T+20B$, откуда $19F = 2T+17B < 19B$.

5. Задача 5 высшей лиги.

6. Задача 6 высшей лиги.

7. Упрощение задачи 7 высшей лиги. Решение аналогично.

8. Ответ: Нет. Решение. Пусть кому-то досталось число 100. Тогда другому, чтобы получить в своем длинном числе комбинацию 100, придется использовать число, кончающееся на 10 и нуль. Но тогда комбинацию 200 уже не получить.

ВТОРАЯ ЛИГА

1. Задача 2 высшей лиги.

2. Упрощение задачи 7 высшей лиги. Решение аналогично.

3. Задача 5 высшей лиги.

4. Задача 6 высшей лиги.

5. Разобьем монеты на три пары. При этом фальшивые монеты попадут в одну пару или в разные, но в обоих случаях две пары будут весить одинаково, а третья будет отличаться от них по весу. Сравнив за два взвешивания одну из пар с двумя другими, мы найдем две пары одного веса. Назовем их «первая» и «вторая». Третьим взвешиванием сравним две монеты первой пары. Если их веса равны, все монеты в равных по весу парах — настоящие, а обе фальшивые монеты — в третьей паре. Последним взвешиванием сравниваем настоящую монету с фальшивой и узнаем,

какая тяжелее. Если при третьем взвешивании веса двух монет различны, то первая и вторая пары состоят из настоящей и фальшивой монеты, а в третьей паре обе монеты — настоящие. При этом мы уже сравнивали одну из двух первых пар с третьей и потому знаем, как соотносятся веса настоящей и фальшивой монет. Поэтому мы можем сказать, какая из монет в первой паре — фальшивая, а сравнив четвертым взвешиванием монеты второй пары, найдем и вторую фальшивую.

6. Ответ: 1. Решение. Пусть $a > b > c$ — данные числа. По условию либо $a+bc = 3b$, либо $b+ac = 3b$, либо $c+ab = 3b$. В первом случае $a = b(3-c)$, откуда $c = 1$, потому что иначе $a \leq b$. Во втором случае $ac = 2b$, и снова $c = 1$ по той же причине. В третьем случае $c = b(3-a) \Rightarrow a \leq 2$, что невозможно. ♦ *Ответ без всякого обоснования — 0. За пример 1, x, 2x (в общем виде) — 2 балла. Разобраны не все случаи — не выше 6 баллов, задача не решена.*

7. Ответ: В 4 туре. Решение. Очевидно, что 2 тура провести удастся. После 2 тура каждая команда сыграла по 2 матча с двумя разными командами. Как хорошо известно (на бое это, конечно, надо будет доказывать), граф сыгранных игр в этом случае представляет собой набор непересекающихся циклов четной длины, большей 2. В нашем случае это означает, что граф является циклом длины 6. Занумеруем команды по циклу и сведем в третьем туре команду 1 с командой 4, 2 — с 5, 3 — с 6. После этого граф *несыгранных* матчей будет состоять из двух циклов длины 3 и 4 тура окажется невозможным. ♦ *Ответ без всякого обоснования — 0. Только оценка или только пример — из 4 баллов.*

8. Решается аналогично задаче 1 первой лиги.

ВЫСШАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

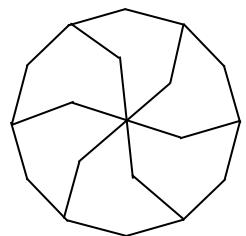
1. Задача 2 высшей лиги.

2. Сутки сигналами часового таймера разделены на 24 промежутка по часу. Назовем такой промежуток *испорченным*, если в течении него (не в начале и не в конце) сработал один из трех других таймеров. Возьмем шесть часов подряд. Двухчасовой таймер портит три из них, трехчасовой — два, и один они портят вместе. Значит, два промежутка из шести останутся неиспорченными, и в течение суток эта пара промежутков будет повторяться с периодом 6 часов. Осталось заметить, что из четырех идущих подряд с периодом 6 промежутков пятичасовой таймер сможет испортить не больше одного.

♦ *Доказано только существование неиспорченных промежутков, но не доказано, что их минимум 6 — 2 балла.*

3. Пронумеруем монеты. Первым взвешиванием сравним 1 с 2, вторым — 1 с 3, третьим 4 с 5, четвертым — 4 с 6. Рассмотрим два возможных случая. 1 случай: либо оба первых взвешивания, либо оба вторых дали равновесие. Тогда в той группе монет (1, 2, 3 или 4, 5, 6), где было два равновесия, все три монеты настоящие, а обе фальшивые — в другой группе. Если там оба взвешивания не дали равновесия, монета, которую взвешивали с двумя другими, — настоящая, а две другие — фальшивые, причем из результатов взвешиваний известно, легче они или тяжелее настоящей. Если же одно из взвешиваний там дало равновесие, то обе монеты в нем — фальшивые, а второе взвешивание в этой группе показывает, легче фальшивая монета или тяжелее. 2 случай: и среди двух первых, и среди двух вторых взвешиваний есть такие, в которых одна из монет перевесила. Тут в каждой группе по одной фальшивой монете. Эта ситуация аналогична уже разобранной в первом случае. ♦ *Бывают и другие верные планы. Но внимательно следите за тем, чтобы план не зависел от результатов взвешиваний.*

4. Построим ориентированный граф, вершинами которого будут числа от 1 до 100, а каждое из ребер связывает номер места, на котором стоит какое-то число, с самим этим числом. Поскольку из каждой вершины этого графа выходит ровно одно ребро, и в каждую его вершину входит ровно одно ребро, все его вершины и ребра разбиваются на непересекающиеся ориентированные циклы. Цикл, в который входит единица, назовем *особым*, прочие — *обычными*. Возьмем любой обычный цикл $a \rightarrow b \rightarrow \dots \rightarrow c \rightarrow \dots \rightarrow d \rightarrow a$



и добавим в него единицу: $a \rightarrow 1 \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow \dots \rightarrow d \rightarrow a$. Затем последовательно поменяем местами единицу со всеми остальными элементами получившегося цикла. В итоге все элементы исходного обычного цикла встанут на предписанные им места, а единица вернется на исходное место. Проделаем описанную процедуру со всеми обычными циклами длины, не меньшей 2, а напоследок «прокрутим» особый цикл, после чего все числа окажутся на своих местах, т.е. будут идти в порядке возрастания. При этом на приведение в порядок каждого цикла длины n у нас ушло не более $n+1$ перестановки. Поскольку циклов длины 2 и больше не более 50, мы совершили не больше 150 перестановок. ♦ Усиление результата см. в решении задачи 2 высшей лиги.

5. Ответ: Да. Решение. См рисунок справа. Все стороны каждого из невыпуклых шестиугольников равны между собой, а углы составляют (по порядку) $210^\circ, 60^\circ, 150^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 60^\circ$. Ось симметрии проходит через вершины углов в 210° и 90° . ♦ *От участников, разумеется, потребуется обоснование симметричности шестиугольников. Его отсутствие, при условии, что картинка исчерпывающе описана — дыра в 4 балла, и задача решена. Если есть про рисунок, но из решения неясно, как ее однозначно построить — 4 балла и задача не решена.*

6. Ответ: $9000 - 81 + 900 - 81 + 50 - 25 + 0 = 9763$. Решение. Пусть в числе a тысяч, b сотен, c десятков и d единиц ($0 \leq a, b, c, d \leq 9$). Тогда разность числа и суммы квадратов его цифр равна $(1000a-a^2)+(100b-b^2)+(10c-c^2)+(d-d^2)$. Первые две скобки максимальны при $a=b=9$ (при других a или b первая меньше 8000, а вторая — меньше 800), третья — при $c=5$ (проверяется хотя бы перебором), четвертая — при $d=0$ или 1. Отсюда ответ. ♦ *Только ответ — 2 балла.*

7. Задача 3 высшей лиги.

8. Ответ: 110. Решение. Чтобы в каждой группе из 10 учеников оказался школьник, получивший единицу, единицы должен получить по крайней мере 21 ученик. То же касается и остальных оценок. Поэтому каждая из пяти оценок выставлялась не меньше 21 раза, и всего их было поставлено не меньше 110. Пример на 110: каждая оценка выставлена 21 произвольному школьнику. ♦ *Только ответ — 2. Оценка без примера — 6 баллов и задача не решена. Ответ с примером без оценки — 4 балла.*

ПЕРВАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. $3^{40} + 12^{20} + 8^{26} = (3^{20})^2 + 2 \cdot 3^{20} \cdot 2^{39} + (2^{39})^2 = (3^{20} + 2^{39})^2$.

2. Сутки сигналами часового таймера разделены на 24 промежутка по часу. Назовем такой промежуток *испорченным*, если в течении него (не в начале и не в конце) сработал один из трех других таймеров. Возьмем шесть часов подряд. Двухчасовой таймер портит три из них, трехчасовой — два, и один они портят вместе. Значит, два промежутка из шести останутся неиспорченными, причем между ними — нечетное число промежутков. Поэтому пятичасовой таймер сможет испортить не больше одного из них. Поскольку в течение суток эта пара промежутков будет повторяться с периодом 6 часов, за сутки наберется по крайней мере 4 неиспорченных промежутка. ♦ *Доказано только существование неиспорченных промежутков, но не доказано, что их минимум 4 — 2 балла.*

3. Задача 3 высшей юниорской лиги.

4. Решается аналогично задаче 1 первой лиги.

5. Ответ: $540^\circ/7$. Решение. Пусть угол при вершине B равен x . Тогда $\angle BCD = \angle BDC = x$, $\angle ACD = \angle ADC = 2x$, откуда получается, что угол при вершине C равен $3x$, а угол при вершине A равен $180^\circ - 4x$. Наибольший угол треугольника ABC равен, очевидно, наибольшему из чисел $3x$ и $180^\circ - 4x$. Заметим, что $3x = 180^\circ - 4x$ при $x = 180^\circ/7$, и при этом $3x = 540^\circ/7$. При $x < 180^\circ/7$ $180^\circ - 4x > 540^\circ/7$, а при $x > 180^\circ/7$ $3x > 540^\circ/7$. Отсюда — ответ. ♦ *Ответ без обоснования — 6 баллов, и задача не решена.*

6. Задача 7 второй лиги.

7. Ответ: 20 пакетиков. Решение. Поскольку в первый раз фермеры до места встречи ехали одно и то же время, Васька ест «Вискас» вдвое быстрее, чем Петьяка. Поскольку в первый раз они съели «Вискаса» поровну, Васильев едет вдвое быстрее Петрова. Во второй раз Петьяка ехал вдвое быстрее, чем в первый, и потому съел вдвое меньше «Вискаса», а Васька ехал вдвое медленнее, и потому съел «Вискаса» вдвое больше. Отсюда — ответ. ♦ *Ответ без обоснования* — 2 балла.

8. Задача 8 высшей юниорской лиги.

ВТОРАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. $3^{40}+6^{20}+2^{38} = (3^{20})^2 + 2 \cdot 3^{20} \cdot 2^{19} + (2^{19})^2 = (3^{20}+2^{19})^2$.

2. Сутки сигналами часового таймера разделены на 24 промежутка по часу. Назовем такой промежуток *испорченным*, если в течении него (не в начале и не в конце) сработал один из трех других таймеров. Двухчасовой таймер портит каждый второй промежуток, то есть 12 промежутков за сутки, а 2,5-часовой может испортить за сутки не больше 10 промежутков, потому что $2,5 \times 10 > 24$. Значит, останется даже два промежутка, когда Васькин сон ничто не потревожит.

3. Задача 5 второй лиги.

4. Решается аналогично задаче 1 первой лиги.

5. Задача 5 первой юниорской лиги.

6. Показано в решении задачи 7 второй лиги.

7. Задача 7 первой юниорской лиги.

8. Задача 8 высшей юниорской лиги.

ЛИГА «СТАРТ»

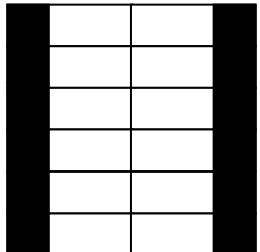
1. Ответ: 20 м/с или 14 м/с. Решение. Из условия следует, что направления движения поезда, течения реки и скорости ветра совпадают. Но неизвестно, в каком направлении плывёт катер. Рассмотрим два случая. Пусть сперва катер движется по течению. Обозначим соответствующие скорости через Π , T , K и B . Тогда получаем: $B-T=3$, $\Pi-T=20$, $\Pi-B=K+T-B$. Отсюда видно, что $K=20$. Теперь рассмотрим ситуацию, когда катер движется против течения. Равенства принимают вид: $B-T=3$, $\Pi-T=20$, $\Pi-B=K-T+B$. Отсюда находим $K=\Pi+T-2B=14$. ♦ *Потерян один из ответов — не более 6 баллов, и задача не решена. За вычислительные ошибки при верно ходе решения снимается до 4 баллов.*

2. Ответ: Нет. Решение. Как известно, число и сумма его цифр имеют одинаковые остатки при делении на 3. Поэтому сумма из условия задачи делится на 3, а число 2006 на 3 не делится. ♦ *Обоснования признака делимости не требуется.*

3. Задача 5 второй лиги.

4. Решается аналогично задаче 1 первой лиги.

5. Ответ: Да. Решение. Сложим слой $6 \times 6 \times 1$ из 12 параллелепипедов $3 \times 1 \times 1$ как показано на рисунке справа (вид сверху). Затем прикрепим к каждому параллелепипеду сверху кубик с ребром 1 по закрашенному на рисунке квадрату. Получится 12 фигурок из условия задачи. Оставшийся пустым во втором слое $6 \times 6 \times 1$ параллелепипед $6 \times 4 \times 1$ заполним склеенными из двух фигурок параллелепипедами $4 \times 2 \times 1$. Мы собрали из наших фигурок слой $6 \times 6 \times 2$. Из трех таких слоев можно сложить куб $6 \times 6 \times 6$.



6. Разобьем команды на две группы по 7 команд. Очевидно, можно провести первые семь туров так, чтобы каждая команда из одной группы сыграла с каждой командой из другой. После этого все матчи должны происходить внутри групп, а 7 команд разбить на пары невозможно.

7. Задача 7 первой юниорской лиги.

8. Задача 8 высшей юниорской лиги.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2006

ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Пусть $n > 10$ — натуральное число. Докажите, что среди чисел, меньших, чем 10^n , чисел с суммой цифр $9(n-2)$ больше, чем чисел с суммой цифр $9(n-1)$.

