

XVII УРАЛЬСКИЙ (IX КИРОВСКИЙ) ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ

16–22 ФЕВРАЛЯ 2001 ГОДА

Ялуб.рф

КИРОВ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КАРУСЕЛЬ

Правила “Математической карусели”

Математическая карусель – это командное соревнование по решению задач. Побеждает в нем команда, набравшая наибольшее число очков. Задачи решаются на двух рубежах – исходном и зачетном, но очки начисляются только за задачи, решенные на зачетном рубеже. В начале игры все члены команды располагаются на исходном рубеже, причем им присвоены номера от 1 до 6. По сигналу ведущего команды получают задачу и начинают ее решать. Если команда считает, что задача решена, ее представитель, имеющий номер 1, предъявляет решение судье. Если оно верное, игрок №1 переходит на зачетный рубеж и получает задачу там, а члены команды, оставшиеся на исходном рубеже, тоже получают новую задачу. В дальнейшем члены команды, находящиеся на исходном и зачетном рубежах, решают разные задачи независимо друг от друга.

Чтобы понять следующую часть правил, надо представить себе, что на каждом рубеже находящиеся на нем члены команды выстроены в очередь. Перед началом игры на исходном рубеже они идут в ней в порядке номеров. Если члены команды, находящиеся на каком-либо из двух рубежей, считают, что они решили очередную задачу, решение предъявляет судье игрок, стоящий в очереди первым. Если решение правильное, то с исходного рубежа этот игрок переходит на зачетный, а на зачетном возвращается на свое место в очереди. Если решение неправильное, то на исходном рубеже игрок возвращается на свое место в очереди, а с зачетного переходит на исходный. Игрок, перешедший с одного рубежа на другой, становится в конец очереди. И на исходном, и на зачетном рубежах команда может в любой момент отказаться от решения задачи. При этом задача считается нерешенной.

После того, как часть команды, находящаяся на каком-либо из двух рубежей, рассказала решение очередной задачи или отказалась решать ее дальше, она получает новую задачу. Если на рубеже в этот момент нет ни одного участника, задача начинает решаться тогда, когда этот участник там появляется.

За первую верно решенную на зачетном рубеже задачу команда получает 3 балла. Если команда на зачетном рубеже верно решает несколько задач подряд, то за каждую следующую задачу она получает на 1 балл больше, чем за предыдущую. Если же очередная задача решена неверно, то цена следующей задачи зависит от ее цены следующим образом. Если цена неверно решенной задачи была больше 6 баллов, то следующая задача стоит 5 баллов. Если цена неверно решенной задачи была 4, 5 или 6 баллов, то следующая задача стоит на балл меньше. Если же неверно решенная задача стоила 3 балла, то следующая задача тоже стоит 3 балла.

Игра для команды оканчивается, если

а) кончилось время, или

б) кончились задачи на зачетном рубеже, или

в) кончились задачи на исходном рубеже, а на зачетном рубеже нет ни одного игрока.

Время игры, количество исходных и зачетных задач заранее оговаривается.

Игра оканчивается, если она закончилась для всех команд.

Задания математической карусели (младшие)

1.(Исход, младшие) **Парамадисвара**

Найти число, которое, будучи умножено на 3, а затем разделено на 5, увеличено на 6, после чего из него извлечён квадратный корень, отнята единица и результат возведён в квадрат, даст 4.

2.(Исход, младшие) **Лебег**

“Решить в натуральных числах систему: $\begin{cases} 2x+3y+7z=131 \\ 2x+3y+8z=140 \end{cases}$.” Сколько всего решений у этой системы?

3.(Исход, младшие) **Абен-Дреат**

Какое число, будучи прибавлено к девяти, даст свой ушестерённый квадратный корень?

4.(Исход, младшие) **Леонардо Фибоначчи**

Некто купил 30 птиц за 30 монет, из числа этих птиц за каждые 3 воробья заплачена 1 монета, за каждые 2 горлицы – также 1 монета, и, наконец, за каждого голубя – по 2 монеты. Сколько птиц каждой породы?

5.(Исход, младшие) **рукопись Мюнхенского собрания**

Некто имеет работников и деньги. Если он даст каждому работнику 5 монет, у него останется 30, а если 7, то не хватит 30. Спрашивается, сколько у него работников?

6.(Исход, младшие) **Огюстен Луи Коши**

Разложить дробь $\frac{2x}{x^2 - 1}$ на сумму двух дробей вида $\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$.

7.(Исход, младшие) **Христоф Рудольф**

Некто согласился работать с условием получить в конце года одежду и 10 флоринов. Но по истечении 7 месяцев прекратил работу и при расчете получил одежду и 2 флорина. Во сколько ценилась одежда?

8.(Исход, младшие) **рукописный сборник «Задачи для изощренного ума»**

Собака гонится за кроликом, находящимся в 150 футах от неё. Она делает прыжок в 9 футов каждый раз, когда кролик прыгает на 7 футов. Сколько прыжков должна сделать собака, чтобы догнать кролика?

9.(Исход, младшие) **Ал-Кархи**

Найти сумму всех членов прогрессии: 3, 7, 11, 15, …, 79

10.(Исход, младшие) **Леонард Эйлер**

Найти число, четвертая степень которого, деленная на половину самого числа и увеличенная на $14\frac{1}{4}$, равнялась бы 100.

11.(Исход, младшие) **Адам Ризе**

Трое выиграли некоторую сумму денег. На долю первого пришлась 1/4 этой суммы, на долю второго – 1/7, а на долю третьего – 17 флоринов. Как велик весь выигрыш?

12.(Исход, младшие) **Желен**

Какое число следует прибавить к числителю и знаменателю дроби 3/11, чтобы получить дробь, равную 5/9 ?

13. (Исход, младшие) ***Китай***

Имеется 9 слитков золота и 11 слитков серебра. Их взвесили (золото – на левую чашу весов, серебро – на правую), и весы остались в равновесии. После того, как слиток золота переложили на правую чашу, а слиток серебра – на левую, левая чаша стала легче на 13 ланов. Каков вес одного слитка золота?

14.(Исход, младшие) **Бега Эддин**

Найти число, которое, будучи увеличено двумя третями самого себя и единицей, даёт 10.

1. (Зачёт, младшие) **Ибн-Эзра Авраам бен-Меир, трактат «Книга о числе».**

"*Если диаметр круга единица, то длина нити, охватывающей окружность, выражается целым с дробью:* $3 + \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{17}{60^3} + \frac{8}{60^4}$ ". Определить до какого десятичного знака точно это приближение для π.

2. (Зачёт, младшие) **Леонард Эйлер**

Каждый из нескольких купцов внес в общее дело 100 раз столько рублей, сколько было купцов. Они отправили в Венецию доверенного, получавшего с каждой сотни рублей число рублей, вдвое большее числа купцов. Спрашивается: сколько было купцов, если доверенный получил 2662 рубля?

3. (Зачёт, младшие) **Баше де Мезирак**

Каким наименьшим числом гирь и какого веса можно отвесить на весах любое целое число фунтов от 1 до 40 при условии, что при взвешивании гири можно класть на обе чаши весов?

4. (Зачёт, младшие) **Луи Пьер Бурдон**

Число состоит из трех цифр, сумма этих цифр равна 11, цифра единиц вдвое больше цифры сотен. Если прибавить к искомому числу 297, то получается число, написанное теми же цифрами, как у искомого, но в обратном порядке. Какое число имеет эти свойства?

5. (Зачёт, младшие) **Бхаскара**

Стая обезьян забавлялась: квадрат одной восьмой части их резвился в лесу, остальные двенадцать кричали на вершине холмика. Скажи мне: сколько было всего обезьян?

6. (Зачёт, младшие) **Ал-Кархи**

Найти площадь прямоугольника, основание которого вдвое больше высоты, а площадь численно равна периметру.

7. (Зачёт, младшие) **Леонардо Фибоначчи**

Семь старух отправляются в Рим. У каждой по семи мулов, каждый мул несёт по семи мешков, в каждом мешке по семи хлебов, в каждом хлебе по семи ножей, каждый нож в семи ножнах. Сколько всех предметов?

8. (Зачёт, младшие) **рукопись Мюнхенского собрания** Лестница длиной 13 футов наклонно приставлена к стене, нижняя часть ее при этом удалена от стены на 5 футов. Насколько спустится она по стене, если её основание отодвинуть ещё на 7 футов?

9. (Зачёт, младшие) **Диофант Александрийский** Найти три числа так, чтобы произведение любой пары их, увеличенное их суммой, равнялось бы соответственно 8, 15, 24.

10. (Зачёт, младшие) **Метродор**

*Эпитафия Диофанту:"*Диофант провел шестую часть жизни в детстве, двенадцатую в юности; после седьмой части, проведенной в бездетном супружестве, и ещё 5 лет у него родился сын, проживший в два раза меньше отца. После смерти сына Диофант прожил только 4 года. Скольких лет Диофант умер?"

11. (Зачёт, младшие) **Авиценна**

"Если число, делённое на 9, даёт в остатке 2, 5 или 8, то куб его, делённый на 9, даёт в остатке …". Что?

12. (Зачёт, младшие) **Алкуин**

"Разделить сто мер пшеницы между 100 лицами так, чтобы каждый мужчина получил 3, каждая женщина – 2, а каждое дитя – ½ меры. Сколько мужчин, женщин и детей?" Сколько решений имеет эта задача?

***13. (Зачёт, младшие*)** **Сильвестр Лакруа**

Один фонтан наполняет бассейн в $2\frac{1}{2}$ часа, другой – в $3\frac{3}{4}$ часа. Во сколько времени оба фонтана, действуя вместе, наполнят бассейн?

14. (Зачёт, младшие) **Луи Франкер**

"Сколько раз пробьют часы в продолжение 12 часов, если они отбивают и получасы?" *(Часы – соответствующее число раз, а получасы – по разу).*

15. (Зачёт, младшие) **Регимонтан (Иоганн Мюллер)** «*Найти число, которое при делении на 17, 13 и 10 даёт соответственно остатки 15, 11 и 3*.» Найдите такое наименьшее натуральное число.

16. (Зачёт, младшие) **Бхаскара**

«$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{...}+\sqrt{...}+\sqrt{...}$»

Вставьте вместо многоточий натуральные числа.

17. (Зачёт, младшие) **Этьен Безу**

Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал её за 24 пистоля. При этой продаже он теряет столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается: за какую сумму он ее купил?

18. (Зачёт, младшие) **Баше де Мезирак**

Рота пехоты подходит к берегу реки, но оказывается, что мост сломан, брода нет. У берега два мальчика играют в челноке, но таком маленьком, что в нем может переправиться только

один взрослый или двое детей. Спрашивается, как с помощью этого челнока может вся рота переправиться на другой берег?

19. (Зачёт, младшие) **Жозеф Бертран**

“Доказать, что

$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\ldots$”

Какое целое число здесь пропущено?

20. (Зачёт, младшие)

За длину окружности **вавилоняне** принимали периметр вписанного в эту окружность правильного шестиугольника. Найти приближение для π, которым пользовались вавилоняне.

15. (Зачёт, младшие) **Регионтан (Иоганн Мюллер)** «*Найти число, которое при делении на 17, 13 и 10 даёт соответственно остатки 15, 11 и 3*.» Найдите такое наименьшее натуральное число.

16. (Зачёт, младшие) **Бхаскара**

«$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{\ldots}+\sqrt{\ldots}+\sqrt{\ldots}$»

Вставьте вместо многоточий натуральные числа.

17. (Зачёт, младшие) **Этьен Безу**

Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал её за 24 пистоля. При этой продаже он теряет столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается: за какую сумму он ее купил?

18. (Зачёт, младшие) **Баше де Мезирак**

Рота пехоты подходит к берегу реки, но оказывается, что мост сломан, брода нет. У берега два мальчика играют в челноке, но таком маленьком, что в нем может переправиться только один взрослый или двое детей. Спрашивается, как с помощью этого челнока может вся рота переправиться на другой берег?

19. (Зачёт, младшие) **Жозеф Бертран**

“Доказать, что

$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\ldots$”

Какое целое число здесь пропущено?

20. (Зачёт, младшие)

За длину окружности **вавилоняне** принимали периметр вписанного в эту окружность правильного шестиугольника. Найти приближение для π, которым пользовались вавилоняне.

Ответы к ИСХОДНЫМ задачам (МЛАДШИЕ)

1. 5
2. 12 решений
3. 9
4. 9 воробьёв, 10 горлиц и 11 голубей
5. 30 работников
6. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$
7. $9\frac{1}{5}=9{,}2$ флорина
8. 75 прыжков
9. 820
10. 7/2 = 3,5
11. 28 флоринов
12. 7
13. 35,75 лана
14. $5\frac{2}{5}=\frac{27}{5}=5{,}4$

Ответы к ЗАЧЕТНЫМ задачам (МЛАДШИЕ)

1. точно до **второго** десятичного знака
2. 11 купцов
3. 4 гири – 1, 3, 9 и 27 фунтов
4. 326
5. 16 или 48 обезьян
6. 18
7. 137 256 предметов
8. 7 футов
9. $\frac{11}{4},\frac{7}{5},\frac{17}{3}$
10. 84 года
11. 8
12. 7 решений
13. за $1\frac{1}{2}$=1,5 часа
14. 90 раз

Лубов.рф

15. 1103
16. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ **Будьте внимательны!**
17. 40 или 60 пистолей

18. Едут дети, один остается, другой обратно, едет солдат, обратно едет лодка с мальчиком, снова едут дети на противоположный берег и т.д.

19. 4 20. $\pi=3$

Задания математической карусели (старшие)

1.(Исход, старшие) **Жозеф Бертран**

"Доказать, что

$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\ldots$"

Какое целое число здесь пропущено?

2.(Исход, старшие) **рукопись Мюнхенского собрания**

Лестница длиной 13 футов наклонно приставлена к стене, нижняя часть ее при этом удалена от стены на 5 футов. Насколько спустится она по стене, если её основание отодвинуть ещё на 7 футов?

3.(Исход, старшие) **Абен-Дреат**

Какое число, будучи прибавлено к девяти, даст свой ушестерённый квадратный корень?

4.(Исход, старшие) **Лебег**

"Решить в натуральных числах систему: $\begin{cases}2x+3y+7z=131\\2x+3y+8z=140\end{cases}$." Сколько всего решений у этой системы?

5.(Исход, старшие) **Луи Пьер Бурдон**

Число состоит из трех цифр, сумма этих цифр равна 11, цифра единиц вдвое больше цифры сотен. Если прибавить к искомому числу 297, то получается число, написанное теми же цифрами, как у искомого, но в обратном порядке. Какое число имеет эти свойства?

6.(Исход, старшие) **Желен**

Какое число следует прибавить к каждому из членов дроби 3/11, чтобы получить дробь, равную 5/9 ?

7.(Исход, старшие) **Христоф Рудольф**

Некто согласился работать с условием получить в конце года одежду и 10 флоринов. Но по истечении 7 месяцев прекратил работу и при расчете получил одежду и 2 флорина. Во сколько ценилась одежда?

8.(Исход, старшие) **Авиценна**

"Если число, делённое на 9, даёт в остатке 2, 5 или 8, то куб его, делённый на 9, даёт в остатке …". Что?

9.(Исход, старшие) **Ал-Кархи**

Найти последний член и сумму 20 членов прогрессии: 3, 7, 11, 15, …

10.(Исход, старшие) **Огюстен Луи Коши**

Разложить дробь $\frac{2x}{x^2-1}$ на сумму двух дробей вида $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$.

11.(Исход, старшие) **Адам Ризе**

Трое выиграли некоторую сумму денег. На долю первого пришлась 1/4 этой суммы, на долю второго – 1/7, а на долю третьего – 17 флоринов. Как велик весь выигрыш?

12.(Исход, старшие) **Парамадисвара**

Найти число, которое, будучи умножено на 3, а затем разделено на 5, увеличено на 6, после чего из него извлечён квадратный корень, отнята единица и результат возведён в квадрат, даст 4.

13.(Исход, старшие) **Сильвестр Лакруа**

Один фонтан наполняет бассейн в $2\frac{1}{2}$ часа, другой – в $3\frac{3}{4}$ часа. Во сколько времени оба фонтана, действуя вместе, наполнят бассейн?

14.(Исход, старшие) **Бега Эддин**

Найти число, которое, будучи увеличено двумя третями самого себя и единицей, даёт 10.

1. (Зачёт, старшие) **Ибн-Эзра Авраам бен-Меир, трактат «Книга о числе».**

"*Если диаметр круга единица, то длина нити, охватывающей окружность, выражается целым с дробью:* $3+\frac{8}{60}+\frac{34}{60^2}+\frac{17}{60^3}+\frac{8}{60^4}$ *".* Определить до какого десятичного знака точно это приближение для π.

2. (Зачёт, старшие) **Леонард Эйлер**

Несколько купцов внесли в общее дело 100 раз столько рублей, сколько было купцов. Они отправили в Венецию доверенного, получавшего с каждой сотни рублей число рублей, вдвое большее числа купцов. Спрашивается: сколько было купцов, если доверенный получил 2662 рубля?

3. (Зачёт, старшие) **Баше де Мезирак**

Каким наименьшим числом гирь и какого веса можно отвесить на весах любое целое число фунтов от 1 до 40 при условии, что при взвешивании гири можно класть на обе чаши весов?

4. (Зачёт, старшие) **Джироламо Кардано**

Решить уравнение:

$$13x^2 = x^4 + 2x^3 + 2x + 1$$

5. (Зачёт, старшие) **Бхаскара**

Стая обезьян забавлялась: квадрат одной восьмой части их резвился в лесу, остальные двенадцать кричали на вершине холмика. Скажи мне: сколько было всего обезьян?

6. (Зачёт, старшие) **Эпафродит**

Дан треугольник со сторонами 9, 12, 15. Найти диаметр круга, вписанного в этот треугольник.

7. (Зачёт, старшие) **Леонардо Фибоначчи**

Семь старух отправляются в Рим. У каждой по семи мулов, каждый мул несёт по семи мешков, в каждом мешке по семи хлебов, в каждом хлебе по семи ножей, каждый нож в семи ножнах. Сколько всех предметов?