2. Рассмотрим таблицу из n строчек и 4 столбцов. Во всех клетках первой строки стоят нули. Каждая строчка, начиная со второй, строится по такому правилу: в одну из клеток вписывается такое же число, какое стоит в клетке над ней, а в каждой из остальных клеток пишется число 1, если над ней стоит число 0, число 2, если над ней стоит число 1, и число 0, если над ней стоит число 2. Все строки таблицы различны. Для какого наибольшего n можно построить такую таблицу?

3. Докажите, что существует бесконечно много троек целых чисел (a, b, c) , удовлетворяющих уравнению $2a^2+3b^2-5c^2 = 2005$.

4. Докажите, что для произвольного треугольника со сторонами x, y, z и произвольных чисел a, b, c , сумма любых двух из которых положительна, справедливо неравенство $ax+by+cz > 0$.

5. В остроугольном треугольнике ABC угол A больше 45° , CD и BE — биссектрисы. Докажите, что $CD+BE > BD+DE+EC$.

6. В треугольнике ABC точка S — центр тяжести, F — середина AB . Для точки P внутри отрезка AF рассмотрим точку Q на прямой PS , для которой QC и AB параллельны. Пусть R — точка пересечения прямых QA и BC . Докажите, что отрезок PR делит площадь треугольника ABC пополам.

7. В каждой вершине десятиугольника лежит некоторое количество фишек (возможно, ни одной). Разрешается убрать из одной вершины любое количество фишек и добавить вдвое больше количество фишек в любую из двух соседних вершин. Пусть в начале в одной вершине одна фишечка, а в остальных вершинах фишечек нет. Можно ли с помощью разрешенных операций добиться того, чтобы во всех вершинах оказалось поровну фишечек?

8. Вычислите сумму $\frac{x_0^3}{3x_0^2 - 3x_0 + 1} + \frac{x_1^3}{3x_1^2 - 3x_1 + 1} + \dots + \frac{x_{101}^3}{3x_{101}^2 - 3x_{101} + 1}$, где $x_i = \frac{i}{101}$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2006

ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Пусть $n > 10$ — натуральное число. Докажите, что среди чисел, меньших, чем 10^n , чисел с суммой цифр $9(n-2)$ больше, чем чисел с суммой цифр $9(n-1)$.

2. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle BCD = 78^\circ$, $\angle CAB = \angle CBA$, и $AB = 2AD$. Найдите $\angle CAD$.

3. 16-значное число a делится на 999 999 999. Докажите, что никакое число, которое можно получить из a перестановкой цифр, не может делиться на 100 000 001.

4. Докажите, что для произвольного треугольника со сторонами x, y, z и произвольных чисел a, b, c , сумма любых двух из которых положительна, справедливо неравенство $ax+by+cz > 0$.

5. В треугольнике ABC угол A — тупой, D — произвольная точка на стороне AB , E — произвольная точка на стороне AC . Докажите, что $CD+BE > BD+DE+EC$.

6. Дед Мороз подарил каждому из 102 детей по 100 конфет. Конфеты бывают трех видов: красные, синие и зеленые. Докажите, что найдутся двое, чьи наборы конфет либо полностью одинаковы, либо полностью различны. (Два набора конфет считаются полностью одинаковыми, если в них поровну конфет каждого вида, и полностью различными, если никакого вида конфет в них не поровну.)

7. В каждой вершине шестиугольника лежит некоторое количество фишек (возможно, ни одной). Разрешается убрать из одной вершины любое количество фишек и добавить в шестеро большее количество фишек в любую из двух соседних вершин. Пусть в начале в одной вершине одна фишка, а в остальных вершинах фишек нет. Можно ли с помощью разрешенных операций добиться того, чтобы во всех вершинах оказалось поровну фишек?

8. Вычислите сумму $\frac{x_0^3}{3x_0^2 - 3x_0 + 1} + \frac{x_1^3}{3x_1^2 - 3x_1 + 1} + \dots + \frac{x_{101}^3}{3x_{101}^2 - 3x_{101} + 1}$, где $x_i = \frac{i}{101}$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.2006

ВТОРАЯ ЛИГА

1. Пусть $n > 10$ — натуральное число. Докажите, что среди чисел, меньших чем 10^n , чисел с суммой цифр $9(n-2)$ больше, чем чисел с суммой цифр $9(n-1)$.

2. Докажите, что для произвольного треугольника со сторонами x, y, z и произвольных чисел a, b, c , сумма любых двух из которых положительна, справедливо неравенство $ax+by+cz > 0$.

2. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle BCD = 78^\circ$, $\angle CAB = \angle CBA$, и $AB = 2AD$. Найдите $\angle CAD$.

4. В вершинах квадрата стоят числа: три нуля и единица. Можно вычертить из любого числа единицу, одновременно прибавляя шестёрку к числу, написанному в одной из соседних вершин. Можно ли сделать все числа равными?

5. В треугольнике ABC угол A — тупой, D — произвольная точка на стороне AB , E — произвольная точка на стороне AC . Докажите, что $CD+BE > BD+DE+EC$.

6. Вычислите сумму $\frac{x_0^3}{3x_0^2 - 3x_0 + 1} + \frac{x_1^3}{3x_1^2 - 3x_1 + 1} + \dots + \frac{x_{101}^3}{3x_{101}^2 - 3x_{101} + 1}$, где $x_i = \frac{i}{101}$.

7. В парламент прошли 99 представителей двух партий: «красные» и «синие». На первом заседании парламента каждый депутат сделал следующее заявление: «в парламенте представители моей партии составляют большинство». Известно, что каждый красный говорит правду, если перед ним выступает синий, и обманывает, если перед ним выступает однопартиец. А каждый синий, наоборот, говорит правду после однопартийца, и обманывает после человека из чужой партии. К какой партии принадлежал первый выступавший? (В парламенте присутствуют представители обеих партий и выступают по одному.)

8. Делитель натурального числа называется собственным, если он не равен этому числу и единице. Натуральное число называется редким, если самый большой из его собственных

делителей равен произведению самого маленького на следующий по величине. Сколько редких чисел оканчивается цифрой 5?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2006

ВЫСШАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Пусть $n > 10$ — натуральное число. Докажите, что среди чисел, меньших чем 10^n , чисел с суммой цифр $9(n-2)$ больше, чем чисел с суммой цифр $9(n-1)$.

2. Докажите, что для произвольного треугольника со сторонами x, y, z и произвольных чисел a, b, c , сумма любых двух из которых положительна, справедливо неравенство $ax+by+cz > 0$.

3. В каждой клетке квадрата 101×101 стоит одно из натуральных чисел от 1 до 101. При этом в каждой строке, в каждом столбце и в каждой из двух больших диагоналей все числа различны. Докажите, что на 100 клетках, стоящих под диагональю, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, не может быть 99 совпадающих чисел.

4. В парламент прошли 99 представителей двух партий: «красные» и «синие». На первом заседании парламента каждый депутат сделал следующее заявление: «в парламенте представители моей партии составляют большинство». Известно, что каждый красный говорит правду, если перед ним выступает синий, и обманывает, если перед ним выступает однопартиец. А каждый синий, наоборот, говорит правду после однопартийца, и обманывает после человека из чужой партии. К какой партии принадлежал первый выступавший? (В парламенте присутствуют представители обеих партий и выступают по одному.)

5. В остроугольном треугольнике ABC угол A больше 45° , BE и CD — биссектрисы. Докажите, что $CD+BE > BD+DE+EC$.

6. Рассмотрим таблицу из n строчек и 4 столбцов. Во всех клетках первой строки стоят нули. Каждая строчка, начиная со второй, строится по такому правилу: в одну из клеток вписывается такое же число, какое стоит в клетке над ней, а в каждой из остальных клеток пишется 1, если над ней стоит 0, 2, если над ней стоит 1, и 0, если над ней стоит 2. Какое наибольшее количество попарно различных строк можно получить в этой таблице (некоторые строчки таблицы могут совпадать)?

7. В вершинах шестиугольника стоят числа: пять нулей и единица. Можно вычитать из любого числа единицу, одновременно прибавляя шестерку к числу, написанному в одной из соседних вершин. Можно ли такими операциями сделать все числа равными?

8. Вове дали задание расставить натуральные числа от 1 до 99 следующим образом: одно число ставится в центр окружности, а остальные расставляются по окружности на одинаковом расстоянии друг от друга так, чтобы суммы трех чисел, находящихся на каждом диаметре, образовывали 49 последовательных натуральных чисел. Какое число может стоять в центре окружности? Найдите все возможности и докажите, что других нет.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2006

ПЕРВАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. В каждой клетке квадрата 101×101 стоит одно из натуральных чисел от 1 до 101. При этом в каждой строке, в каждом столбце и в каждой из двух больших диагоналей все числа различны. Докажите, что на 100 клетках, стоящих под диагональю, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, не может быть 99 совпадающих чисел.

2. В парламент прошли 99 представителей двух партий: «красные» и «синие». На первом заседании парламента каждый депутат сделал следующее заявление: «в парламенте представители моей партии составляют большинство». Известно, что каждый красный говорит правду, если перед ним выступает синий, и обманывает, если перед ним выступает однопартиец.

А каждый синий, наоборот, говорит правду после однопартийца, и обманывает после человека из чужой партии. К какой партии принадлежал первый выступавший? (В парламенте присутствуют представители обеих партий и выступают по одному.)

3. В вершинах квадрата стоят три нуля и единица. Можно вычесть из любого числа единицу, одновременно прибавляя шестерку к числу, написанному в одной из соседних вершин. Можно ли сделать все числа равными?

4. Петя забрал себе все десятизначные числа с суммой цифр 85, а Вова — все десятизначные числа с суммой цифр 86. Докажите, что у Пети чисел больше.

5. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle BCD = 78^\circ$, $\angle CAB = \angle CBA$, и $AB = 2AD$. Найдите $\angle CAD$.

6. Вове дали задание расставить нечетное количество идущих подряд натуральных чисел следующим образом. Одно число ставится в центр окружности, а остальные расставляются по окружности на равных расстояниях друг от друга так, чтобы сумма трех чисел, находящихся на каждом диаметре, была одна и та же. Каким количеством способов можно выбрать число для центра окружности?

7. Положительные числа a , b и c удовлетворяют соотношению $a+bc = (a+b)(a+c)$. Докажите, что эти числа также удовлетворяют соотношению $b+ac = (b+a)(b+c)$.

8. Рассмотрим таблицу из n строчек и 4 столбцов. Во всех клетках первой строки стоят нули. Каждая строчка, начиная со второй, строится по такому правилу: в одну из клеток вписывается такое же число, какое стоит в клетке над ней, а в каждой из остальных клеток пишется 1, если над ней стоит 0, 2, если над ней стоит 1, и 0, если над ней стоит 2. Можно ли получить 30 различных строчек?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2006

ВТОРАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. В каждой клетке квадрата 7×7 стоит одна из цифр от 1 до 7. При этом в каждой строке, в каждом столбце и в каждой из двух больших диагоналей все числа различны. Докажите, что на 6 клетках, стоящих под диагональю, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, не может быть 5 совпадающих чисел.

2. В парламент прошли 99 представителей двух партий: «красные» и «синие». На первом заседании парламента каждый депутат сделал следующее заявление: «в парламенте представители моей партии составляют большинство». Известно, что каждый красный говорит правду, если перед ним выступает синий, и обманывает, если перед ним выступает однопартиец. А каждый синий, наоборот, говорит правду после однопартийца, и обманывает после человека из чужой партии. К какой партии принадлежал первый выступавший? (В парламенте присутствуют представители обеих партий и говорят по одному.)

3. В вершинах квадрата стоят три нуля и единица. Можно вычесть из любого числа единицу, одновременно прибавляя шестерку к числу, написанному в одной из соседних вершин. Можно ли сделать все числа равными?

4. Петя забрал себе все десятизначные числа с суммой цифр 85, а Вова — все десятизначные числа с суммой цифр 86. Докажите, что у Пети чисел больше .

5. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle BCA = 78^\circ$, $\angle CAB = \angle CBA$, и $AB = 2AD$. Найдите $\angle CAD$.

6. Вове дали задание расставить нечетное количество идущих подряд натуральных чисел следующим образом. Одно число ставится в центр окружности, а остальные расставляются по окружности на равных расстояниях друг от друга так, чтобы сумма трех чисел, находящихся на

каждом диаметре была одна и та же. Каким количеством способов можно выбрать число для центра окружности?

7. Положительные числа a , b и c удовлетворяют соотношению $a+bc = (a+b)(a+c)$. Докажите, что эти числа также удовлетворяют соотношению $b+ac = (b+a)(b+c)$.

8. Рассмотрим таблицу из n строчек и 7 столбцов. Во всех клетках первой строки стоят нули. Каждая строчка, начиная со второй, строится по такому правилу: в одну из клеток вписывается такое же число, какое стоит в клетке над ней, а в каждой из остальных клеток пишется 1, если над ней стоит 0, и 0, если над ней стоит 1. Можно ли получить 100 различных строчек?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 20.02.2006

ЛИГА «СТАРТ»

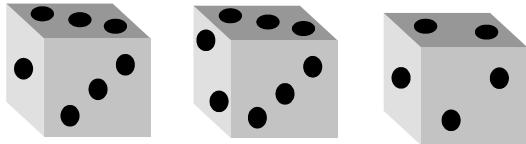
1. В каждой клетке квадрата 7×7 стоит одна из цифр от 1 до 7. При этом в каждой строке, в каждом столбце и в каждой из двух больших диагоналей все числа различны. Докажите, что на 6 клетках, стоящих под диагональю, идущей из левого верхнего угла в правый нижний, не может быть 5 совпадающих чисел.

2. Рассмотрим таблицу из n строчек и 7 столбцов. Во всех клетках первой строки стоят нули. Каждая строчка, начиная со второй, строится по такому правилу: в одну из клеток вписывается такое же число, какое стоит в клетке над ней, а в каждой из остальных клеток пишется 1, если над ней стоит 0, и 0, если над ней стоит 1. Можно ли получить 100 различных строчек?

3. В парламент прошли 99 представителей двух партий: «красные» и «синие». На первом заседании парламента каждый депутат сделал следующее заявление: «в парламенте представители моей партии составляют большинство». Известно, что каждый красный говорит правду, если перед ним выступает синий, и обманывает, если перед ним выступает однопартиец. А каждый синий, наоборот, говорит правду после однопартийца, и обманывает после человека из чужой партии. К какой партии принадлежал первый выступавший? (В парламенте присутствуют представители обеих партий и говорят по одному.)

4. У Ани бисер: на каждые 2 синие бусинки приходится 3 зеленых, а красного бисера больше, чем зеленого. Аня меняется с Таней: за каждые 10 бусинок (3 синих, 2 зеленых и 5 красных) она получает 7 (6 белых и одну черную). Когда у Ани кончился синий бисер, на каждые две красные бусинки приходилось три белых. Сколько красных бусинок было у Ани первоначально, если синих было 1200?

5. На рисунке справа помещены три фотографии одного и того же игрального кубика. Нарисуйте развертку этого кубика.



6. Вове дали задание расставить нечетное количество идущих подряд натуральных чисел следующим образом. Одно число ставится в центр окружности, а остальные расставляются по окружности на равных расстояниях друг от друга так, чтобы сумма трех чисел, находящихся на каждом диаметре была одна и та же. Каким количеством способов можно выбрать число для центра окружности?

7. Петя забрал себе все десятизначные числа с суммой цифр 85, а Вова – все десятизначные числа с суммой цифр 86. Докажите, что у Пети чисел больше.

8. Положительные числа a , b и c удовлетворяют соотношению $a+bc = (a+b)(a+c)$. Докажите, что эти числа также удовлетворяют соотношению $b+ac = (b+a)(b+c)$.

2 тур, решения и указания для жюри. Высшая лига

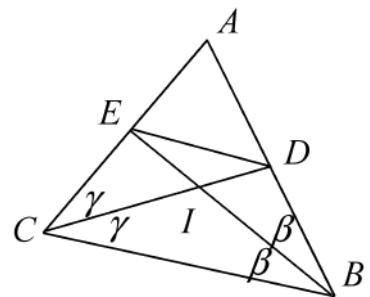
1. Если сумма цифр n -значного числа равна $9(n-1)$, то либо в нем вовсе нет нулей, либо есть один нуль, а остальные цифры — девятки. Забудем пока про девять чисел с суммой цифр $9(n-1)$, у которых этот нуль — одна из девяти последних цифр, а всем остальным числам с суммой цифр $9(n-1)$ сопоставим число с суммой цифр $9(n-2)$, в котором нет девяток, уменьшив каждую из последних 9 цифр на 1. Поскольку разным числам с суммой цифр $9(n-1)$ при этом сопоставляются разные числа с суммой цифр $9(n-2)$, чисел с суммой цифр $9(n-1)$, среди последних 9 цифр которых нет нулей, не больше, чем чисел с суммой цифр $9(n-2)$ среди последних 9 цифр которых нет девяток. Но чисел с суммой цифр $9(n-2)$, среди последних 9 цифр которых есть девятки, больше девяти (например, чисел, в записи которых $n-2$ девятки и два нуля, уже $(n-1)(n-2)/2$), что и завершает доказательство. ♦ *Построено отображение чисел с суммой цифр $9(n-1)$ в числа с суммой цифр $9(n-2)$, но докладчик не понимает необходимости доказывать его инъективность — 0. Не рассмотрены особые случаи, когда отображение не определено — не выше 6, задача не решена.*

2. Ответ: 27. Решение. Заметим, что при переходе к следующей строке сохраняется остаток от деления суммы чисел в строке на 3. Следовательно, суммы чисел во всех строках, как и в первой, делятся на 3. Нетрудно проверить, что различных таких строк ровно 27. А вот и пример: 0000 0111 0222 1200 2211 0012 1110 1221 1002 2010 0021 1122 2220 2001 2112 0120 1101 2202 0210 1011 2022 2100 0201 1212 1020 2121 0102.

3. Возьмем произвольную тройку целых чисел (x,y,z) , удовлетворяющую равенству $2x+3y-5z = 1$ (*), и будем искать решение уравнения $2a^2+3b^2-5c^2 = 2005$ в виде $a = x+n$, $b = y+n$, $c = z+n$. Подстановка в уравнение дает после преобразований равенство $2n = 2005 - (2x^2+3y^2-5z^2)$. Поскольку сумма в скобках сравнима по модулю 2 с суммой $2x+3y-5z$, она нечетна, разность в правой части последнего равенства четна, и мы находим искомое целое n . Осталось заметить, что существует бесконечно много решений в целых числах уравнения (*) с попарно различными разностями $x-y$, которые, очевидно, дают различные решения уравнения $2a^2+3b^2-5c^2 = 2005$. В самом деле, мы всегда можем увеличить x на 3 и уменьшить y на 2, сохраняя равенство (*).

4. Если все числа a , b , c положительны, доказывать нечего. В противном случае среди них неположительно ровно одно. Пусть это c . Его модуль меньше как a , так и b , иначе одна из сумм $c+b$ или $c+a$ неположительна. Не умоляя общности, будем считать, что $a > b$. Тогда $ax+by+cz > bx+by-bz > 0$. Последнее неравенство вытекает из неравенства треугольника.

5. Пусть $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. Заметим, что $2\angle A > 90^\circ > \angle B = 2\beta$, то есть $\angle A > \beta$. Поэтому $\angle CDB = \gamma + \angle A > \angle BID = \gamma + \beta$, откуда $BI > BD$ (см. рис.). Аналогично, $CI > CE$. Кроме того, $EI + ID > DE$. Складывая полученные неравенства, получаем искомое.



6. Надо доказать, что $S(BPR) = S(APR) + S(ARC) \Leftrightarrow S(APR)/S(BPR) + S(ARC)/S(BPR) = 1$. Но $S(APR)/S(BPR) = AP/BP$, а $S(ARC)/S(BPR) = S(BRQ)/S(BPR) = QK/KP = QC/BP$. Так как $QC/FP = CS/SF = 2$, имеем $AP/PB + QC/BP = (AP + 2FP)/BP = 1$

7. Ответ: Нет. Решение. Раскрасим вершины десятиугольника в красный и синий цвета, чередуя красные и синие вершины. Пусть исходная фишечка находится в красной вершине. При совершении описанной в условии операции остаток от деления на 11 разности между количествами фишечек в красных и синих вершинах сохраняется. Вначале он равен 1, поэтому стать нулем не сможет.

8. Ответ: 51. Решение. Заметим, что $3x^2 - 3x + 1 = x^3 + (1-x)^3$. Поэтому у дробей, равнодаленных от концов суммы, знаменатели равны, а сумма их числителей равна общему знаменателю. Поэтому сумма двух таких дробей равна 1, а таких пар в сумме — 51. ♦ *Если докладчик считает, что в сумме 101 слагаемое — минус 2 балла.*

ПЕРВАЯ ЛИГА

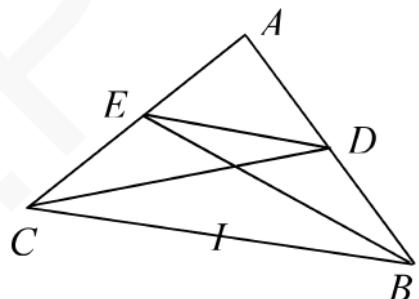
1. Задача 1 высшей лиги.

2. Ответ: 64° . Решение. Пусть E — середина AB . Тогда прямоугольные треугольники CDA и CEA равны по катету и гипотенузе. Стало быть, равны все три угла, на которые лучи CA и CE делят угол BCD , и каждый из них составляет 26° . Значит, $\angle CAD = 64^\circ$.

3. 16-значное число, делящееся на 999999999, имеет вид $b = 10^9a - a$, где a — некоторое семизначное число. Проведя вычитание «столбиком», нетрудно проверить, что сумма цифр числа b нечетна. С другой стороны, 16-значное число, делящееся на 100000001, имеет вид $d = 10^9c + c$, где c — некоторое семизначное число. Сумма цифр такого числа d четна.

4. Задача 4 высшей лиги.

5. Заметим, что $\angle CDB > \angle A > 90^\circ > \angle BID$, откуда $BI > BD$ (см. рис.) Аналогично, $CI > CE$. Кроме того, $EI + ID > DE$. Складывая полученные неравенства, получаем искомое.



6. Предположим противное. Это значит, что любые двое имеют поровну конфет ровно одного цвета. 1) Отметим, что все ребята не могут иметь поровну красных конфет (аналогично, синих и зеленых), так как нет 102 различных вариантов раздать только синие и зеленые конфеты суммарным количеством не более 100 штук. 2) Пусть есть трое с равным количеством конфет (например, красных) — А, В и С. Рассмотрим D, у которого другое количество красных конфет. У D должно быть с каждым из А, В и С поровну каких-то конфет. Пусть у А и D поровну синих конфет, тогда у В и D не может быть поровну синих конфет, так как в этом случае у А и В одинаковые наборы. Значит, у В и D поровну зеленых конфет. Теперь, рассмотрев С и D, получаем противоречие. 3) Теперь ясно, что можно взять 6 человек с попарно разными количествами красных конфет. У любых двоих из них поровну либо синих, либо зеленых, следовательно, есть либо трое, у которых поровну синих, либо трое, у которых поровну зеленых, приходим к противоречию.

7. Ответ: Нет. Решение. Раскрасим вершины шестиугольника в красный и синий цвета, чередуя красные и синие вершины. Пусть исходная фишка находится в красной вершине. При совершении описанной в условии операции остаток от деления на 7 разности между количествами фишек в красных и синих вершинах сохраняется. Вначале он равен 1, поэтому стать нулем не сможет.

8. Задача 8 высшей лиги.

ВТОРАЯ ЛИГА

1. Задача 1 высшей лиги.

2. Задача 4 высшей лиги.

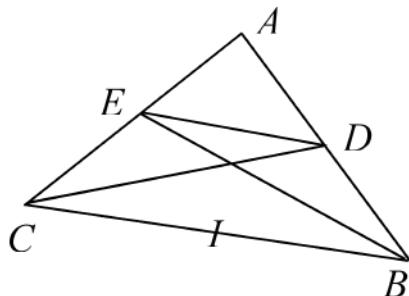
3. Задача 2 первой лиги.

4. Ответ: Нет. Решение. Раскрасим концы той диагонали квадрата, где стоит 1, в красный цвет, а другой — в синий. При совершении описанной в условии операции остаток от деления на 7 разности между суммами чисел в красных и синих вершинах сохраняется. Вначале он равен 1, поэтому стать нулем не сможет.

5. Заметим, что $\angle CDB > \angle A > 90^\circ > \angle BID$, откуда $BI > BD$ (см. рис.) Аналогично, $CI > CE$. Кроме того, $EI + ID > DE$. Складывая полученные неравенства, получаем искомое.

6. Задача 8 высшей лиги.

7. Ответ: К красной. **Решение.** Поскольку число 99 нечетно, представители какой-то партии составляют в парламенте большинство. Все они сказали правду. Допустим, это синие. Тогда все они (кроме, может быть, первого) выступали после однопартийцев. Но это, поскольку в парламенте есть и красные, означает, что сначала выступили все синие, а потом — все красные. Однако, тогда первый красный должен был сказать правду. Противоречие. Значит, правду говорят красные. Стало быть, они чередуются с синими и их больше. Но это возможно только в случае, когда первый оратор — красный.



8. Ответ: 8. **Решение.** Ясно, что самый маленький собственный делитель натурального числа N есть простое число. Обозначим его через p . Тогда самый большой делитель числа N есть число N/p , а второй по величине делитель есть либо второй по величине простой делитель q , либо число p^2 . В первом случае должно выполняться неравенство $p < q < p^2$. Соответственно, в первом случае должно выполняться условие $N = p^2q$, а во втором — $N = p^4$. Второй случай даёт число $N = 625$. В первом случае либо $p=3$ и $q=5$, либо $p=5$ и $q=7, 11, 13, 17, 19, 23$. ♦ *Только 625 — 2 балла. Потеря одного из трех случаев — не более 6 баллов, задача не решена.*

Высшая юниорская лига

1. Задача 1 высшей лиги.

2. Задача 4 высшей лиги.

3. Допустим, в 100 указанных в условии клетках стоят 99 чисел a и одно число b . Число b должно стоять в клетке, примыкающей в краю квадрата, иначе на большой диагонали, под которой стоят числа, не может быть числа a . Пусть эта клетка — самая нижняя из ста. Тогда на большой диагонали рядом с ней должно стоять число a , и оно же должно стоять в верхней клетке ее столбца. Но тогда на второй большой диагонали негде поставить a .

4. Задача 7 второй лиги.

5. Задача 5 высшей лиги.

6. Ответ: 27. **Решение.** Оценка 27 доказывается так же, как в решении задачи 2 высшей лиги. Пример из того решения тоже годится, но можно рассуждать и по-другому. Достаточно показать, что из строки 0000 можно получить любую строку $abcd$ с суммой, делящейся на 3. Для этого достаточно 3– a раз прибавить единицу к числам со второго по четвертое, 3– b раз — к первому, третьему и четвертому, 3– c раз — к первому, второму и четвертому, 3– d раз — к числам с первого по третье. Первое число окажется в итоге равным $-(b+c+d) = a \pmod{3}$, аналогично с остальными.

7. Задача 7 первой лиги.

8. Ответ: 1, 50, 99. **Решение.** Пусть в центре стоит число k , а суммы равны $n, \dots, n+48$. Тогда $n+\dots+(n+48) = 49(n+24) = 1+\dots+99+48k = 4950+48k$, откуда после преобразований получается $48k = 49n - 3774$. Нетрудно проверить, что последнему уравнению удовлетворяет $k = 1$ (при $n = 78$). Поскольку числа 48 и 49 взаимно просты, большие значения k идут с периодом 49. Отсюда — ответ. ♦ *Если найдены не все ответы — докладчику не больше 4 баллов.*

ПЕРВАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Задача 3 высшей юниорской лиги.

2. Задача 7 второй лиги.

3. Задача 4 второй лиги.

4. Десятизначных чисел с суммой цифр 85 столько же, сколько чисел с суммой цифр 5, а чисел с суммой цифр 86 – столько же, сколько чисел с суммой цифр 4. Нарисуем из каждого 10-значного числа с суммой цифр 4 стрелки к тем 10 числам с суммой цифр 5, которые могут быть получены из него увеличением на 1 какого-то разряда. Пусть мы всего нарисовали $10K$ стрелок. Заметим, что к каждому числу при этом направлено не более 5 стрелок, потому что в числе с суммой цифр 5 не более пяти ненулевых разрядов. Поэтому количество чисел с суммой цифр 5 не меньше, чем $10K/5 = 2K > K$, то есть больше, чем чисел с суммой цифр 4.