8. (Зачёт, старшие) **Метродор**

*Эпитафия Диофанту:"*Диофант провел шестую часть жизни в детстве, двенадцатую в юности; после седьмой части, проведенной в бездетном супружестве, и ещё 5 лет у него родился сын, проживший в два раза меньше отца. После смерти сына Диофант прожил только 4 года. Скольких лет Диофант умер?"

9. (Зачёт, старшие) **Диофант Александрийский** Найти три числа так, чтобы произведение любой пары их, увеличенное их суммой, равнялось бы соответственно 8, 15, 24.

10. (Зачёт, старшие) **Брамагупта**

«*Квадрат хорды, перпендикулярной к диаметру, деленный на учетверённый любой отрезок диаметра и сложенный с тем же отрезком, равняется …?*» Чему?

11. (Зачёт, старшие) **Китай**

Имеется 9 слитков золота и 11 слитков серебра. Их взвесили (золото – на левую чашу весов, серебро – на правую), и весы остались в равновесии. После того, как слиток золота переложили на правую чашу, а слиток серебра – на левую, левая чаша стала легче на 13 ланов. Каков вес одного слитка золота?

12. (Зачёт, старшие) **Алкуин**

"Разделить сто мер пшеницы между 100 лицами так, чтобы каждый мужчина получил 3, каждая женщина – 2, а каждое дитя – ½ меры. Сколько мужчин, женщин и детей?" Сколько решений имеет эта задача?

***13. (Зачёт, старшие*)** **Луи Франкер**

"Сколько раз пробьют часы в продолжение 12 часов, если они отбивают и получасы?" *(Часы – соответствующее число раз, а получасы – по разу).*

14. (Зачёт, старшие) **Лука де Бургo (Пачиоло)**

Дается радиус (4) вписанного в треугольник круга и отрезки 6 и 8, на которые точка касания делит одну сторону треугольника. Найти две другие стороны.

15. (Зачёт, старшие) **Регимонтан (Иоганн Мюллер)** «*Найти число, которое при делении на 17, 13 и 10 даёт соответственно остатки 15, 11 и 3*.» Найдите такое наименьшее натуральное число.

16. (Зачёт, старшие) **Бхаскара**

«$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{...}+\sqrt{...}+\sqrt{...}$»

Вставьте вместо многоточий натуральные числа.

17. (Зачёт, старшие) **Этьен Безу**

Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал её за 24 пистоля. При этой продаже он теряет столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается: за какую сумму он ее купил?

18. (Зачёт, старшие) **Баше де Мезирак**

Рота пехоты подходит к берегу реки, но оказывается, что мост сломан, брода нет. У берега два мальчика играют в челноке, но таком маленьком, что в нем может переправиться только один взрослый или двое детей. Спрашивается, как с помощью этого челнока может вся рота переправиться на другой берег?

19. (Зачёт, старшие) **Ал-Кархи**

Найти число, которое от умножения на $3+\sqrt{5}$ дает единицу.

20. (Зачёт, старшие)

За длину окружности **вавилоняне** принимали периметр вписанного в эту окружность правильного шестиугольника. Найти приближение для π, которым пользовались вавилоняне.

15. (Зачёт, старшие) **Регимонтан (Иоганн Мюллер)** «*Найти число, которое при делении на 17, 13 и 10 даёт соответственно остатки 15, 11 и 3*.» Найдите такое наименьшее натуральное число.

16. (Зачёт, старшие) **Бхаскара**

«$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{...}+\sqrt{...}+\sqrt{...}$»

Вставьте вместо многоточий натуральные числа.

17. (Зачёт, старшие) **Этьен Безу**

Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал её за 24 пистоля. При этой продаже он теряет столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается: за какую сумму он ее купил?

18. (Зачёт, старшие) **Баше де Мезирак**

Рота пехоты подходит к берегу реки, но оказывается, что мост сломан, брода нет. У берега два мальчика играют в челноке, но таком маленьком, что в нем может переправиться только один взрослый или двое детей. Спрашивается, как с помощью этого челнока может вся рота переправиться на другой берег?

19. (Зачёт, старшие) **Ал-Кархи**

Найти число, которое от умножения на $3+\sqrt{5}$ дает единицу.

20. (Зачёт, старшие)

За длину окружности **вавилоняне** принимали периметр вписанного в эту окружность правильного шестиугольника. Найти приближение для π, которым пользовались вавилоняне.

Ответы к ИСХОДНЫМ задачам (СТАРШИЕ)

1. 4
2. 7 футов
3. 9
4. 12 решений
5. 326
6. 7

Ответы к ЗАЧЕТНЫМ задачам (СТАРШИЕ)

1. точно до **второго** десятичного знака
2. 11 купцов
3. 4 гири – 1, 3, 9 и 27 фунтов
4. $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$ **Будьте внимательны!**
5. 16 или 48 обезьян
6. 6

Репетитор.рф

7. $9\frac{1}{5} = 9{,}2$ флорина
8. 8
9. 820
10. $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$
11. 28 флоринов
12. 5
13. за 1,5 часа
14. 5,4

7. 137 256 предметов
8. 84 года
9. $\frac{11}{4}, \frac{7}{5}, \frac{17}{3}$
10. диаметру
11. $35\ {}^{3}\!/_{4} = 35.75$ лана
12. 7 решений
13. 90 раз
14. 13 и 15
15. 1103
16. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ **Будьте внимательны!**
17. 40 или 60 пистолей

18. Едут дети, один остается, другой обратно, едет солдат, обратно едет лодка с мальчиком, снова едут дети на противоположный берег и т.д.

19. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ Будьте внимательны!
20. **π=3**

Математическая карусель

Старшая лига		**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**сумма**	**место**
1	Киров-8-2	3	4	5	-	5	6	7	8	-	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	**148**	1
2	Ижевск-41	-	3	-	-	3	4	5	6	-	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	**131**	2-3
3	Казань-1	3	4	5	6	7	8	9	10	-	5	6	-	5	6	7	8	9	10	11	12	**131**	2-3
4	Екатеринбург-8	3	4	5	-	5	6	7	8	9	10	11	-	5	6	-	5	6	7	8	9	**114**	4
5	Киров-8-1	3	4	5	-	5	6	7	8	9	10	11	12	-	-	4	5	-	5	6	7	**107**	5
6	Набережные Челны-8	-	3	4	-	4	5	6	7	8	-	5	6	7	8	-	5	6	7	8	9	**98**	6
7	Ижевск-30	-	3	-	-	3	4	5	6	-	5	6	7	8	9	10	-	5	6	7		**84**	7
8	Пермь-146	3	4	5	6	7	-	5	6	-	5	6	7	-	5							**59**	8
9	Снежинск-127	3	4	-	4	5	6	7	8	-	5	6	-	5	-	-						**53**	9
10	Москва-Л2Ш	3	4	5	6	7	-	5	6	-	-	-	-	3	-	-	-					**39**	10
11	Озерск	-	-	3	-	3	4	5	6	-	-	4	5	6	-							**36**	11
12	Барнаул	3	4	5	-	-	4	5	6	-	-	4	-	-	-							**31**	12
13	Казань-2	-	3	-	-	-	3	4	5	-	-	-	-	3	-	3	-	-	3	4	-	**28**	13-14
14	Тобольск	3	4	-	-	3	4	5	6	-	-	3										**28**	13-14
15	Снежинск-125	3	4	-	-	3	4	-	3	-	3	-	-	-								**20**	15
16	Тюмень	-	-	-	-	-	3	-	3	-	-	-										**6**	16

Юниорская лига		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	сумма	место
1	Челябинск	3	4	-	4	5	6	7	8	-	5	6	7	8	9	10	11	12	13	-	5	**123**	1
2	Санкт-Петербург	3	4	5	-	5	6	7	8	-	5	6	-	5	6	7	-	-	4	-	4	**75**	2
3	Екатеринбург-6	3	4	-	4	-	4	-	4	-	4	5	-	5	6	7	8	-	5	6	7	**72**	3
4	Глазов	-	3	-	3	4	5	-	5	-	5	6	-	5	6	7	-	-	4	5	6	**64**	4
5	Набережные Челны-6-7	3	4	5	6	7	8	-	5	-	5	6	-	5	-	-	-	-	3	-	3	**60**	5
6	Киров-7	-	3	-	3	-	3	4	5	-	5	6	-	5	6	7	-	-	4	5	-	**56**	6
7	Саров	3	4	-	4	-	4	-	4	-	4	5	-	5	6	7	-	-	4	-	4	**54**	7
8	Киров-6	-	3	4	5	-	5	-	5	-	5	6	-	5	6	7	-					**51**	8
9	Ижевск-29	-	3	-	3	-	3	-	3	-	3	4	5	6	7	8	-					**45**	9
10	Казань-7	-	3	-	3	-	3	-	3	-	3	-	-	3	4	5	-	5	6	-	5	**43**	10
11	Нижний Новгород - Киров	3	4	-	4	-	4	-	4	-	4	5	-	5	-	5	-					**38**	11
12	Пермь-9	3	4	-	4	-	4	5	6	-	5	6	-									**37**	12
13	Москва-7	-	3	-	-	-	3	-	3	-	3	4	-	-	3	-						**19**	13
14	Екатеринбург-7	3	4	-	4	-	4	-	-	-	3	-	-									**18**	14
15	Салават	3	4	-	-	-	3	-	-	-	3	4	-									**17**	15
16	Москва-ММФ	-	3	-	3	-	3	-	3	-	-											**12**	16

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 17.02.2001
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. На кошачьей выставке в ряд сидели 19 кошек и 10 котов, причем рядом с каждой кошкой сидел кот, который был толще, чем она. Докажите, что рядом с каждым котом сидела кошка, которая была тоньше, чем он.

2. При каком наибольшем n по кругу можно расставить n различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних?

3. В клетках квадратной таблицы 10×10 стоят ненулевые цифры. В каждой строчке и в каждом столбце из всех стоящих там цифр составлено 10-значное число. Может ли оказаться, что из получившихся 20 чисел ровно одно не делится на 3?

4. Поля клетчатой доски размером 8×8 будем по очереди закрашивать в красный цвет так, чтобы после закрашивания каждой следующей клетки фигура, состоящая из закрашенных клеток, имела ось симметрии. Покажите, как можно, соблюдая это условие, закрасить 28 клеток. В качестве ответа расставьте на тех клетках, которые должны быть закрашены, числа от 1 до 28 в том порядке, в котором проводилось закрашивание.

5. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает серединный перпендикуляр стороны AB в точке X, серединный перпендикуляр стороны AC – в точке Y, а описанную окружность треугольника – в точке Z. Точки A, X, Y, Z лежат на биссектрисе в порядке перечисления. Докажите, что $AX=YZ$.

6. Квадратный материк разделен на 19 стран в форме выпуклых многоугольников, причем нет точек, в которых сходились бы границы четырех или больше стран. Из всяких же трех границ, сходящихся в одной точке, одна закрыта, а две открыты для проезда. Докажите, что невозможно объехать все эти страны, побывав в каждой по одному разу и вернуться в исходную страну.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 7 КЛАССА

1. В книге рекордов Гиннесса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{377}-1$. Не ошибка ли это?

2. Приходя в тир, игрок вносит в кассу 100 рублей. После каждого удачного выстрела количество его денег увеличивается на 10%, а после каждого промаха – уменьшается на 10%. Могло ли после нескольких выстрелов у него оказаться 80 рублей 19 копеек?

3. Для постройки типового дома не хватало места. Архитектор изменил проект: убрал 2 подъезда и добавил 3 этажа. При этом количество квартир увеличилось. Он обрадовался и решил убрать еще 2 подъезда и добавить еще 3 этажа. Могло ли при этом квартир стать даже меньше, чем в типовом проекте? (В каждом подъезде одинаковое число этажей, и на всех этажах во всех подъездах одинаковое число квартир.)

4. В стене имеется маленькая дырка (точка). У хозяина есть флажок следующей формы (см. рисунок). Покажите на рисунке все точки, в которые можно вбить гвоздь, так, чтобы флажок закрывал дырку.

5. Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.

6. Пять вершин правильного десятиугольника покрашены красным цветом, а остальные пять – синим. Докажите, что можно найти треугольник, все вершины которого – красные, и равный ему треугольник, все вершины которого синие.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ 6 КЛАССА

1. Решите ребус: $\overline{AX} \times \overline{VX} = 2001$.

2. Коробейник купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей. От каждого покупателя коробейник получает одинаковую прибыль. Какова оптовая цена ручки?

3. Наташа и Инна купили по одинаковой коробке чая в пакетиках. Известно, что одного пакетика хватает на две или три чашки чая. Наташе коробки хватило только на 41 чашку чая, а Инне – только на 58. Сколько пакетиков было в коробке?

4. Расставьте по кругу 6 различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних.

5. Вифсла, Тофсла и Хе́муль играли в снежки. Первый снежок бросил Тофсла. Затем в ответ на каждый попавший в него снежок Вифсла бросал 6 снежков, Хемуль – 5, а Тофсла – 4. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, в кого сколько снежков попало, если мимо цели пролетели 13 снежков. В себя самого снежками не кидаются.

6. Поля клетчатой доски размером 8×8 будем по очереди закрашивать в красный цвет так, чтобы после закрашивания каждой следующей клетки фигура, состоящая из закрашенных клеток, имела ось симметрии. Покажите, как можно, соблюдая это условие, закрасить:

а) 26; **б)** 28 клеток.

В качестве ответа расставьте на тех клетках, которые должны быть закрашены, числа от 1 до 26 или до 28 в том порядке, в котором проводилось закрашивание.

Победители и призеры личной олимпиады

Фамилия	**Имя**	**Команда**	**Кл.**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Сумма**	**Награда**
				8 класс							
Калинин	Максим	*Пермь-146*	*8*	7	7	7	7	7	0	**35**	II
Пермяков	Дмитрий	*Снежинск-127*	*8*	7	7	7	7	7	0	**35**	II
Полутина	Александра	*Озерск-8*	*8*	7	7	7	7	7	0	**35**	II
Филимонов	Владислав	*Ек.-Н.Тагил-8*	*8*	7	7	7	7	7	0	**35**	II
Альминов	Евгений	*Киров-8-1*	*8*	7	6	7	7	7	0	**34**	II
Волков	Борис	*Москва Л2Ш*	*8*	7	6	7	7	7	0	**34**	II
Жуйков	Роман	*Ижевск-41*	*8*	7	6	7	7	7	0	**34**	II
Лугинин	Иван	*Киров-8-1*	*8*	7	6	7	7	7	0	**34**	II
Унгер	Павел	*Наб. Челны-8*	*8*	4	6	7	7	7	0	**31**	III
Саенко	Олег	*Ек.-Н.Тагил-8*	*8*	3	6	7	7	7	0	**30**	III
Ефремов	Руслан	*Наб. Челны-8*	*8*	2	6	7	7	7	0	**29**	III
Кислицын	Евгений	*Киров-8-1*	*8*	4	6	5	7	7	0	**29**	III

Фамилия	Имя	Команда	Кл.	1	2	3	4	5	6	Сумма	Награда
Тимофеев	Алексей	*Ижевск-41*	*8*	2	6	7	7	6	0	**28**	III
Галимов	Артур	*Ижевск-41*	*8*	0	6	7	7	7	0	**27**	III
Краюшкин	Максим	*Казань-I*	*8*	7	6	7	0	7	0	**27**	III
Родин	Александр	*Ижевск-30*	*8*	7	6	7	7	0	0	**27**	III
Шляга	Виталий	*Снежинск-127*	*8*	0	6	7	7	7	0	**27**	III
Байдин	Василий	*Снежинск-125*	*8*	0	5	7	7	7	0	**26**	III
Губанов	Михаил	*Ижевск-41*	*8*	7	6	6	7	0	0	**26**	III
Алёшкин	Александр	*Киров-8-2*	*8*	0	3	7	7	7	0	**24**	ПГ
Сахарных	Николай	*Киров-8-2*	*8*	3	7	7	7	0	0	**24**	ПГ
Помелов	Артём	*Киров-8-1*	*8*	2	6	7	7	0	0	**22**	ПГ
Коврижных	Николай	*Киров-8-2*	*8*	0	7	7	7	0	0	**21**	ПГ
Коновалова	Мария	*Казань-I*	*8*	0	0	7	7	7	0	**21**	ПГ
Латыпов	Рамиль	*Казань-I*	*8*	0	7	7	0	7	0	**21**	ПГ
Мешин	Юрий	*Киров-8-1*	*8*	0	7	7	7	0	0	**21**	ПГ
Пименов	Евгений	*Ижевск-30*	*8*	0	7	7	0	7	0	**21**	ПГ
Рагулина	Кира	*Москва Л2Ш*	*8*	0	0	7	7	7	0	**21**	ПГ
Гомзяков	Евгений	*Пермь-146*	*8*	0	6	7	7	0	0	**20**	ПГ
Исаев	Михаил	*Барнаул*	*8*	7	6	7	0	0	0	**20**	ПГ
Лаврентьев	Александр	*Ижевск-30*	*8*	7	6	0	7	0	0	**20**	ПГ
Лущенко	Никита	*Москва Л2Ш*	*8*	0	6	7	7	0	0	**20**	ПГ
Курышев	Алексей	*Москва Л2Ш*	*8*	0	0	5	7	7	0	**19**	ПГ