5. Задача 2 первой лиги.

6. Ответ: Тремя. Решение. Пусть чисел $2k+1$. Если выкинуть среднее число, остальные можно разбить на пары равноудаленных от него, и суммы в парах будут равны, а сумма всех чисел без выброшенного будет делиться на $2k$. Если сдвинуть выброшенное число на $m \leq k$, сумма оставшихся увеличится или уменьшится на $2m$, и будет делиться на $2k$ только при $m = k$. Стало быть, кроме среднего, на роль стоящего в центре могут претендовать только крайние из данных чисел. Легко видеть, что они тоже подходят. ♦ *Если найдены не все ответы — докладчику не больше 4 баллов.*

7. Легко проверить, что каждое из данных в условии равенств равносильно равенству $a+b+c = 1$.

8. Оценка из задачи 2 высшей лиги,

Вторая юниорская лига

1. Аналогична задаче 3 высшей юниорской лиги.

2. Задача 7 второй лиги.

3. Задача 4 второй лиги.

4. Задача 4 первой юниорской лиги.

5. Ответ: 51° . Решение. Пусть E — середина AB . Тогда прямоугольные треугольники CDA и CEA равны по катету и гипотенузе. Стало быть, равны все три угла, на которые лучи CA и CE делят угол BCD , и каждый из них составляет 39° . Значит, $\angle CAD = 51^\circ$.

6. Задача 6 первой юниорской лиги.

7. Задача 7 первой юниорской лиги.

8. Ответ: Нет. Решение. Заметим, что при переходе к следующей строке сохраняется четность суммы чисел в строке. Следовательно, суммы чисел во всех строках, как и в первой, четны. Различных таких строк существует только $2^6 = 64$, ибо первые 6 чисел в строке можно брать произвольно, а седьмое однозначно ими определяется.

Лига «Старт»

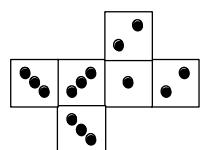
1. Аналогична задаче 3 высшей юниорской лиги.

2. Задача 8 второй юниорской лиги.

3. Задача 7 второй лиги.

4. Ответ: 3600. Решение. Заметим, что за каждую синюю бусинку Аня получает две белых. Поэтому когда синий бисер у Ани закончится, у нее будет 2400 белых бусинок, и, стало быть, 1600 красных. Всего Аня сделала $1200/3 = 400$ обменов и каждый раз отдавала по 5 красных бусинок. Отсюда — ответ.

5. Одна из возможных разверток показана на рисунке справа. Есть, конечно, и другие, но кубик — ровно один. ♦ *Для полного балла достаточно привести одну верную развертку и пояснить, почему она*



годится. Исследования не требуется. Приведение верной развертки без обоснования — 8 баллов и задача решена.

6. Задача 6 первой юниорской лиги.
7. Задача 4 первой юниорской лиги.
8. Задача 7 первой юниорской лиги.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2006

ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и D равны. На стороне AD выбрана такая точка K , что $AB = BK$ и $CK = CD$. На отрезке BK выбрана такая точка L , что $BL = CK$. Докажите, что $LA = LD$.

2. На конгрессе присутствуют 200 ученых, каждый из которых знает ровно 4 языка. Известно, что их любых троих ученых какие-то двое могут говорить на одном языке. Докажите, что каким-то языком владеют не менее 26 участников конгресса.

3. Числа от 2 до 2006 разделяют на несколько групп таким образом, что наибольший общий делитель двух чисел из одной группы никогда не лежит в той же группе. Какое наименьшее количество групп для этого нужно?

4. Точки D , E и F — середины сторон BC , CA и AB треугольника ABC соответственно. Докажите, что если $AD = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$, то $\angle DAC = \angle EFC$.

5. 2006 шариков выложены в ряд и раскрашены в красный и синий цвета (возможно, какой-нибудь цвет не использован). На каждом шарике напишем сумму количества красных шариков, лежащих справа от него, и количества синих шариков, лежащих слева от него. В полученной последовательности ровно четыре числа встретились нечетное число раз. Какие это могут быть числа?

6. В таблице 5×5 расставлены натуральные числа таким образом, что сумма чисел в любой строке, любом столбце и в каждой из двух больших диагоналей четна. Докажите, что сумма чисел в 5 клетках: центральной и четырех соседних тоже четна.

7. Натуральное число n таково, что $3n+7$ — точный квадрат. Докажите, что $n+3$ — сумма квадратов трех целых чисел.

8. Докажите, что у каждого натурального n есть натуральное кратное, меньшее n^2 , в десятичной записи которого встречаются не все десять цифр.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2006

ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и D равны. На стороне AD выбрана такая точка K , что $AB = BK$ и $CK = CD$. На отрезке BK выбрана такая точка L , что $BL = CK$. Докажите, что $LA = LD$.

2. На конгрессе присутствуют 200 ученых, каждый из которых знает ровно 4 языка. Известно, что их любых троих ученых какие-то двое могут говорить на одном языке. Докажите, что каким-то языком владеют не менее 26 участников конгресса.

3. После первого матча чемпионата Шанил О'Кил имел результативность бросков меньше 80%, а в конце чемпионата — больше 80%. Верно ли, что был момент, когда его результативность его бросков была ровно 80%? Результативность бросков — это отношение числа попаданий в корзину к общему числу бросков.

4. Точки D , E и F — середины сторон BC , CA и AB треугольника ABC соответственно. Докажите, что если $AD = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$, то $\angle DAC = \angle EFC$.

5. В шахматном турнире участвовали 40 шахматистов. Каждые два участника сыграли друг с другом ровно одну партию. За победу давалось 1 очко, за ничью давалось $1/2$ очка, за поражение — 0 очков. В итоге все шахматисты набрали разное число очков. Докажите, что есть участник, у которого количество побед больше, чем количество ничьих.

6. Играют по очереди ставят королей на шахматную доску 8×8 : первый игрок — белых королей, второй игрок — черных. Запрещается ставить своего короля под бой короля противника. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

7. Натуральное число n таково, что $3n+7$ — точный квадрат. Докажите, что $n+3$ — сумма квадратов трех целых чисел.

8. Существует ли вещественное $a > 0$, для которого число $[50a]+[41a]+[9a]$

оканчивается на 98? (Через $[x]$ обозначается целая часть x , т.е., наибольшее целое число, не превосходящее x .)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2006

ВТОРАЯ ЛИГА

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и D равны. На стороне AD выбрана такая точка K , что $AB = BK$ и $CK = CD$. На отрезке BK выбрана такая точка L , что $BL = CK$. Докажите, что $LA = LD$.

2. Правильный треугольник со стороной 3 разделён прямыми параллельными сторонам на 9 маленьких треугольничков со стороной 1. В эти треугольнички вписаны числа 1, 2, ..., 9. Оказалось, что сумма четырёх чисел в каждом из треугольников со стороной 2 равна чётному числу n . Найдите наибольшее возможное значение n .

3. Учитель написал на доске натуральное число, меньшее 50000. Один ученик сказал, что это число делится на 2, второй — что оно делится на 3, ..., двенадцатый ученик сказал, что это число делится на 13. Учитель заметил, что неправду сказали ровно два ученика, причём эти ученики говорили сразу друг за другом. Какое число было написано на доске?

4. В начале четверти у Пети в дневнике было меньше 80% пятерок, а в конце четверти пятерок стало больше 80%. Докажите, что существовал момент, когда у Пети было ровно 80% пятерок.

5. В трапеции $ABCD$ точки K и L — середины оснований AB и CD соответственно. Известно, что $AB = 2CD$, а точка K лежит на биссектрисе угла C . Докажите, что $AC = 2KL$.

6. Каждую клетку тетрадного листа покрасили в один из семи цветов. Докажите, что найдётся четырёхклеточная фигура в форме буквы Г, внутри которой есть две клетки одного цвета.

7. Трое играют в такую игру: перед ними две кучки конфет. Каждый в свой ход берёт несколько конфет из одной кучки. Если кто-то взял несколько конфет из одной кучки, то следующим ходом нельзя брать столько же конфет в другой кучке. Игрок, который не может сделать ход, выбывает из игры. Выигрывает тот, кто взял последнюю конфету. Кто выиграет при правильной игре?

8. Натуральное число n подобрано так, что число $3n+1$ есть точный квадрат. Докажите, что число $n+5$ представляется в виде суммы трёх точных квадратов.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2006
ВЫСШАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и D равны. На стороне AD выбрана такая точка K , что $AB = BK$ и $CK = CD$. На отрезке BK выбрана такая точка L , что $BL = CK$. Докажите, что $LA = LD$.

2. На конгрессе присутствуют 200 ученых, каждый из которых знает ровно 4 языка. Известно, что из любых трех ученых какие-то двое могут говорить на одном языке. Докажите, что каким-то языком владеют не менее 26 участников конгресса.

3. Обозначим $\pi(N)$ количество простых чисел, не превышающих N . Решите уравнение $\pi(N) + \pi(2N) = N$.

4. После первого матча чемпионата Шанил О'Кил имел результативность бросков меньше 80%, а в конце чемпионата – больше 80%. Верно ли, что был момент, когда его результативность его бросков была ровно 80%? Результативность бросков — это отношение числа попаданий в корзину к общему числу бросков.

5. 99 шариков выложены в ряд и раскрашены в красный и синий цвета (возможно, какой-нибудь цвет не использован). На каждом шарике напишем сумму количества красных шариков, лежащих справа от него, и количества синих шариков, лежащих слева от него. В полученной последовательности ровно одно число встретилось нечетное число раз. Какое это может быть число? (Найдите все возможности и докажите, что других нет).

6. В таблице 5×5 расставлены натуральные числа таким образом, что сумма чисел в любой строке, любом столбце и в каждой из двух больших диагоналей четна. Докажите, что сумма чисел в 5 клетках: центральной и четырех соседних тоже четна.

7. Натуральное число n , большее 10, таково, что число $3n + 1$ – квадрат целого числа. Докажите, что число $n + 5$ — сумма квадратов трех различных натуральных чисел.

8. Докажите, что для каждого натурального n , большего 1, есть натуральное число, меньшее n^2 , которое делится на n и в его записи встречаются не все десять цифр.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2006
ПЕРВАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и D равны. На стороне AD выбрана такая точка K , что $AB = BK$ и $CK = CD$. На отрезке BK выбрана такая точка L , что $BL = CK$. Докажите, что $LA = LD$.

2. Правильный треугольник со стороной 3 разделён прямыми параллельными сторонам на 9 маленьких треугольничков со стороной 1. В эти треугольнички вписаны числа 1, 2, ..., 9. Оказалось, что сумма четырёх чисел в каждом из треугольников со стороной 2 равна чётному числу n . Найдите наибольшее возможное значение n .

3. Обозначим $\pi(N)$ количество простых чисел, не превышающих N . Решите уравнение $\pi(3N) = N$.

4. После первого матча чемпионата Шанил О'Кил имел результативность бросков меньше 80%, а в конце чемпионата – больше 80%. Верно ли, что был момент, когда его результативность его бросков была ровно 80%? Результативность бросков — это отношение числа попаданий в корзину к общему числу бросков.

5. У Васи есть незамкнутая цепочка из 159 звеньев. Вася разомкнул в ней наименьшее возможное число звеньев так, чтобы можно было отдать любое количество звеньев от 1 до 159. Сколько звеньев разомкнул Вася? (Размыкание одного звена делит цепочку на три части, одна из которых – само разомкнутое звено.)

6. В таблице 3×3 расставлены натуральные числа таким образом, что сумма чисел в любой строке, любом столбце и в каждой из двух больших диагоналей делится на 9. Докажите, что число в центральной клетке делится на 3.

7. Трое играют в такую игру: перед ними две кучки конфет. Каждый в свой ход берёт несколько конфет из одной кучки. Если кто-то взял несколько конфет из одной кучки, то следующим ходом нельзя брать столько же конфет в другой кучке. Игрок, который не может сделать ход, выбывает из игры. Выигрывает тот, кто взял последнюю конфету. Кто выиграет при правильной игре?

8. Последовательность скобок называется *правильной*, если существует такое арифметическое выражение, в котором эти скобки идут в таком же порядке. Например, $([()] ())$ – правильная последовательность, а $([])$ или $) []$ – нет. Незнайка написал на доске следующий ряд скобок: $)()([)([...)()$. В ряде группа из четырех скобок $)()$ повторяется 100 раз. Какое наименьшее количество скобок надо изменить на противоположные, чтобы получилась правильная последовательность?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2006

ВТОРАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Сорок разбойников ростом 151, 152, 153...190 сантиметров встали в круг. Али-Баба дает каждому разбойнику количество монет, равное разности роста двух его соседей. Какого наименьшего количества монет наверняка хватит Али-Бабе?

2. Правильный треугольник со стороной 3 разделён прямыми параллельными сторонам на 9 маленьких треугольничков со стороной 1. В эти треугольнички вписаны числа 1, 2, ..., 9. Оказалось, что сумма четырёх чисел в каждом из треугольников со стороной 2 равна чётному числу n . Найдите наибольшее возможное значение n .

3. Обозначим $\pi(N)$ количество простых чисел, не превышающих N . Решите уравнение $\pi(5N) = 2N$.

4. После первого матча чемпионата Шанил О'Кил имел результативность бросков меньше 75%, а в конце чемпионата – больше 75%. Докажите, что был момент, когда его результативность его бросков была ровно 75%? Результативность бросков — это отношение числа попаданий в корзину к общему числу бросков.

5. У Васи есть незамкнутая цепочка из 23 звеньев. Вася разомкнул в ней наименьшее возможное число звеньев так, чтобы можно было отдать любое количество звеньев от 1 до 23. Сколько звеньев разомкнул Вася? (Размыкание одного звена делит цепочку на три части, одна из которых – само разомкнутое звено.)

6. В таблице 3×3 расставлены натуральные числа таким образом, что сумма чисел в любой строке, любом столбце и в каждой из двух больших диагоналей делится на 9. Докажите, что число в центральной клетке делится на 3.

7. Трое играют в такую игру: перед ними две кучки конфет. Каждый в свой ход берёт несколько конфет из одной кучки. Если кто-то взял несколько конфет из одной кучки, то следующим ходом нельзя брать столько же конфет в другой кучке. Игрок, который не может сделать ход, выбывает из игры. Выигрывает тот, кто взял последнюю конфету. Кто выиграет при правильной игре?