7 класс

Рендакова	Кира	*Киров-7*	*7*	7	7	7	5	7	6	**39**	I
Москва	Владимир	*Москва-7*	*7*	7	7	7	7	7	3	**38**	I
Исакова	Светлана	*Санкт-Петербург*	*7*	7	7	7	4	7	5	**37**	I
Мартынов	Павел	*Н.Новгород*	*7*	7	7	7	5	7	3	**36**	I
Нохрин	Алексей	*Ижевск-30*	*7*	7	7	7	7	7	1	**36**	Диплом
Белоусов	Кирилл	*Челябинск*	*7*	7	7	7	7	7	0	**35**	Диплом
Вершинин	Олег	*Киров-7*	*7*	7	7	7	4	7	3	**35**	Диплом
Линцбах	Илья	*Санкт-Петербург*	*7*	7	7	7	4	7	3	**35**	Диплом
Новиков	Павел	*Ижевск-29*	*7*	7	7	7	7	7	0	**35**	Диплом
Тимофеев	Владимир	*Саров*	*7*	7	7	7	7	7	0	**35**	Диплом
Фёдоровых	Данил	*Киров-7*	*7*	7	7	7	7	7	0	**35**	Диплом
Зыкин	Михаил	*Киров-7*	*7*	7	7	7	6	7	0	**34**	Диплом
Морозков	Михаил	*Челябинск*	*7*	7	7	7	6	7	0	**34**	Диплом
Франчески	Яков	*Киров-7*	*7*	7	7	7	6	7	0	**34**	Диплом
Валишин	Руслан	*Салават*	*7*	7	7	7	5	7	0	**33**	ПГ
Дворжецкий	Юрий	*Екат.-Омск*	*7*	7	7	7	5	7	0	**33**	ПГ
Кондакова	Анна	*Москва-7*	*7*	7	7	7	5	7	0	**33**	ПГ
Терехин	Николай	*Санкт-Петербург*	*7*	7	7	7	4	7	1	**33**	ПГ
Шаров	Алексей	*Ижевск-41*	*7*	7	7	7	5	7	0	**33**	ПГ
Диберт	Александр	*Екат.-Омск*	*7*	7	7	7	4	7	0	**32**	ПГ
Жилин	Никита	*Киров*	*7*	7	7	7	4	7	0	**32**	ПГ
Заболотных	Андрей	*Пермь-9*	*7*	7	7	7	4	7	0	**32**	ПГ
Заплетина	Ольга	*Москва-7*	*7*	7	7	7	4	7	0	**32**	ПГ
Коротаев	Сергей	*Киров-7*	*7*	7	7	7	4	7	0	**32**	ПГ
Кошелев	Александр	*Саров*	*7*	7	7	7	4	7	0	**32**	ПГ
Латушкин	Сергей	*Пермь-9*	*7*	7	7	7	4	7	0	**32**	ПГ
Лихачёва	Екатерина	*Москва-7*	*7*	7	7	7	4	7	0	**32**	ПГ
Плотников	Дмитрий	*Барнаул*	*7*	7	7	7	4	7	0	**32**	ПГ
Порядин	Андрей	*Казань-7*	*7*	7	7	7	4	7	0	**32**	ПГ
Швыдкой	Александр	*Пермь-9*	*7*	7	7	7	4	7	0	**32**	ПГ
Шишкин	Николай	*Киров.обл.*	*7*	7	7	7	4	7	0	**32**	ПГ

Фамилия	Имя	Команда	Кл.	1	2	3	4	5	6	Сумма	Награда
Блинов	Вениамин	*Саров*	*7*	7	7	0	7	7	3	**31**	ПГ
Гусихин	Павел	*Казань-7*	*7*	7	7	7	3	7	0	**31**	ПГ

6 класс

Адиатуллин	Альберт	*Казань-7*	*6*	7	7	7	7	2	7	**37**	I
Пикалов	Павел	*Екат.-Омск*	*6*	7	7	7	0	2	7	**30**	II
Бабичева	Татьяна	*Наб. Челны-6*	*6*	7	0	5	7	2	7	**28**	II
Белов	Борис	*Москва МММФ*	*6*	2	7	7	7	2	3	**28**	II
Пантелеев	Леонид	*Киров-6*	*6*	7	0	5	7	2	7	**28**	II
Стецкий	Константин	*Глазов*	*6*	5	2	4	7	1	7	**26**	II
Шушканов	Роман	*Глазов*	*6*	2	7	5	7	2	0	**23**	III
Гуцалюк	Сергей	*Екат.-Омск*	*6*	2	7	3	7	3	0	**22**	III
Симонова	Татьяна	*Екат.-Омск*	*6*	7	0	7	7	0	1	**22**	III
Приходько	Александр	*Екат.-Омск*	*6*	7	7	7	0	0	0	**21**	III

Решения задач личной олимпиады 8 класса.

Задача 1. *На кошачьей выставке в ряд сидели 19 кошек и 10 котов, причем рядом с каждой кошкой сидел кот, который был толще, чем она. Докажите, что рядом с каждым котом сидела кошка, которая была тоньше, чем он.*

Решение. Возьмем любого кота. Так как рядом с каждым котом сидит не больше двух кошек, оставшиеся 9 котов «обслуживают» не больше 18 кошек. Стало быть, найдется кошка, рядом с которой сидит *только* выбранный нами кот. По условию он должен быть толще этой кошки, то есть она тоньше, чем он, что и требовалось доказать.

Задача 2. *При каком наибольшем n по кругу можно расставить n различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних.*

Ответ: При $n = 6$. Решение. Возьмем числа, расставленные по кругу с соблюдением условия. Пусть a и b – два соседних числа. Тогда после b идет число b/a, затем – число $1/a$, дальше – $1/b$, а за ним – a/b. Следующим, чтобы соблюдалось условие задачи, должно быть число a. Но оно уже было вначале. Значит, круг должен замкнуться. Таким образом, по кругу с соблюдением условия задачи можно выписать не больше шести чисел. Вот пример, когда их ровно шесть: 2, 3, 3/2, 1/2, 1/3, 2/3.

Задача 3. *В клетках квадратной таблицы 10×10 стоят ненулевые цифры. В каждой строчке и в каждом столбце из всех стоящих там цифр составлено 10-значное число. Может ли оказаться, что из получившихся 20 чисел ровно одно не делится на 3?*

Ответ: Нет. Решение. Как известно, число делится на 3 тогда и только тогда, когда делится на 3 сумма его цифр. Поэтому достаточно выяснить, может ли оказаться, что из 20 сумм цифр по строкам и столбцам 19 сумм делятся на 3, а одна – нет. Допустим, может. Пусть «плохая» сумма получилась в одной из строк. Тогда, поскольку суммы цифр в остальных строках делятся на 3, сумма цифр во всей таблице не 3 *не* делится. С другой стороны, все суммы цифр по столбцам делятся на 3, а, значит, и сумма всех цифр в таблице – тоже. Противоречие.

14			1			20	
	15		2		21		
		16	3	22			
8	9	10	4	11	12	13	27
		23	5	17			
	24		6		18		
25			7			19	
			26				28

Задача 4. *Поля клетчатой доски размером 8×8 будем по очереди закрашивать в красный цвет так, чтобы после закрашивания каждой следующей клетки фигура, состоящая из закрашенных клеток, имела ось симметрии. Покажите, как можно, соблюдая это условие, закрасить 28 клеток. В качестве ответа расставьте на тех клетках, которые должны быть закрашены, числа от 1 до 28 в том порядке, в котором проводилось закрашивание.*

Решение показано на рисунке.

Задача 5. *Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает серединный перпендикуляр стороны AB в точке X, серединный перпендикуляр стороны AC – в точке Y, а описанную окружность треугольника – в точке Z. Точки A, X, Y, Z лежат на биссектрисе в порядке перечисления. Докажите, что AX=YZ.*

Решение. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC, а M и N – середины. сторон AC и AB соответственно. Ясно, что оба серединных перпендикуляра проходят через точку O. Заметим, что $OA = OZ$ как радиусы, кроме того, треугольники AXN и AYM подобны по двум углам. Значит, углы AXN и AYM равны. Тогда равны и углы OXY и OYX, а значит, и $OX = OY$. Но тогда отрезки AX и ZY будут симметричны относительно серединного перпендикуляра к AZ, следовательно, они будут равны.

Задача 6. *Квадратный материк разделен на 19 стран в форме выпуклых многоугольников, причем нет точек, в которых сходились бы границы четырех или больше стран. Из всяких же трех границ, сходящихся в одной точке, одна закрыта, а две открыты для проезда. Докажите, что невозможно объехать все эти страны, побывав в каждой по одному разу и вернуться в исходную страну.*

Решение. Назовем *вершиной* точку, где сходятся границы трех стран. По условию из каждой вершины выходит ровно одна закрытая граница. Допустим, объехать страны можно. Поскольку соответствующий замкнутый маршрут не пересекает закрытых границ, каждая из них либо целиком лежит внутри него, либо целиком снаружи. Поэтому все вершины, находящиеся внутри маршрута, разбиваются на пары вершин, связанных закрытыми границами, т.е. этих «внутренних» вершин – *четное число k*. Мысленно заменим участки границ, соединяющие вершины, нитями и разрежем каждую пополам. Тогда из «внутренних» вершин будет выходить $3k$, т.е., четное число половинок нитей. Из них 19 половинок ведут наружу. Значит, от разрезания нитей, целиком лежащих внутри маршрута, получилось $3k$–19 половинок. Но это число – нечетное! Противоречие.

Решения задач личной олимпиады 7 класса.

Задача 1. *В книге рекордов Гиннесса написано, что наибольшее известное простое число равно 23021^{377}–1. Не ошибка ли это?*

Решение. Ошибка. Число 23021^{377}–1 оканчивается на 1. Поэтому разность 23021^{377}–1 оканчивается на 0 и не может быть простым числом.