8. Последовательность скобок называется *правильной*, если существует такое арифметическое выражение, в котором эти скобки идут в таком же порядке. Например, $([()] ())$ – правильная последовательность, а $([])$ или $) []$ – нет. Незнайка написал на доске следующий ряд скобок: $)()([)([...)()$. В ряде группа из четырех скобок $)()$ повторяется 100 раз. Какое наименьшее количество скобок надо изменить на противоположные, чтобы получилась правильная последовательность?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 22.02.2006

ЛИГА «СТАРТ»

1. После первого матча чемпионата Шанил О'Кил имел результативность бросков меньше 75%, а в конце чемпионата – больше 75%. Докажите, что был момент, когда его результативность его бросков была ровно 75%? Результативность бросков — это отношение числа попаданий в корзину к общему числу бросков.

2. Семь гномов ростом 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 дециметров встали в круг. Белоснежка дает каждому гному количество конфет равное разности роста двух его соседей. Какого наименьшего количества конфет наверняка хватит Белоснежке?

3. Учитель написал на доске натуральное число, меньшее 50000. Один ученик сказал, что это число делится на 2, второй – что оно делится на 3, ..., двенадцатый ученик сказал, что это число делится на 13. Учитель заметил, что неправду сказали ровно два ученика, причём эти ученики говорили сразу друг за другом. Какое число было написано на доске?

4. У Васи есть незамкнутая цепочка из 23 звеньев. Вася разомкнул в ней наименьшее возможное число звеньев так, чтобы можно было отдать любое количество звеньев от 1 до 23. Сколько звеньев разомкнул Вася? (Размыкание одного звена делит цепочку на три части, одна из которых – само разомкнутое звено.)

5. В таблице 3×3 расставлены натуральные числа таким образом, что сумма чисел в любой строке, любом столбце и в каждой из двух больших диагоналей делится на 9. Докажите, что число в центральной клетке делится на 3.

6. В четырехугольнике все углы меньше 100° . Докажите, что они все больше 60° .

7. Трое играют в такую игру: перед ними две кучки конфет. Каждый в свой ход берёт несколько конфет из одной кучки. Если кто-то взял несколько конфет из одной кучки, то следующим ходом нельзя брать столько же конфет в другой кучке. Игрок, который не может сделать ход, выбывает из игры. Выигрывает тот, кто взял последнюю конфету. Кто выиграет при правильной игре?

8. Автобусы от дома до школы и обратно отправляются через равные интервалы времени. Миша забыл дома деньги и пошел домой пешком. В тот момент, когда он отправился в путь, одновременно с ним от остановки отъехал автобус, а на остановку подъехал другой. По дороге Мишу догнали еще 9 автобусов, (причем десятый – возле самого дома), а навстречу попались еще 15 автобусов, (причем последний – возле самого дома). Сколько времени потерял Миша из-за своей забывчивости, если он шел 2 часа?

Высшая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

1. Выберем на сторонах AB и AD точки M и N соответственно так, чтобы прямая ML была параллельна AD , а прямая LN была параллельна AB . Равнобедренные треугольники MBL и KCD равны по первому признаку, а $AMLN$ — параллелограмм. Поэтому $AN = ML = KD$, и высота равнобедренного треугольника NLK , опущенная из его вершины L , является одновременно серединным перпендикуляром к отрезку AD , откуда и следует утверждение задачи.

2. Допустим противное: каждым языком владеет не больше 25 ученых. Возьмем любого ученого А. Он сможет говорить на одном языке не более чем с $24 \times 4 = 96$ другими. Но тогда любые двое, с которыми он не может говорить на одном языке, должны говорить на одном языке между собой. Однако, их 103, и любой из них может говорить на одном языке не более чем с 96 другими. Противоречие.

3. Ответ: 10. Решение. Числа $2, 2^2, \dots, 2^{10}$ должны попасть в разные группы. Поэтому групп не меньше 10. С другой стороны, соединим в группы числа с одинаковой суммой показателей степеней в разложении на простые множители. Групп получится 10, потому что эта сумма не превышает 10 (уже $2^{11} > 2006$). Легко видеть, что у НОД двух различных чисел с равными суммами показателей сумма показателей меньше, чем у самих этих чисел. ♦ *Только оценка — 4 балла, только пример — 6 баллов и задача не решена.*

4. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Тогда $DM = \frac{\sqrt{3}}{6} BC \Rightarrow DM \cdot DA = BC^2/4 = DC^2 \Rightarrow DC/DM = DA/DC$, то есть треугольники DCM и DAC подобны. Следовательно, $\angle EFC = \angle MCD = \angle DAC$.

5. Ответ: 1001, 1002, 1003, 1004. Решение. Легко видеть, что числа, написанные на соседних разноцветных шариках, равны. Если убрать пару таких шариков, все числа на остальных шариках уменьшатся на 1, и по-прежнему в последовательности этих чисел будет ровно четыре встречающихся нечетное число раз. Будем убирать пары соседних разноцветных шариков, пока это возможно. В конце останется какое-то число одноцветных шариков. Все числа на них будут различны, и потому каждое будет встречаться один (то есть нечетное число) раз. По условию такое возможно только если в конце останется ровно 4 шарика. На них будут написаны 0, 1, 2, 3, а перед этим была убрана 1001 пара шариков. Отсюда ответ. ♦ *Только ответ — 0. Внимательно слушайте решения, особенно основанные на рассмотрении графиков, вероятны замаскированные ошибки.*

6. Сложим суммы чисел в трех средних строках и трех средних столбцах. Результат четен. Числа из центрального квадрата 3×3 входят в него дважды, а 12 чисел, примыкающих к сторонам квадрата 5×5 — по разу. Значит, сумма этих 12 чисел четна. Сложим суммы чисел на двух диагоналях. Результат четен, центральное число сосчитано дважды, остальные — по одному разу. Значит, сумма 8 чисел, стоящих на диагоналях (исключая центральное) четна. Четна также сумма всех 25 чисел таблицы (например, как сумма пяти сумм по строкам). Вычитая из нее сумму названных выше 12+8 чисел, получим как раз сумму пяти чисел в центральном кресте. Она четна как разность двух четных чисел.

7. Если $3n+7 = l^2$, то $l = 3k \pm 1$, откуда после преобразований получаем $n+3 = 3k^2 \pm 2k + 1 = (k \pm 1)^2 + k^2 + k^2$.

8. Пусть количество цифр в записи числа n равно k . Если $k < 10$, доказывать нечего. В противном случае рассмотрим все $(2k-2)$ -значные числа, записанные только цифрами 1, 2, 3 и 4. Нетрудно убедиться, что разность любых двух из них не содержит цифры 5. С другой стороны, по индукции легко доказать, что количество таких чисел, равное 4^{2k-2} , при любом $n \geq 10$ больше 10^k . Поэтому среди них найдутся два, дающие равные остатки при делении на n . Их разность — искомое число. ♦ *Есть решение только для всех чисел, содержащих более некоторого $n_0 > 10$ цифр — 8 баллов.*

Первая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

1. Выберем на сторонах AB и AD точки M и N соответственно так, чтобы прямая ML была параллельна AD , а прямая LN была параллельна AB . Равнобедренные треугольники MBL и KCD равны по первому признаку, а $AMLN$ — параллелограмм. Поэтому $AN = ML = KD$, и высота равнобедренного треугольника NLK , опущенная из его вершины L , является одновременно серединным перпендикуляром к отрезку AD , откуда и следует утверждение задачи.

2. Допустим противное: каждым языком владеет не больше 25 ученых. Возьмем любого ученого А. Он сможет говорить на одном языке не более чем с $24 \times 4 = 96$ другими. Но тогда любые двое, с которыми он не может говорить на одном языке, должны говорить на одном языке между собой.

Однако, их 103, и любой из них может говорить на одном языке не более чем с 96 другими. Противоречие.

3. Ответ: Был. Решение. Предположим, что не было момента, когда результативность была ровно 80%. Рассмотрим момент, когда после очередного точного броска результативность впервые стала превышать 80%. Обозначим через k — количество точных бросков и n — общее количество бросков до рассматриваемого момента. Тогда $\frac{k}{n} < \frac{4}{5} \Rightarrow 5k < 4n$ и $\frac{k+1}{n+1} > \frac{4}{5} \Rightarrow 5k > 4n-1$.

Следовательно,

$4n-1 < 5k < 4n$, что невозможно, так как k — целое число.

4. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Тогда $DM = \frac{\sqrt{3}}{6} BC \Rightarrow DM \cdot DA = BC^2/4 = DC^2 \Rightarrow DC/DM = DA/DC$, то есть треугольники DCM и DAC подобны. Следовательно, $\angle EFC = \angle MCD = \angle DAC$.

5. Допустим противное. Тогда у победителя может быть максимум 19 побед, то есть не больше $29 + 20 \times 0,5 = 29$ очков. Значит, у второго — не больше 28,5 очков, ..., у 40-го — не больше —9,5 очков, а всего — не больше суммы всех этих чисел, равной $38,5 \times 20 = 770$. Но в турнире разыгрывается $40 \times 39/2 = 780$ очков. Противоречие. ♦ *Только доказательство, что каждый набрал не больше 29 очков — 2 балла.*

6. Ответ: Первый. Решение. Первым ходом первый ставит короля в одну из четырех центральных клеток доски, а в дальнейшем ставит своего короля симметрично только что выставленному королю соперника относительно центра доски. Поскольку соперник не может поставить своего короля на одну из центральных клеток доски, клетка, на которую первый ставит своего короля, никогда не будет соседней с той, на которую перед этим поставил короля соперник, и потому первый всегда сможет сделать свой ход, не нарушая правил. Поскольку игра конечна, второй рано или поздно проиграет. ♦ *Стратегия без обоснования — 6 баллов и задача не решена.*

7. Если $3n+7 = l^2$, то $l = 3k \pm 1$, откуда после преобразований получаем $n+3 = 3k^2 \pm 2k + 1 = (k \pm 1)^2 + k^2 + k^2$.

8. Ответ: Нет. Решение. $[50a] + [41a] + [9a] = 100[a] + [50\{a\}] + [41\{a\}] + [9\{a\}]$ и эта сумма оканчивается на те же две цифры, что и $[50\{a\}] + [41\{a\}] + [9\{a\}] \leq 49 + 40 + 8 = 97$.

Вторая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

1. Выберем на сторонах AB и AD точки M и N соответственно так, чтобы прямая ML была параллельна AD , а прямая LN была параллельна AB . Равнобедренные треугольники MBL и KCD равны по первому признаку, а $AMLN$ — параллелограмм. Поэтому $AN = ML = KD$, и высота равнобедренного треугольника NLK , опущенная из его вершины L , является одновременно серединным перпендикуляром к отрезку AD , откуда и следует утверждение задачи.

2. Ответ: 20. Решение. Треугольников со стороной 2 всего 3. Сложив суммы чисел в них, мы сосчитаем по два раза числа в треугольничках, примыкающих к серединам сторон исходного треугольника, а остальные числа — по одному разу. Поэтому $3n \leq 1 + \dots + 9 + 7 + 8 + 9 = 69$, откуда $n \leq 22$ (ибо n четно). Если $n = 22$, то сумма трех чисел, сосчитанных дважды, должна равняться 21. Варианты: $6+7+8$, $5+7+9$, $4+8+9$. Первый случай невозможен, потому что в треугольнике со стороной 2, куда попадет 9, сумма цифр будет больше 22. Во втором случае в треугольнике со стороной 2, где окажется 1, окажется также и 3, и сумма чисел там будет не больше 20. Во третьем случае в треугольнике со стороной 2, где находятся 8 и 9, должны находиться также 1 и 3. Но тогда в треугольнике со стороной 2, где находятся 8 и 4, сумма двух других чисел должна составлять 10,

а ни один из вариантов 1+9, 2+8, 3+7, 4+6 неосуществим. Пример на 20: в треугольнички, примыкающие к серединам сторон, поставим числа 4, 5 и 6, в ромб, примыкающий к 4 и 5, — 2 и 9, в ромб, примыкающий к 4 и 6, — 3 и 7, в ромб, примыкающий к 5 и 6, — 1 и 8. ♦ *Только пример на 20 — 2 балла. Только оценка на 20 — 6 баллов и задача не решена. Оценка на 22 без оценки на 20 — 2 балла.*

3. Ответ: 25740. **Решение.** Заметим, что если вместе с числом n в ряд чисел от 2 до 13 входит число $2n$, написанное на доске число делится на n (иначе оно не делится на $2n$, что противоречит условию). Поэтому число на доске делится на 2, 3, 4, 5 и 6, а, стало быть, также на 10 и 12, а вместе с ними — на 11 и 13. Остаются два варианта: число на доске не делится на 7 и 8 или на 8 и 9. Но $\text{НОК}(2,3,4,5,6,7,10,11,12,13) = 8 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 120120 > 50000$, а вот $\text{НОК}(2,3,4,5,6,9,10,11,12,13) = 4 \times 9 \times 5 \times 11 \times 13 = 25740 < 50000$. При этом $2 \times 25740 > 50000$. Отсюда — ответ.

4. Предположим, что не было момента, когда у Пети было ровно 80% пятерок. Рассмотрим момент, когда после очередной пятерки количество пятерок впервые стало превышать 80%. Пусть k — количество пятерок и n — общее количество оценок до рассматриваемого момента. Тогда $\frac{k}{n} < \frac{4}{5} \Rightarrow 5k < 4n$ и $\frac{k+1}{n+1} > \frac{4}{5} \Rightarrow 5k > 4n-1$. Следовательно, $4n-1 < 5k < 4n$, что невозможно, так как k — целое число.

5. Поскольку $CD = AB/2 = KB$, $ADCK$ — параллелограмм. Его диагональ CK делит угол при вершине C , пополам. Поэтому $ADCK$ — ромб. В частности, $CB = KB$, откуда $\angle KBC = \angle KCB = \angle KCD$. Но сумма этих трех равных углов равна 180° , поэтому каждый из них равен 60° . Значит, треугольники KCB и KCD — равносторонние и равные, и высота KL второго из них равна высоте CM первого. Далее, из доказанного следует, что $AK = DK$, и $\angle DKA = 180^\circ - 2 \times 60^\circ = 60^\circ$, то есть треугольник DKA — тоже равносторонний. Поэтому в прямоугольном треугольнике DCM $\angle CAK = 30^\circ$, откуда и следует утверждение задачи.