Задача 2. *Приходя в тир, игрок вносит в кассу 100 рублей. После каждого удачного выстрела количество его денег увеличивается на 10%, а после каждого промаха – уменьшается на 10%. Могло ли после нескольких выстрелов у него оказаться 80 рублей 19 копеек?*

Ответ: Может. Решение. Заметим, что после каждого удачного выстрела капитал игрока умножается на 1,1 , а после каждого неудачного – на 0,9. Начальный капитал игрока составляет 100 рублей = 10000 копеек. После нескольких выстрелов у него должно оказаться 8019 копеек. Разложим число 8019 на множители: $8019=9^3\cdot 11$. Отсюда $8019 = 10000\times 1{,}1\times(0{,}9)^3$. Таким образом, игроку достаточно один раз попасть и трижды промахнуться.

Задача 3. *Для постройки типового дома не хватало места. Архитектор изменил проект: убрал 2 подъезда и добавил 3 этажа. При этом количество квартир увеличилось. Он обрадовался и решил убрать еще 2 подъезда и добавить еще 3 этажа. Могло ли при этом квартир стать даже меньше, чем в типовом проекте? (В каждом подъезде одинаковое число этажей, и на всех этажах во всех подъездах одинаковое число квартир.)*

Решение. Да, могло. Например, если в исходном проекте было 5 подъездов, 4 этажа и на каждом этаже по одной квартире: $5\cdot 4=20$, $3\cdot 7=21$, $1\cdot 10=10$.

Задача 4. *В стене имеется маленькая дырка (точка). У хозяина есть флажок следующей формы (рис. А). Покажите на рисунке все точки, в которые можно вбить гвоздь, так, чтобы флажок закрывал дырку.*

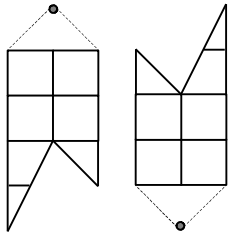


Рис. А *Рис. Б*

Решение. Все искомые точки образуют фигуру, которую накроет флажок, если вбить гвоздь в дырку, а тяготение направить вверх (рис. Б). В

самом деле, пусть флажок висит так, что накрывает дырку. Повернем его (вместе с нитью и гвоздем) на 180° вокруг середины отрезка, соединяющего дырку и точку подвеса. Тогда он займет положение, показанное на рис. Б, а та его точка, которая покрывала дырку, окажется на месте бывшей точки подвеса.

Задача 5. *Отметьте на доске 8×8 несколько клеток так, чтобы любая (в том числе и любая отмеченная) клетка граничила по стороне ровно с одной отмеченной клеткой.*

*	x			*	x		
							*
		*	x				x
x					*		
*					x		
		x	*				*
							x
x	*			x	*		

Решение. Будем рассуждать, используя шахматную доску. Заметим, что белые клетки граничат по стороне только с черными и наоборот. Поэтому сначала отметим несколько белых клеток так, чтобы у каждой черной клетки был ровно один отмеченный сосед (на рисунке – звездочки). Затем отметим несколько черных клеток, чтобы и у каждой белой клетки появился отмеченный сосед (на рисунке – крестики), при этом у черных клеток новых отмеченных соседей не появится.

Задача 6. *Пять вершин правильного десятиугольника покрашены красным цветом, а остальные пять – синим. Докажите, что можно найти треугольник, все вершины которого – красные, и равный ему треугольник, все вершины которого синие.*

Первое решение. Пусть A_1, A_2, …, A_{10} – вершины десятиугольника в порядке обхода контура. Если цвета вершин чередуются, то искомых треугольников много, например, треугольники $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$. Если цвета не чередуются, то есть две смежные синие и две смежные красные вершины. Теперь рассмотрим два возможных случая.

I. Если указанные четыре вершины идут подряд, например, A_1 и A_2 – красные, а A_3 и A_4 – синие, и хотя бы в одной паре вершин (A_{10}, A_5), (A_9, A_6), (A_8, A_7) есть вершины разных цветов, то эти вершины вместе с вершинами A_1, A_2, A_3, A_4 образуют два искомых треугольника. Если же в каждой паре вершины одного цвета, то либо красных, либо синих вершин больше пяти.

II. Если смежные красные и смежные синие вершины не идут подряд, то вершины, находящиеся рядом с ними все должны быть одного цвета, иначе найдутся два красных и два синих треугольника, образованных тремя идущими подряд вершинами. Если таких (находящихся рядом) вершин четыре, то вершин какого-то цвета больше пяти. Остается единственный случай, когда две синие и две красные рядом стоящие вершины расположены друг от друга через одну вершину. Ясно, что эта вершина должна быть либо синей, либо красной, и мы находимся в условиях случая I.

Второе решение. Наряду с данным, рассмотрим десятиугольник с вершинами, раскрашенными наоборот. Рассмотрим все возможные десять совмещений этих двух многоугольников при различных поворотах друг относительно друга. Докажем, что при каком-то из таких совмещений не менее, чем в трех вершинах совпадут синие цвета десятиугольников, откуда будет следовать утверждение задачи. Пусть при любом совмещении синие цвета совпадают не более, чем в двух вершинах. Тогда суммарное число совпадений при всех совмещениях не более двадцати. Но, ясно, что любая синяя вершина одного десятиугольника при каком-то совмещении совпадет с любой синей вершиной второго десятиугольника, что дает, по крайней мере, 25 различных совпадений. Противоречие.

Решения задач личной олимпиады 6 класса.

Задача 1. *Решите ребус:* $\overline{AX} \times \overline{YX} = 2001$.

Решение. Разложим число 2001 на простые множители: 2001=3·23·29. Поэтому число 2001 можно представить в виде произведения двузначных чисел лишь следующими способами: 69×29 или 23×87. При этом последние цифры сомножителей равны только в первом случае. Отсюда получаем два ответа: АХ = 69, УХ = 29, или АХ = 29, УХ = 69.

Задача 2. *Коробейник купил на оптовом рынке партию ручек и предлагает покупателям либо одну ручку за 5 рублей, либо три ручки за 10 рублей. От каждого покупателя коробейник получает одинаковую прибыль. Какова оптовая цена ручки?*

Решение. Если оптовая цена ручки x рублей, то $5–x = 10–3x$, откуда $x = 2{,}5$. Значит, оптовая цена – 2 рубля 50 копеек.

Задача 3. *Наташа и Инна купили по одинаковой коробке чая в пакетиках. Известно, что одного пакетика хватает на две или три чашки чая. Наташе коробки хватило только на 41 чашку чая, а Инне – только на 58. Сколько пакетиков было в коробке?*

Решение. Поскольку Наташе чаю хватило только на 41 чашку, в коробке не более, чем 41/2=20,5 пакетиков. Поскольку Инне хватило чаю только на 58 чашек, то в коробке не менее, чем 58/3=19 1/3 пакетиков. Значит, в коробках было по 20 пакетиков чая.

Задача 4. *Расставьте по кругу 6 различных чисел так, чтобы каждое из них равнялось произведению двух соседних.*

Решение. Если рядом стоят числа a и b, то следующим стоит число b/a, за ним $1/a$, потом $1/b$, наконец, a/b. Такие шесть чисел удовлетворяют условию задачи. Конечно, при неудачном выборе чисел a и b какие-то из указанных выше шести чисел могут совпасть, но нас это не остановит: для решения задачи достаточно предъявить один пример. Например, взять a=2, b=3 и получить числа 2, 3, 3/2, 1/2, 1/3, 2/3.

Задача 5. *Вифсла, Тофсла и Хе́муль играли в снежки. Первый снежок бросил Тофсла. Затем в ответ на каждый попавший в него снежок Вифсла бросал 6 снежков, Хемуль – 5, а Тофсла – 4. Через некоторое время игра закончилась. Найдите, в кого сколько снежков попало, если мимо цели пролетели 13 снежков. В себя самого снежками не кидаются.*

Решение. Пусть в Вифслу, Тофслу и Хемуля попали соответственно x, y и z снежков. Тогда всего было брошено $13+x+y+z$ снежков (поскольку 13 снежков не достигли цели). С другой стороны, Вифсла бросил $6x$, Хемуль – $5y$, а Тофсла – $(4z+1)$ снежков (вместе с первым снежком). Получаем уравнение: $6x+5y+4z+1 = 13+x+y+z$, откуда $5x+4y+3z = 12$. Заметим, что из трех чисел x, y и z хотя бы два положительны, ибо Тофсла в кого-то попал, а тот, в свою очередь, попал в кого-то из двух других (иначе было бы брошено меньше 13 снежков). Допустим, что $x = 0$. Тогда $4y+3z = 12$, откуда следует, что y делится на 3. Но даже при $y = 3$ $4y = 12$ и $z = 0$, что невозможно. Аналогично показывается, что не могут равняться нулю y и z. Значит, все три числа x, y и z положительны. Но уже при $x = y = z = 1$ имеем $5x+4y+3z = 12$. Значит, если хотя бы одно из чисел x, y и z больше 1, сумма $5x+4y+3z$ больше 12. Итак, единственный возможный вариант – в Хемуля, Вифслу и Тофслу попали по одному разу.

Задача 6. *Поля клетчатой доски размером 8×8 будем по очереди закрашивать в красный цвет так, чтобы после закрашивания каждой следующей клетки фигура, состоящая из закрашенных клеток, имела ось симметрии. Покажите, как можно, соблюдая это условие, закрасить:* ***а)*** *26;* ***б)*** *28 клеток.*

В качестве ответа расставьте на тех клетках, которые должны быть закрашены, числа от 1 до 26 или до 28 в том порядке, в котором проводилось закрашивание.