6. Допустим противное. Рассмотрим квадрат 3×3 (рис. справа). Пусть две нижние клетки среднего столбца покрашены в цвета 1 и 2, а клетки примыкающего к ним слева-сверху «уголка» — в цвета 3, 4, 5 и 6 (отмечены курсивом). Тогда правая клетка второго ряда покрашена в цвет 7, а клетка над ней — в цвет 3. Получается, что вдоль любой диагонали цвета повторяются через одну клетку, причем три диагонали, идущие подряд, раскрашены в 6 разных цветов. Тогда на четвертой примыкающей к ним диагонали один из шести цветов повторится, и какой бы он ни был, мы, как легко проверить, сумеем подобрать «уголок», содержащий клетку этого цвета с четвертой диагонали и клетку того же цвета с одной из трех других.

5	6	3
4	1	7
3	2	

7. Ответ: Если конфет в кучках поровну, то выигрывает третий. Если нет — первый. **Решение.** Пусть конфет в кучках поровну. Тогда первый нарушает это равенство, второй не может его восстановить, а третий — может, потому что иначе получилось бы, что равенство было перед ходом второго. Поскольку в конце игры конфет в кучках поровну (по 0), выиграет третий. Если же конфет вначале в кучках не поровну, первый первым ходом уравняет кучки. После этого он станет третьим в ситуации, когда кучки равны. ♦ *Стратегия без обоснования — 6 баллов и задача не решена. Стратегия только для равных кучек — не больше 4 баллов.*

8. Если $3n+1 = l^2$, то $l = 3k \pm 1$, откуда после преобразований получаем $n+5 = 3k^2 \pm 2k + 5$. Осталось заметить, что $3k^2 + 2k + 5 = (k+2)^2 + (k-1)^2 + k^2$ и $3k^2 - 2k + 5 = (k-2)^2 + (k+1)^2 + k^2$.

Высшая юниорская лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

1. Выберем на сторонах AB и AD точки M и N соответственно так, чтобы прямая ML была параллельна AD , а прямая LN была параллельна AB . Равнобедренные треугольники MBL и KCD

равны по первому признаку, а $AMLN$ — параллелограмм. Поэтому $AN = ML = KD$, и высота равнобедренного треугольника NKL , опущенная из его вершины L , является одновременно серединным перпендикуляром к отрезку AD , откуда и следует утверждение задачи.

2. Допустим противное: каждым языком владеет не больше 25 ученых. Возьмем любого ученого А. Он сможет говорить на одном языке не более чем с $24 \times 4 = 96$ другими. Но тогда любые двое, с которыми он не может говорить на одном языке, должны говорить на одном языке между собой. Однако, их 103, и любой из них может говорить на одном языке не более чем с 96 другими. Противоречие.

3. Ответ: 18, 20, 21, 22, 23, 24. Решение. Перебирая натуральные N от 1 до 33, находим указанные решения и убеждаемся, что другие N из этого промежутка не походят. Далее, нетрудно убедиться, что при всех N от 34 до 39 $\pi(N) < N/3$. Поскольку среди любых шести подряд идущих натуральных чисел, больших 6, простых — не больше двух (остальные делятся либо на 2, либо на 3), $\pi(N) < N/3 \Rightarrow \pi(N+2) < (N+2)/3$. Отсюда по индукции выводим, что при всех $N \geq 34$ $\pi(N) + \pi(2N) < N/3 + 2N/3 = N$. ♦ Полный ответ без оценки — 4 балла, неполный — не больше 2 баллов. Оценка, сводящая решение к разумному перебору — не меньше 6 баллов.

4. Ответ: Был. Решение. Предположим, что не было момента, когда результативность была ровно 80%. Рассмотрим момент, когда после очередного точного броска результативность впервые стала превышать 80%. Обозначим через k — количество точных бросков и n — общее количество бросков до рассматриваемого момента. Тогда $\frac{k}{n} < \frac{4}{5} \Rightarrow 5k < 4n$ и $\frac{k+1}{n+1} > \frac{4}{5} \Rightarrow 5k > 4n-1$. Следовательно, $4n-1 < 5k < 4n$, что невозможно, так как k — целое число.

5. Ответ: 49. Решение. Легко видеть, что числа, написанные на соседних разноцветных шариках, равны. Если убрать пару таких шариков, все числа на остальных шариках уменьшатся на 1, и по-прежнему в последовательности этих чисел будет ровно одно, встречающееся нечетное число раз. Будем убирать пары соседних разноцветных шариков, пока это возможно. В конце останется какое-то число одноцветных шариков. Все числа на них будут различны, и потому каждое будет встречаться один (то есть нечетное число) раз. Такое возможно только если в конце останется ровно один шарик, на котором будет написан 0, а перед этим было урано 49 пар шариков. Отсюда ответ. ♦ Только ответ — 0.

6. Сложим суммы чисел в трех средних строках и трех средних столбцах. Результат четен. Числа из центрального квадрата 3×3 входят в него дважды, а 12 чисел, примыкающих к сторонам квадрата 5×5 — по разу. Значит, сумма этих 12 чисел четна. Сложим суммы чисел на двух диагоналях. Результат четен, центральное число сосчитано дважды, остальные — по одному разу. Значит, сумма 8 чисел, стоящих на диагоналях (исключая центральное) четна. Четна также сумма всех 25 чисел таблицы (например, как сумма пяти сумм по строкам). Вычитая из нее сумму названных выше 12+8 чисел, получим как раз сумму пяти чисел в центральном кресте. Она четна как разность двух четных чисел.

7. Если $3n+1 = l^2$, то $l = 3k \pm 1$, откуда после преобразований получаем $n+5 = 3k^2 \pm 2k+5$. Осталось заметить, что $3k^2+2k+5 = (k+2)^2+(k-1)^2+k^2$ и $3k^2-2k+5 = (k-2)^2+(k+1)^2+k^2$, и, как легко проверить, при $n > 10$ $k > 2$. ♦ Найдено представление, но не доказано, что числа натуральны и/или различны — дыра в 4 балла.

8. Пусть количество цифр в записи числа n равно k . Если $k < 10$, доказывать нечего. В противном случае рассмотрим все $(2k-2)$ -значные числа, записанные только цифрами 1, 2, 3 и 4. Нетрудно убедиться, что разность любых двух из них не содержит цифры 5. С другой стороны, по индукции легко доказать, что количество таких чисел, равное 4^{2k-2} , при любом $n \geq 10$ больше 10^k . Поэтому среди них найдутся два, дающие равные остатки при делении на n . Их разность — искомое число.

Первая юниорская лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

1. Выберем на сторонах AB и AD точки M и N соответственно так, чтобы прямая ML была параллельна AD , а прямая LN была параллельна AB . Равнобедренные треугольники MBL и KCD равны по первому признаку, а $AMLN$ — параллелограмм. Поэтому $AN = ML = KD$, и высота равнобедренного треугольника NLK , опущенная из его вершины L , является одновременно серединным перпендикуляром к отрезку AD , откуда и следует утверждение задачи.

2. Ответ: 20. Решение. Треугольников со стороной 2 всего 3. Сложив суммы чисел в них, мы сосчитаем по два раза числа в треугольничках, примыкающих к серединам сторон исходного треугольника, а остальные числа — по одному разу. Поэтому $3n \leq 1+...+9+7+8+9 = 69$, откуда $n \leq 22$ (ибо n четно). Если $n = 22$, то сумма трех чисел, сосчитанных дважды, должна равняться 21. Варианты: $6+7+8$, $5+7+9$, $4+8+9$. Первый случай невозможен, потому что в треугольнике со стороной 2, куда попадет 9, сумма цифр будет больше 22. Во втором случае в треугольнике со стороной 2, где окажется 1, окажется также и 3, и сумма чисел там будет не больше 20. Во третьем случае в треугольнике со стороной 2, где находятся 8 и 9, должны находиться также 1 и 3. Но тогда в треугольнике со стороной 2, где находятся 8 и 4, сумма двух других чисел должна составлять 10, а ни один из вариантов $1+9$, $2+8$, $3+7$, $4+6$ неосуществим. Пример на 20: в треугольнички, примыкающие к серединам сторон, поставим числа 4, 5 и 6, в ромб, примыкающий к 4 и 5, — 2 и 9, в ромб, примыкающий к 4 и 6, — 3 и 7, в ромб, примыкающий к 5 и 6, — 1 и 8. ♦ *Только пример на 20 — 2 балла. Только оценка на 20 — 6 баллов и задача не решена. Оценка на 22 без оценки на 20 — 2 балла.*

3. Ответ: 9, 10, 11. Решение. Нетрудно проверить, что при $N \leq 8$ $\pi(3N) > N$, при $N = 9, 10, 11$ $\pi(3N) = N$, при $N = 12, 13$ $\pi(3N) = N-1$. Поскольку среди любых шести подряд идущих натуральных чисел, больших 6, простых — не больше двух (остальные делятся либо на 2, либо на 3), $\pi(3N) < N \Rightarrow \pi(3(N+2)) < N+2$. Теперь неравенство $\pi(3N) < N$ для всех $N \geq 12$ доказывается по индукции. ♦ *Полный ответ без оценки — 4 балла, неполный — не больше 2 баллов. Оценка, сводящая решение к разумному перебору — не меньше 6 баллов.*

4. Ответ: Был. Решение. Предположим, что не было момента, когда результативность была ровно 80%. Рассмотрим момент, когда после очередного точного броска результативность впервые стала превышать 80%. Обозначим через k — количество точных бросков и n — общее количество бросков до рассматриваемого момента. Тогда $\frac{k}{n} < \frac{4}{5} \Rightarrow 5k < 4n$ и $\frac{k+1}{n+1} > \frac{4}{5} \Rightarrow 5k > 4n-1$.

Следовательно,

$4n-1 < 5k < 4n$, что невозможно, так как k — целое число.

5. Ответ: 4. Решение. Трех звеньев не хватит, потому что из шести получившихся кусков удастся сложить не более 63 комбинаций. Пример на 4: разрежем 6-е, 17-е, 38-е и 79-е звенья. ♦ *Пример без оценки — из 4 баллов.*

6. Найдя суммы чисел в средних строке и столбце, а также на двух диагоналях, а потом сложив их, получим число, делящееся на 9. Оно равно сумме всех чисел таблицы (которая тоже делится на 9, ибо равна сумме трех сумм по строкам) плюс утроенное число в центре. Получается, что утроенное центральное число делится на 9, а само центральное число — на 3.

7. Ответ: Если конфет в кучках поровну, то выигрывает третий. Если нет — первый. Решение. Пусть конфет в кучках поровну. Тогда первый нарушает это равенство, второй не может его восстановить, а третий — может, потому что иначе получилось бы, что равенство было перед ходом второго. Поскольку в конце игры конфет в кучках поровну (по 0), выигрывает третий. Если же конфет вначале в кучках не поровну, первый первым ходом уравняет кучки. После этого он

станет третьим в ситуации, когда кучки равны. ♦ *Стратегия без обоснования — 6 баллов и задача не решена. Стратегия только для равных кучек — не больше 4 баллов.*

8. Ответ: 202. **Решение.** Понятно, что надо обязательно изменить первую и последнюю скобки, а также одну из каждой пары стоящих рядом скобок вида [) и (], которых в нашей последовательности 199. Значит, меньше 201 скобки изменить нельзя. 201 замены тоже не хватит, так как тогда число открывающих скобок не будет равно числу закрывающих. Пример на 202: среди первых 200 скобок меняем все открывающие на закрывающие, среди последних 200 — все открывающие на закрывающие, а также изменяем 200-ю и 201-ю скобки. ♦ *Оценка только на 201 — 2 балла. Только оценка на 202 — 6 баллов и задача не решена. Пример без оценки на 202 — не более 6 баллов (без всякой оценки — 4 балла).*

Вторая юниорская лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

1. Ответ: 800. **Решение.** Рассмотрим, как должны встать разбойники, чтобы получить максимальную сумму. Назовем разбойников с ростом 171 см и выше «высокими». В выплату входит разница ростов всех разбойников, стоящих через 1. Если рост разбойника в одном случае входит в разницу со знаком «+», а в другом — со знаком минус, то в сумме он сокращается. Остаются те роста, которые входят оба раза с плюсом, и те, которые входят оба раза с минусом, причем их поровну. Сумма максимальна, если и тех, и других ровно по 20, причем с плюсом входят все высокие разбойники, а с минусом — все остальные. Отсюда получаем оценку и ответ. Пример строится любым способом, в котором достигается указанное свойство.

2. Ответ: 20. **Решение.** Треугольников со стороной 2 всего 3. Сложив суммы чисел в них, мы сосчитаем по два раза числа в треугольничках, примыкающих к серединам сторон исходного треугольника, а остальные числа — по одному разу. Поэтому $3n \leq 1+\dots+9+7+8+9 = 69$, откуда $n \leq 22$ (ибо n четно). Если $n = 22$, то сумма трех чисел, сосчитанных дважды, должна равняться 21. Варианты: 6+7+8, 5+7+9, 4+8+9. Первый случай невозможен, потому что в треугольнике со стороной 2, куда попадет 9, сумма цифр будет больше 22. Во втором случае в треугольнике со стороной 2, где окажется 1, окажется также и 3, и сумма чисел там будет не больше 20. Во третьем случае в треугольнике со стороной 2, где находятся 8 и 9, должны находиться также 1 и 3. Но тогда в треугольнике со стороной 2, где находятся 8 и 4, сумма двух других чисел должна составлять 10, а ни один из вариантов 1+9, 2+8, 3+7, 4+6 неосуществим. Пример на 20: в треугольнички, примыкающие к серединам сторон, поставим числа 4, 5 и 6, в ромб, примыкающий к 4 и 5, — 2 и 9, в ромб, примыкающий к 4 и 6, — 3 и 7, в ромб, примыкающий к 5 и 6, — 1 и 8. ♦ *Только пример на 20 — 2 балла. Только оценка на 20 — 6 баллов и задача не решена. Оценка на 22 без оценки на 20 — 2 балла.*

3. Ответ: 2, 3, 4. **Решение.** При $N=1 \pi(5N)=3 > 2N$, при $N=2, 3, 4 \pi(5N)=2N$, при $N=5, 6 \pi(5N) < 2N$. Поскольку среди любых 10 подряд идущих натуральных чисел, больших 10, простых — не больше четырех (ибо там есть пять четных чисел и хотя бы одно нечетное, делящееся на 3), $\pi(5N) < 2N \Rightarrow \pi(5(N+2)) < 2(N+2)$. Теперь неравенство $\pi(5N) < 2N$ для всех $N \geq 5$ доказывается по индукции. ♦ *Полный ответ без оценки — 4 балла, неполный — не больше 2 баллов. Оценка, сводящая решение к разумному перебору — не меньше 6 баллов.*

4. Предположим, что не было момента, когда результативность была ровно 75%. Рассмотрим момент, когда после очередного точного броска результативность впервые стала превышать 75%. Обозначим через k — количество точных бросков и n — общее количество бросков до рассматриваемого момента. Тогда $\frac{k}{n} < \frac{3}{4} \Rightarrow 4k < 3n$ и $\frac{k+1}{n+1} > \frac{3}{4} \Rightarrow 4k > 3n-1$. Следовательно, $3n-1 < 4k < 3n$, что невозможно, так как k — целое число.

5. Ответ: 2. Решение. Одного звена не хватит, потому что из трех получившихся кусков удастся сложить не более 7 комбинаций. Пример на 2: разрежем четвертое и одиннадцатое звено. ♦ *Пример без оценки — из 4 баллов.*

6. Найдя суммы чисел в средних строке и столбце, а также на двух диагоналях, а потом сложив их, получим число, делящееся на 9. Оно равно сумме всех чисел таблицы (которая тоже делится на 9, ибо равна сумме трех сумм по строкам) плюс утроенное число в центре. Получается, что утроенное центральное число делится на 9, а само центральное число — на 3.

7. Ответ: Если конфет в кучках поровну, то выигрывает третий. Если нет — первый. Решение. Пусть конфет в кучках поровну. Тогда первый нарушает это равенство, второй не может его восстановить, а третий — может, потому что иначе получилось бы, что равенство было перед ходом второго. Поскольку в конце игры конфет в кучках поровну (по 0), выиграет третий. Если же конфет вначале в кучках не поровну, первый первым ходом уравняет кучки. После этого он станет третьим в ситуации, когда кучки равны. ♦ *Стратегия без обоснования — 6 баллов и задача не решена. Стратегия только для равных кучек — не больше 4 баллов.*

8. Ответ: 202. Решение. Понятно, что надо обязательно изменить первую и последнюю скобки, а также одну из каждой пары стоящих рядом скобок вида [) и (], которых в нашей последовательности 199. Значит, меньше 201 скобки изменить нельзя. 201 замены тоже не хватит, так как тогда число открывающих скобок не будет равно числу закрывающих. Пример на 202: среди первых 200 скобок меняем все открывающие на закрывающие, среди последних 200 — все открывающие на закрывающие, а также изменяем 200-ю и 201-ю скобки. ♦ *Оценка только на 201 — 2 балла. Только оценка на 202 — 6 баллов и задача не решена. Пример без оценки на 202 — не более 6 баллов (без всякой оценки — 4 балла).*

Лига «Старт», 3 тур, решения и указания для жюри.

1. Предположим, что не было момента, когда результативность была ровно 75%. Рассмотрим момент, когда после очередного точного броска результативность впервые стала превышать 75%. Обозначим через k — количество точных бросков и n — общее количество бросков до рассматриваемого момента. Тогда $\frac{k}{n} < \frac{3}{4} \Rightarrow 4k < 3n$ и $\frac{k+1}{n+1} > \frac{3}{4} \Rightarrow 4k > 3n-1$. Следовательно, $3n-1 < 4k < 3n$, что невозможно, так как k — целое число.

2. Ответ: 24. Решение. Рассмотрим, как должны встать гномы, чтобы получить максимальную сумму. Назовем гномов с ростом 5 дм и выше «высокими». В выплату входит разница ростов всех гномов, стоящих через 1. Если рост гнома в одном случае входит в разницу со знаком «+», а в другом — со знаком минус, то в сумме он сокращается. Остаются те роста, которые входят оба раза с плюсом, и те, которые входят оба раза с минусом, причем их поровну. Сумма максимальна, если и тех, и других ровно по 3, причем с плюсом входят все высокие, а с минусом — все остальные. Отсюда получаем оценку и ответ. Пример: 7 5 1 3 6 4 2.

3. Ответ: 25740. Решение. Заметим, что если вместе с числом n в ряд чисел от 2 до 13 входит число $2n$, написанное на доске число делится на n (иначе оно не делится на $2n$, что противоречит условию). Поэтому число на доске делится на 2, 3, 4, 5 и 6, а, стало быть, также на 10 и 12, а вместе с ними — на 11 и 13. Остаются два варианта: число на доске не делится на 7 и 8 или на 8 и 9. Но $\text{НОД}(2,3,4,5,6,7,10,11,12,13) = 8 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 120120 > 50000$, а вот $\text{НОД}(2,3,4,5,6,9,10,11,12,13) = 4 \times 9 \times 5 \times 11 \times 13 = 25740 < 50000$. При этом $2 \times 25740 > 50000$. Отсюда — ответ.

4. Ответ: 2. Решение. Одного звена не хватит, потому что из трех получившихся кусков удастся сложить не более 7 комбинаций. Пример на 2: разрежем четвертое и одиннадцатое звено. ♦ *Пример без оценки — из 4 баллов.*

5. Найдя суммы чисел в средних строке и столбце, а также на двух диагоналях, а потом сложив их, получим число, делящееся на 9. Оно равно сумме всех чисел таблицы (которая тоже делится на 9, ибо равна сумме трех сумм по строкам) плюс утроенное число в центре. Получается, что утроенное центральное число делится на 9, а само центральное число — на 3.

6. Пусть есть угол, не больший 60° . Поскольку сумма трех остальных меньше 300° , сумма всех четырех — меньше 360° . Противоречие.

7. Ответ: Если конфет в кучках поровну, то выигрывает третий. Если нет — первый. **Решение.** Пусть конфет в кучках поровну. Тогда первый нарушает это равенство, второй не может его восстановить, а третий — может, потому что иначе получилось бы, что равенство было перед ходом второго. Поскольку в конце игры конфет в кучках поровну (по 0), выиграет третий. Если же конфет вначале в кучках не поровну, первый первым ходом уравняет кучки. После этого он станет третьим в ситуации, когда кучки равны. ♦ *Стратегия без обоснования — 6 баллов и задача не решена. Стратегия только для равных кучек — не больше 4 баллов.*

8. Ответ: 1 ч. 45 мин. **Решение.** Пусть автобус едет от дома до школы t минут, а интервал между автобусами — u минут. Тогда $120+t = 15u$, $120-t = 9u$, откуда $t = 15$ мин.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2006 ВЫСШАЯ ЛИГА. БОИ ЗА 1–4 МЕСТА.

1. В разностороннем треугольнике ABC провели биссектрису BD . Точки E и F — основания перпендикуляров, опущенных на прямую BD из точек A и C соответственно, а точка M расположена на стороне BC так, что DM перпендикулярно BC . Докажите, что $\angle EMD = \angle DMF$.

2. Докажите, что $(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 60abc$ при $0 \leq a \leq b \leq c$.

3. Дано натуральное число n , не являющееся точным квадратом. Докажите, что найдутся такие целые неотрицательные числа a и b , что числа $n-a^2$ и b^2-n — натуральные, причем первое из них делится на второе.

4. Точка P — середина стороны BC квадрата $ABCD$. Точки Q и R выбраны на стороне AD таким образом, что $4AQ = 4DR = AD$. Найдите сумму углов ACQ , BRP и ABQ .

5. Натуральное число $n > 1$ назовем *невообразимым*, если оно делится на сумму всех своих простых делителей. Например, число $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ невообразимо, так как оно делится на сумму $2+3+5 = 10$. Докажите, что существует невообразимое число, у которого больше 2006 различных простых делителей.

6. Даны три последовательности букв A и B длины 100. Докажите, что существует еще одна последовательность этих букв длины 100, которая с каждой из данных различается не менее, чем в 50 местах.

7. 29 натуральных чисел выписаны в строчку в возрастающем порядке таким образом, что любые два из них, между которыми стоят ровно шесть других чисел, отличаются не более, чем на 13. Докажите, что какие-то два написанных числа отличаются ровно на 4.

8. Рассмотрим все пары различных натуральных чисел $a < b \leq 1000000$. Сравните количество тех пар, в которых числа a и b отличаются более, чем в два раза, и тех, в которых они отличаются менее, чем в два раза.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2006 ВЫСШАЯ ЛИГА. БОИ ЗА 5–8 МЕСТА. ПЕРВАЯ ЛИГА. БОИ ЗА 1–4 МЕСТА.

1. Точки P и Q — середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ соответственно. Оказалось, что $AB = BC$, а точка P лежит на биссектрисе угла B . Докажите, что $BD = 2PQ$.

2. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на $n = 999\ 999\ 999\ 997$, большее n и содержит только нечетные цифры.

3. Дано натуральное число n , не являющееся точным квадратом. Докажите, что найдутся такие целые неотрицательные числа a и b , что числа $n-a^2$ и b^2-n – натуральные, причем первое из них делится на второе.

4. Точка P – середина стороны BC квадрата $ABCD$. Точки Q и R выбраны на стороне AD таким образом, что $4AQ = 4DR = AD$. Найдите сумму углов ACQ , BRP и ABQ .

5. Даны три последовательности букв A и B длины 100. Докажите, что существует еще одна последовательность этих букв длины 100, которая с каждой из данных различается не менее, чем в 50 местах.

6. Есть три мешка, в каждом из которых находится по 200 монет. Известно, что в первом мешке лежат настоящие монеты, во втором – фальшивые, а в третьем – и те, и другие (быть может, все одинаковые). Фальшивые и настоящие монеты отличаются по весу, но не по виду (фальшивые легче настоящих). Покажите, как за 7 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь можно определить число фальшивых монет в третьем мешке (сами монеты определять не надо).

7. 29 натуральных чисел выписаны в строчку в возрастающем порядке таким образом, что любые 2 из них, между которыми стоят ровно 6 других чисел, отличаются не более, чем на 13. Докажите, что какие-то два написанных числа отличаются ровно на 4.

8. Рассмотрим все пары различных натуральных чисел $a < b \leq 1000000$. Сравните количество тех пар, в которых числа a и b отличаются более, чем в два раза, и тех, в которых они отличаются менее, чем в два раза.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2006
ПЕРВАЯ ЛИГА. БОИ ЗА 5-8 МЕСТА.
ВТОРАЯ ЛИГА

1. На столе лежит 2006 карточек. Петя и Вася по очереди берут карточки со стола, причём разрешается брать либо одну карточку, либо любое простое число карточек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре, если Петя ходит первым?

2. Есть три мешка, в каждом из которых находится по 200 монет. В первом мешке лежат настоящие монеты, во втором — фальшивые, а в третьем — и те, и другие. Фальшивые и настоящие монеты отличаются по весу, но не по виду (фальшивые легче настоящих). Покажите, как за 7 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь можно определить число фальшивых монет в третьем мешке (сами монеты определять не надо)?

3. Докажите, что при любом натуральном k существуют два $(6k-3)$ -значных числа x, y , обладающие следующим свойством: если приписать число x к числу y справа, то получится в шесть раз большее число, чем если бы x приписали слева.

4. Точка P – середина стороны BC квадрата $ABCD$. Точка Q выбрана на стороне AD таким образом, что $4AQ = AD$. Отрезки AC и PQ пересекаются в точке R . Найдите сумму углов ARQ и ABQ .

5. Сумма трёх положительных чисел a, b, c равна единице. Докажите неравенство

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq 1/2.$$

6. Кубик размером $3 \times 3 \times 3$ составлен из k кирпичей в форме прямоугольных параллелепипедов, длины всех ребер которых равны целым числам. При каком наименьшем k можно наверняка утверждать, что среди этих кирпичей найдутся два одинаковых?

7. Даны три последовательности букв A и B длины 100. Докажите, что существует еще одна последовательность этих букв длины 100, которая с каждой из данных различается не менее, чем в 50 местах.

8. Рассмотрим все пары различных натуральных чисел $a < b \leq 1000000$. Сравните количество тех пар, в которых числа a и b отличаются более, чем в два раза, и тех, в которых они отличаются менее, чем в два раза.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2006
ВЫСШАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА. БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. На столе лежит куча из n камней. Двое по очереди берут камни из этой кучи. Своим ходом можно брать любое количество камней из кучи, не большее, чем соперник взял предыдущим ходом. Брать первым ходом все камни нельзя. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень. При каких n игрока, ходящий вторым, может обеспечить себе победу?

2. Есть три мешка, в каждом из которых находится по 200 монет. Известно, что в первом мешке лежат настоящие монеты, во втором – фальшивые, а в третьем – и те, и другие (быть может, все одинаковые). Фальшивые и настоящие монеты отличаются по весу, но не по виду (фальшивые легче настоящих). Покажите, как за 7 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь можно определить число фальшивых монет в третьем мешке (сами монеты определять не надо).

3. Дано натуральное число n , не являющееся точным квадратом. Докажите, что найдутся такие целые неотрицательные числа a и b , что числа $n-a^2$ и b^2-n – натуральные, причем первое из них делится на второе.

4. Точка P – середина стороны BC квадрата $ABCD$. Точки Q и R выбраны на стороне AD таким образом, что $4AQ=4DR=AD$. Найдите сумму углов ACQ , BRP и ABQ .

5. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на $n = 999\ 999\ 999\ 997$, больше n и содержит только нечетные цифры.

6. Даны три последовательности букв A и B длины 100. Докажите, что существует еще одна последовательность этих букв длины 100, которая с каждой из данных различается не менее, чем в 50 местах.

7. 29 натуральных чисел выписаны в строчку в возрастающем порядке таким образом, что любые 2 из них, между которыми стоят ровно 6 других чисел, отличаются не более, чем на 13. Докажите, что какие-то два написанных числа отличаются ровно на 4.

8. Рассмотрим все пары различных натуральных чисел $a < b \leq 1000000$. Сравните количество тех пар, в которых числа a и b отличаются более, чем в два раза, и тех, в которых они отличаются менее, чем в два раза.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2006
ВЫСШАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА. БОИ ЗА 5-8 МЕСТА.
ПЕРВАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА. БОИ ЗА 1-4 МЕСТА

1. В гонке на 10 километров все биатлонисты стартуют одновременно и тратят на стрельбу одинаковое время. В течение гонки спортсмен делает 10 выстрелов, и за каждый промах он должен пробежать дополнительно 200 м. Победителем стал Рафаэль, который тратил на каждый километр на 1 минуту больше, чем Бьорн. Успел ли Рафаэль пробежать трассу за 1 час?