14			1			20	
	15		2		21		
		16	3	22			
8	9	10	4	11	12	13	27
		23	5	17			
	24		6		18		
25			7			19	
			26				28

Решение. Показано на рисунке справа.

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 17.02.2001
ЗАДАНИЯ ДЛЯ СЕНЬОРОВ

1. Имеются чашечные весы и четыре гири. Одна из них большая и тяжелая, другая поменьше и полегче, третья – ещё меньше и еще легче, а четвёртая – самая маленькая и самая легкая. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждом шаге со стола берётся любая гиря и ставится на любую чашку весов). Можно ли, не зная точного веса гирь,

положить по одной все четыре гири на весы в таком порядке, чтобы сначала три раза перевешивала левая чашка, а последний раз – правая?

2. В трапеции $ABCD$ с основанием AD $AB = BC$, $AC = CD$ и $BC+CD = AD$. Найдите углы трапеции.

3. Сколькими способами из чисел 1, 2, …, $2n$ можно выбрать два или больше так, чтобы никакие два выбранных числа в сумме не давали $2n+1$.

4. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, d и e выполнено неравенство $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e)$

5. В треугольнике ABC $BC = 2AC$, а D – такая точка на стороне BC, что $\angle DAC = \angle ABC$. Прямая AD пересекает биссектрису внешнего угла при вершине C в точке M. Докажите, что $AM = AB$.

6. p и q – нечетные простые числа. Сумма натуральных чисел a и b равна q, а a^p+b^p – точный квадрат. Докажите, что $p = q$. (*Ю.М. Лифшиц, 57*)

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 17.02.2001
ЗАДАНИЯ ДЛЯ ЮНИОРОВ

1. Имеются чашечные весы и четыре гири. Одна из них большая и тяжелая, другая поменьше и полегче, третья – ещё меньше и еще легче, а четвёртая – самая маленькая и самая легкая. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждом шаге со стола берётся любая гиря и ставится на любую чашку весов). Можно ли, не зная точного веса гирь, положить по одной все четыре гири на весы в таком порядке, чтобы сначала три раза перевешивала левая чашка, а последний раз – правая?

2. В комнате находится 10 человек, некоторые из них всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. На каждого из них надета черная или белая шапка. Каждый из них сказал "Среди остальных 9 человек (всех, кроме меня) ровно на троих – черные шапки". Сколько лжецов может быть в комнате (перечислите все варианты)?

3. k и n – натуральные числа, большие 1. В группе из kn человек каждый знаком более, чем с $(k–1)n$ из остальных. Докажите, что можно выбрать $k+1$ человека так, что все они знакомы друг с другом.

4. Внутри квадрата $ABCD$ взята такая точка P, что $AP = AB$. Прямая AP пересекает отрезок BC в точке K. Прямая BP пересекает отрезок CD в точке L. Докажите, что **а)** $BK > CL$. **б)** $BK > 2CL$.

5. Докажите, что из любых 9 различных трехзначных чисел можно выбрать несколько и составить из них выражение, значение которого больше 2, но меньше 3, если разрешается использовать только знаки сложения, вычитания, умножения, деления и скобки.

6. $2^p+3^p = a^n$, где a и n – натуральные числа, а p – простое. Докажите, что $n = 1$.

Решения задач командной олимпиады старшей группы.

Задача 1. *Имеются чашечные весы и четыре гири, сделанные из одинакового металла. Одна из них большая, другая поменьше, третья ещё меньше, а четвёртая – самая маленькая. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждом шаге со стола берётся любая гиря и ставится на любую чашку весов). Известный хвастун Петя Сидоров не знает точного веса гирь, но заявляет, что сможет ставить гири на весы так, что сначала три раза перевесит левая чашка, а последний раз – правая. Стоит ли ему верить?*

Решение. Упорядочим гири по убыванию веса: первая – самая тяжелая, гиря полегче – вторая, еще полегче – третья и самая маленькая, она же самая легкая – четвертая. Теперь положим на левую чашку вторую гирю. Левая чашка перевесит. Добавим к ней четвертую – без изменений. Поставим на правую чашку третью гирю. Левая чашка по-прежнему будет перевешивать, так как на ней есть вторая гиря – более тяжелая, чем третья. Теперь положим на правую чашку первую, самую тяжелую гирю. Правая чашка перевесит, так как первая гиря тяжелее второй, а третья тяжелее четвертой. Полный триумф Пети Сидорова!

Задача 2. *В трапеции ABCD с основанием AD AB = BC, AC = CD и BC+CD = AD. Найдите углы трапеции.*

Решение. Отметим на основании AD трапеции точку K таким образом, что $AK = BC$. Тогда $KD = CD$ и $ABCK$ – ромб. Обозначим угол CAK через α. Получим, что $\angle CAK = \angle ACK = \angle ADC = \alpha$. Тогда $\angle CKD = \angle KCD = 2\alpha$, и из треугольника ACD находим, что $5\alpha = 180°$, откуда $\alpha = 36°$. Значит, углы трапеции таковы: $\angle A = 72°$, $\angle B = 108°$, $\angle C = 144°$, $\angle D = 36°$.

Задача 3. *Сколькими способами из чисел 1, 2, ..., 2n можно выбрать два или больше так, чтобы никакие два выбранных числа в сумме не давали 2n+1?*

Ответ: $3^n–2n–1$. Решение. Разобьем все $2n$ чисел на пары чисел, дающих в сумме $2n+1$: $(1, 2n), (2, 2n–1), \ldots, (n, n+1)$. Выбирая искомые числа, мы не можем брать два числа из одной пары. Поэтому из первой пары мы можем взять либо первое число 1, либо число $2n$, либо не брать ничего. Те же три возможности для выбора мы имеем и для каждой из оставшихся $n–1$ пар. Так как эти возможности независимы друг от друга, всего существует 3^n наборов чисел, не содержащих двух чисел из одной пары. Среди них есть один пустой и $2n$ одноэлементных, а остальные $3^n–2n–1$ наборов нам подходят.

Задача 4. Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, d и e выполнено неравенство

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e)$$

Решение. $0 \leq (a/2–b)^2+(a/2–c)^2+(a/2–d)^2+(a/2–e)^2 = a^2–b–ac–ad–ae+b^2+c^2+d^2+e^2$, что и требовалось доказать.

Задача 5. В треугольнике ABC $BC = 2AC$, а D – такая точка на стороне BC, что $\angle DAC = \angle ABC$. Прямая AD пересекает биссектрису внешнего угла при вершине C в точке M. Докажите, что $AM = AB$.

Решение. Обозначим через N середину стороны BC. Тогда $AC = CN = BN$, $\angle ANB = 180° - \angle ANC = 180° - (90° - \angle ACN/2) = 90° + \angle ACN/2 = \angle ACM$ (поскольку $\angle ACM = \angle ACN + \angle MCN = \angle ACN + (90° - \angle ACN/2) = 90° + \angle ACN/2$). Тогда $\Delta ANB = \Delta MCA$ (по стороне $BN = CM$ и двум углам), откуда и следует, что $AB = AM$.

6. p и q – нечетные простые числа. Сумма натуральных чисел a и b равна q, а a^p+b^p – точный квадрат. Докажите, что $p = q$.

Решение 1. Воспользуемся формулой $a^p+b^p = (a+b)(a^{p–1}–a^{p–2}b+\ldots+b^{p-1})$. По условию выражение в правой ее части равно $q(a^{p–1}–a^{p–2}b+\ldots+b^{p-1})$ Так как число a^p+b^p – точный квадрат, сумма в скобках должна делиться на q. Рассмотрим выражение в скобках по модулю q. По условию $b \equiv –a \pmod q$, а, значит,

$$a^{p–1}–a^{p–2}b+\ldots+b^{p-1} \equiv a^{p–1}–a^{p–2}(–a)+\ldots+(–a)^{p-1} \equiv pa^{p–1} \pmod q.$$[1]

Число a меньше q, и, значит, не делится на q. Следовательно, на q должно делиться число p. Для простых p и q возможно только когда $p = q$, что и требовалось доказать.

Решение 2. Перепишем выражение из условия задачи, используя формулу бинома:

$$a^p + b^p = a^p + (q - a)^p = q^p + C_p^1 a q^{p-1} + \ldots + C_p^{p-2} a^{p-2} q^2 + C_p^1 a^{p-1} q$$

Все слагаемые в получившемся выражении и, следовательно, все выражение делятся на q. Если это - точный квадрат, то оно делится и на q^2. Но все слагаемые, кроме последнего, содержат множитель q^2, и, следовательно, $C_p^1 a^{p-1} q = p a^{p-1} q$ тоже делится на q^2. Так как a не делится на q, должно быть p = q.

[1] Для тех, кто не знаком со сравнениями, это рассуждение можно изложить иначе. Подставим $b = q–a$ в выражение $a^{p–1}–a^{p–2}b+\ldots+b^{p-1}$. В получившемся выражении $a^{p–1}–a^{p–2}(q–a)+\ldots+(q–a)^{p–1}$ после раскрытия скобок не будут содержать множителя q только p членов, равных $a^{p–1}$.

Решения задач командной олимпиады младшей группы.