2. Есть три мешка, в каждом из которых находится по 200 монет. В первом мешке лежат настоящие монеты, во втором – фальшивые, а в третьем – и те, и другие. Фальшивые и настоящие монеты отличаются по весу, но не по виду (фальшивые легче настоящих). Покажите, как за 7 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь можно определить число фальшивых монет в третьем мешке (сами монеты определять не надо)?

3. Кубик размером $3 \times 3 \times 3$ составлен из k кирпичей в форме прямоугольных параллелепипедов, длины всех ребер которых равны целым числам. При каком наименьшем k можно наверняка утверждать, что среди этих кирпичей найдутся два одинаковых?

4. Докажите, что при любом натуральном k существуют два $(6k-3)$ -значных числа x, y , обладающие следующим свойством: если приписать число x к числу y справа, то получится в шесть раз большее число, чем если бы x приписали слева.

5. Людоеды племени Ма-Кин-Тош поклоняются компьютеру и любят играть в такую игру: трое из них загадывают по двузначному числу и садятся по кругу. Первый заводит свое число в компьютер, а каждый последующий (по часовой стрелке) либо просит компьютер сложить текущее число со своим (не видя текущего числа), либо останавливает игру и просит компьютер вывести текущее число. Если он после остановки игры правильно называет числа своих соперников, то становится царем, в противном случае его съедают. Ученик 7 класса Пушкин Вася очень хочет стать царем, а людоеды желают съесть Васю (поэтому они не станут останавливать игру сами). Может ли Вася, играющий вторым, гарантировать себе победу?

6. Рассмотрим все пары различных натуральных чисел $a < b \leq 1000000$. Сравните количество тех пар, в которых числа a и b отличаются более, чем в два раза, и тех, в которых они отличаются менее, чем в два раза.

7. Даны 8 последовательностей букв A, B и V длины 100. Докажите, что существует еще одна последовательность этих букв длины 100, которая с каждой из данных различается не менее, чем в 50 местах.

8. Ковер 3×4 разрезали по диагонали. Каждый из получившихся кусков приложили длинной стороной к какой-то из стен комнаты 5×5 . Найдите разность между площадью комнаты, не покрытой ни одним ковром, и площадью комнаты, покрытой двумя коврами.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2006

ПЕРВАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА. БОИ ЗА 5-8 МЕСТА. ВТОРАЯ ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. В гонке на 10 километров все биатлонисты стартуют одновременно и тратят на стрельбу одинаковое время. В течение гонки спортсмен делает 10 выстрелов, и за каждый промах он должен пробежать дополнительно 200 м. Победителем стал Рафаэль, который тратил на каждый километр на 1 минуту больше, чем Бьорн. Успел ли Рафаэль пробежать трассу за 1 час?

2. Есть три мешка, в каждом из которых находится по 200 монет. В первом мешке лежат настоящие монеты, во втором – фальшивые, а в третьем – и те, и другие. Фальшивые и настоящие монеты отличаются по весу, но не по виду (фальшивые легче настоящих). Покажите, как за 7 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь можно определить число фальшивых монет в третьем мешке (сами монеты определять не надо)?

3. Кубик размером $3 \times 3 \times 3$ составлен из k кирпичей в форме прямоугольных параллелепипедов, длины всех ребер которых равны целым числам. При каком наименьшем k можно наверняка утверждать, что среди этих кирпичей найдутся два одинаковых?

4. Если к трехзначному числу x приписать трехзначное число y справа, то получится число, в шесть раз большее, чем если бы y приписали слева. Найдите x и y .

5. Людоеды племени Ма-Кин-Тош поклоняются компьютеру и любят играть в такую игру: трое из них загадывают по двузначному числу и садятся по кругу. Первый заводит свое число в компьютер, а каждый последующий (по часовой стрелке) либо просит компьютер сложить текущее число со своим (не видя текущего числа), либо останавливает игру и просит компьютер вывести текущее число. Если он после остановки игры правильно называет числа своих соперников, то становится царем, в противном случае его съедают. Ученик 7 класса Пушкин Вася очень хочет стать царем, а людоеды желают съесть Васю (поэтому они не станут останавливать игру сами). Может ли Вася, играющий вторым, гарантировать себе победу?

6. Даны 3 последовательности букв *A* и *B* длины 100. Докажите, что существует еще одна последовательность этих букв длины 100, которая с каждой из данных различается не менее, чем в 50 местах.

7. Три человека подозреваются в совершении преступления. Известно, что один из них всегда говорит правду, другой всегда лжет, а третий может говорить и правду, и ложь. Преступник – только один из них. На допросе каждый из них на вопрос "Вы преступник?" ответил "Нет". Затем в том же порядке каждого из них спросили "Верен ли Ваш предыдущий ответ?" и все ответили "Да". Наконец, в том же порядке каждого спросили "Верен ли ответ предыдущего человека?" и все ответили "Нет". Можете ли вы определить преступника?

8. Ковер 3×4 разрезали по диагонали. Каждый из получившихся кусков приложили длинной стороной к какой-то из стен комнаты 5×5 . Найдите разность между площадью комнаты, не покрытой ни одним ковром, и площадью комнаты, покрытой двумя коврами.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 23.02.2006

ЛИГА «СТАРТ»

1. В коробке лежат девять гирь весом 1, 2, ..., 9 граммов. Какое наибольшее количество гирь можно взять из коробки так, чтобы среди взятых гирь вес любой пары отличался от веса любой другой пары .

2. Есть три мешка, в каждом из которых находится по 200 монет. В первом мешке лежат настоящие монеты, во втором – фальшивые, а в третьем – и те, и другие. Фальшивые и настоящие монеты отличаются по весу, но не по виду (фальшивые легче настоящих). Покажите, как за 7 взвешиваний на двухчашечных весах без гирь можно определить число фальшивых монет в третьем мешке (сами монеты определять не надо)?

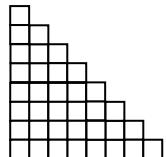
3. Кубик размером $3 \times 3 \times 3$ составлен из k кирпичей в форме прямоугольных параллелепипедов, длины всех ребер которых равны целым числам. При каком наименьшем k можно наверняка утверждать, что среди этих кирпичей найдутся два одинаковых?

4. В гонке на 10 километров все биатлонисты стартуют одновременно и тратят на стрельбу одинаковое время. В течение гонки спортсмен делает 10 выстрелов, и за каждый промах он должен пробежать дополнительно 200 м. Победителем стал Рафаэль, который тратил на каждый километр на 1 минуту больше, чем Бьорн. Успел ли Рафаэль пробежать трассу за 1 час?

5. Людоеды племени Ма-Кин-Тош поклоняются компьютеру и любят играть в такую игру: трое из них загадывают по двузначному числу и садятся по кругу. Первый заводит свое число в компьютер, а каждый последующий (по часовой стрелке) либо просит компьютер сложить текущее число со своим (не видя текущего числа), либо останавливает игру и просит компьютер вывести текущее число. Если он после остановки игры правильно называет числа своих соперников, то становится царем, в противном случае его съедают. Ученик 7 класса Пушкин Вася очень хочет стать царем, а людоеды желают съесть Васю (поэтому они не станут останавливать игру сами). Может ли Вася, играющий вторым, гарантировать себе победу?

6. «Лесенкой» размером $n \times n$ назовем фигуру вида изображенной на рисунке, длина основания которой составляет n клеточек. (На рисунке – «лесенка» размером 8×8).

При каких n «лесенку» можно разрезать на фигурки вида  и 



7. Три человека подозреваются в совершении преступления. Известно, что один из них всегда говорит правду, другой всегда лжет, а третий может говорить и правду, и ложь. Преступник – только один из них. На допросе каждый из них на вопрос "Вы преступник?" ответил "Нет". Затем в том же порядке каждого из них спросили "Верен ли Ваш предыдущий ответ?" и все ответили "Да". Наконец, в том же порядке каждого спросили "Верен ли ответ предыдущего человека?" и все ответили "Нет". Можете ли вы определить преступника?

8. На Дне рождения Тани ее старший брат – двадцатилетний Вася обнаружил, что если любой из присутствующих уйдет, то оставшиеся смогут разбиться на две группы так, что сумма числа полных лет членов первой группы будет равна сумме числа полных лет членов второй группы. Сколько лет исполнилось Тане?

XXVII Уральский турнир

Старшая группа Высшая лига, подгруппа "А"

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Киров 8-1		66:24	61:35	70:12	6	1
2	ЮМШ	24:66		54:16	24:24	3	2
3	Омск-8	35:61	16:54		39:33	2	3
4	Казань	12:70	24:24	33:39		1	4

Высшая лига, подгруппа "В"

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Пермь 146-8		34:38	50:12	53:27	4	2
2	Снежинск 127 8-7	38:34		55:16	60:24	6	1
3	Екатеринбург 9-8	12:50	16:55		18:62	0	4
4	Школа Пифагора	27:53	24:60	62:18		2	3

Первая лига, подгруппа "А"

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Магнитогорск 8		60:24	37:59	69:22	4	2
2	Оренбург	24:60		28:57	13:47	0	4
3	Дзержинск	59:37	57:28		40:19	6	1
4	Антрапоники	22:69	47:13	19:40		2	3

Первая лига, подгруппа "В"

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Курган-8		23:46	56:24	13:77	2	2
2	Саров	46:23		28:60	24:61	2	4
3	Набережные Челны-8	24:56	60:28		21:71	2	3
4	Пермь 9-8-1	77:13	61:24	71:21		6	1

Блиц-бой: Курган-8 - Набережные Челны-8 - Саров 6:6:2

Вторая лига

	Команда	1	2	3	4	5	6	Очки
1	Киров 8-2		:	29:61	38:23		63:15	4
2	Красноярск-8	:		58:28		46:36	48:48	5
3	ВолКИ	61:29	28:58		38:25	:		4
4	Пермь 9-8-2	23:38		25:38		60:17	:	2
5	Томск-8		36:46	:	17:60		43:33	2
6	Нижний Тагил	15:63	48:48		:	33:43		1

Младшая группа
Высшая юниорская лига, подгруппа "А"

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Санкт-Петербург		84:0	51:39	65:10	6	1
2	Магнитогорск 7-1	0:84		40:27	45:24	4	2
3	Набережные Челны 7-1	39:51	27:40		31:18	2	3
4	Нижнекамск 7	10:65	24:45	18:31		0	4

Высшая юниорская лига, подгруппа "В"

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Пермь-17		24:60	36:33	26:18	3	2
2	Курган 7	60:24		82:5	93:0	6	1
3	Пермь 146-7	33:36	5:82		9:30	1	4
4	Ярославль	18:26	0:93	30:9		2	3

Первая юниорская лига, подгруппа "А"

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Подмосковье		76:17	34:42	66:30	4	1
2	Екатеринбург-37	17:76		26:36	14:46	0	4
3	Челябинск	42:34	36:26		18:78	4	2
4	Пермь 9-7-1	30:66	46:14	78:18		4	3

Блиц-бой: Подмосковье - Челябинск - Пермь 9-7-1

13:9:6

Первая юниорская лига, подгруппа "В"

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Киров 7		67:20	38:42	70:0	4	2
2	Долгопрудный	20:67		20:51	66:16	2	3
3	Набережные Челны 7-2	42:38	51:20		53:23	6	1
4	Ижевск	0:70	16:66	23:53		0	4

Вторая юниорская лига

	Команда	1	2	3	4	5	6	Очки
1	Озерск 7		51:27		77:5		56:3	4
2	Барнаул	27:51		32:28		38:2		2
3	Магнитогорск 7-2		28:32		59:7		32:50	2
4	Иркутск	5:77		7:59		32:24		2
5	Томск 6-7		2:38		24:32		30:16	0
6	Пермь 9-7-2	3:56		50:32		16:30		2

Лига "Старт", подгруппа "А"

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Магнитогорск-6		27:26	23:44	22:55	1	4
2	Курган-6	26:27		24:52	54:30	3	3
3	Киров-6	44:23	52:24		23:41	4	2
4	Красноярск-6	55:22	30:54	41:23		4	1

Лига "Старт", подгруппа "В"

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Екатеринбург 9-6		48:32	38:8	39:41	5	1
2	Санкт-Петербург ГДТЮ	32:48		48:32	46:18	4	2
3	Нижнекамск-6	8:38	32:48		33:46	0	4
4	Киров-5-6	41:39	18:46	46:33		3	3

РЕЗУЛЬТАТЫ ФИНАЛЬНЫХ БОЁВ

Высшая лига

За 1 место: Киров 8-1 - Снежинск 127 8-7 69:27

За 3 место: Пермь 146-8 - ЮМШ 45:47

Блиц Пермь - ЮМШ: 17:24.

За 5 место: Омск-8 - Школа Пифагора 48:24

За 7 место: Екатеринбург 9-8 - Казань 30:35

Первая лига

За 1 место: Пермь 9-8-1 - Дзержинск 86:3

За 3 место: Курган-8 - Магнитогорск 8 48:42

За 5 место: Набережные Челны-8 - Антропоники 47:9

За 7 место: Саров - Оренбург 32:28

Вторая лига

Киров 8-2 - Красноярск-8 40:28, Томск-8 - ВолКИ 37:37, Нижний Тагил - Пермь 9-8-2

Высшая юниорская лига

За 1 место: Санкт-Петербург - Курган 7 62:32

За 3 место: Пермь-17 - Магнитогорск 7-1 38:22

За 5 место: Набережные Челны 7-1 - Ярославль 60:24

За 7 место: Нижнекамск-7 - Пермь 146-7 47:12

Первая юниорская лига

За 1 место: Подмосковье - Набережные Челны 7-2 42:40

За 3 место: Киров 7 - Челябинск 50:40

За 5 место: Пермь 9-7-1 - Долгопрудный 70:23

За 7 место: Ижевск - Екатеринбург-37 33:22

Вторая юниорская лига

За 1 место: Озерск 7 - Барнаул 36:24

За 3-4 место: Магнитогорск 7-2 - Томск 6-7 43:23

За 3-4 место: Иркутск - Пермь 9-7-2 45:10

Лига "Старт"

За 1 место: Екатеринбург 9-6 - Красноярск-6 40:18

За 3 место: Санкт-Петербург ГДТЮ - Киров-6 47:16

За 5 место: Киров-5-6 - Курган-6 18:48

За 7 место: Магнитогорск-6 - Нижнекамск-6 24:15