Задача 1. *Имеются чашечные весы и четыре гири, сделанные из одинакового металла. Одна из них большая, другая поменьше, третья ещё меньше, а четвёртая – самая маленькая. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждом шаге со стола берётся любая гиря и ставится на любую чашку весов). Известный хвастун Петя Сидоров не знает точного веса гирь, но заявляет, что сможет ставить гири на весы так, что сначала три раза перевесит левая чашка, а последний раз – правая. Стоит ли ему верить?*

Решение. Упорядочим гири по убыванию веса: первая – самая тяжелая, гиря полегче – вторая, еще полегче – третья и самая маленькая, она же самая легкая – четвертая. Теперь положим на левую чашку вторую гирю. Левая чашка перевесит. Добавим к ней четвертую – без изменений. Поставим на правую чашку третью гирю. Левая чашка по-прежнему будет перевешивать, так как на ней есть вторая гиря – более тяжелая, чем третья. Теперь положим на правую чашку первую, самую тяжелую гирю. Правая чашка перевесит, так как первая гиря тяжелее второй, а третья тяжелее четвертой. Полный триумф Пети Сидорова!

Задача 2. *В комнате находится 10 человек, некоторые из них всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. На каждого из них надета черная или белая шапка. Каждый из них сказал "Среди остальных 9 человек (всех, кроме меня) ровно 3 носят черные шапки". Сколько из них может быть лжецами?*

Ответ: 3, 6 или 10. Решение. Очевидно, все десять человек могут оказаться лжецами - например, в ситуации, когда на всех надеты черные шапки. Предположим, что кто-то из присутствующих сказал правду. Тогда (в зависимости от цвета его шапки) в комнате 3 или 4 человека в черных шапках. В первом случае лгут все люди в черных шапках (трое), а во втором - все люди в белых шапках (шестеро).

Задача 3. *k и n – натуральные числа, большие 1. В группе из kn человек каждый знаком более, чем с $(k–1)n$ из остальных. Докажите, что можно выбрать $k+1$ человека так, что все они знакомы друг с другом.*

Решение. Докажем утверждение задачи индукцией по k. При $k = 2$ достаточно взять любых двух человек, знакомых друг с другом (такие, очевидно, существуют), и заметить, что у них в сумме есть еще хотя бы $2n$ знакомых. Все эти $2n$ человек не могут быть различны, так что у взятых нами двух человек найдется общий знакомый – трое попарно знакомых существуют. Переход. Предположим, при $k = m$ утверждение задачи верно. При $k = m+1$ имеем группу из $(m+1)n$ человек, каждый из которых знает более чем mn из остальных. Выберем произвольного человека и рассмотрим любых mn из его знакомых. В этой группе из mn человек каждый знаком более, чем с $(m–1)n$ остальными (так как из его знакомых, которых больше mn, мы исключили из рассмотрения максимум $n–1$). Тогда для этой группы выполняется предположение индукции. то есть в ней есть m человек, попарно знакомых друг с другом. Добавляя к ней человека, выбранного вначале, получаем искомую группу из попарно знакомых $m+1$ человек.

Задача 4. Внутри квадрата $ABCD$ взята такая точка P, что $AP = AB$. Прямая AP пересекает отрезок BC в точке K. Прямая BP пересекает отрезок CD в точке L. Докажите, что **а)** $BK > CL$. **б)** $BK > 2CL$.

Решение. Пусть S – основание биссектрисы угла A треугольника BAK. Обозначим угол BAC через α. Тогда $\angle ABP = 90° – \alpha$, а $\angle LBC = \alpha$. Тогда треугольник ABC равен треугольнику BCL по катету и острому углу, откуда $BS = CL$. Расстояния от точки S до сторон AB и AK угла BAK равны, но SB равно такому расстоянию, а SK его больше. Следовательно, $BK = BS+SK > 2BS = 2CL$.

Задача 5. Докажите, что из любых 9 различных трехзначных чисел можно выбрать несколько и составить из них, используя только знаки четырех арифметических действий, выражение, значение которого больше 2, но меньше 3.

Решение. Разобьем все трехзначные числа на шесть групп: от 100 до 149, от 150 до 224, от 225 до 336, от 337 до 500, от 501 до 750 и от 750 до 999. Легко видеть, что если два числа попали в одну группу, то отношение большего из них к меньшему больше 1, но меньше

1,5. Поскольку 9>6, из наших чисел хотя бы два попадут в одну группу. Пусть это числа a и b, причем $a > b$. Из семи оставшихся чисел тоже найдутся

Задача 6. *$2^p+3^p = a^n$, где a и n – натуральные числа, а p – простое. Докажите, что $n = 1$.*

Решение. При $p = 2$ утверждение задачи очевидно: $2^2+3^2 = 13$. Поэтому в дальнейшем мы можем считать число p нечетным. Это, в частности, означает, что 2^p+3^p делится на 2+3=5. Предположим, что $n > 1$. Тогда 2^p+3^p должно делиться на более высокую, чем первая, степень числа 5, и, следовательно, на 25. Непосредственным подсчетом легко убедиться, что остатки от деления степеней 2 и 3 на 25 повторяются с периодом 20. Рассматривая остатки при делении на 25 чисел 2^p+3^p при p=1, 2, …, 20, находим, что они делятся на 25 только при p, кратном 5. Так как p простое, из его делимости на 5 следует, что $p = 5$. Но число $2^5+3^5 = 275 = 5^2$ 11 не является степенью натурального числа с показателем, большим 1. Противоречие.

Итоги командной олимпиады. 17.02.2001.

Старшая группа

№	Команда	1	2	3	4	5	6	Сумма	Место
1	*Киров-8-I*	7	7	7	7	7	7	42	1
2	*Екатеринбург-Н.Тагил*	7	7	1	5	7	7	34	2
3	*Ижевск-30*	7	7	3	7	7	0	31	3-4
4	*Пермь-146*	7	7	3	0	7	7	31	3-4
5	*Ижевск-41*	7	7	7	0	7	1	29	5
6	*Набережные Челны-8*	7	7	0	7	7	0	28	6-7
7	*Казань-I*	7	7	7	7	0	0	28	6-7
8	*Киров-8-II*	7	7	0	7	1	0	22	8-9
9	*Озерск*	7	7	1	0	7	0	22	8-9
10	*Барнаул*	7	7	0	0	7	0	21	10
11	*Москва-Л2Ш*	7	6	1	0	5	0	19	11
12	*Снежинск-127*	7	7	3	0	0	0	17	12
13	*Казань-II*	7	7	0	0	0	0	14	13
14	*Снежинск-125*	7	6	0	0	0	0	13	14
15	*Тобольск*	0	7	0	0	0	0	7	15
16	*Тюмень*	0	1	0	0	0	0	1	16

Младшая группа									
№	**Команда**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**Сумма**	**Место**
1	*Санкт-Петербург*	7	7	0	7	0	7	28	1
2	*Омск-Екатеринбург*	7	7	0	0	5	0	19	2
3	*Киров-7*	7	4	0	0	7	0	18	3
4	*Ижевск-29*	7	7	0	0	1	1	16	4
5	*Пермь-9*	7	7	0	0	0	1	15	5-7
6	*Москва-7*	7	7	0	0	1	0	15	5-7
7	*Саров*	7	7	0	0	0	1	15	5-7
8	*Челябинск*	7	7	0	0	0	0	14	8-10
9	*Казань-7*	7	7	0	0	0	0	14	8-10
10	*Москва-МММФ*	7	7	0	0	0	0	14	8-10
11	*Екатеринбург-7*	7	5	0	0	0	0	12	11-12
12	*Нижний Новгород-Киров*	7	2	0	0	3	0	12	11-12
13	*Набережные Челны-6-7*	3	7	0	0	0	0	10	13
14	*Салават*	7	1	0	0	1	0	9	14
15	*Глазов*	7	1	0	0	0	0	8	15-16
16	*Киров-6*	7	1	0	0	0	0	8	15-16

Ялуторовск

ПРАВИЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО БОЯ

Общие положения. Математический бой – это соревнование двух команд в решении математических задач. Он состоит из двух частей. Сначала команды получают условия задач и определенное время на их решение. При решении задач команда может использовать любую литературу, но не имеет права общаться по поводу решения задач ни с кем, кроме жюри. По истечении этого времени начинается собственно бой, когда команды в соответствии с правилами рассказывают друг другу решения задач. Если одна команда рассказывает решение, то другая *оппонирует* его, т.е. ищет в нем ошибки (недостатки), и, если решения нет, то, возможно, приводит свое. При этом выступления оппонента и докладчика оцениваются жюри в баллах (за решение и за оппонирование). Если команды, обсудив предложенное решение, все-таки до конца задачу не решили или не обнаружили допущенные ошибки, то часть баллов (или даже все баллы) может забрать себе жюри боя. Если по окончании боя результаты команд отличаются не более чем на 3 балла, то считается, что бой закончился вничью. В противном случае побеждает команда, которая по окончании боя набирает больше баллов. Если же по условиям боя он не может закончиться вничью, то жюри до боя объявляет это командам и оглашает процедуру определения победителя.

Капитаны команд имеют право попросить жюри о предоставлении перерыва в ходе боя на 5–10 минут (примерно через каждые полтора часа). Перерыв может предоставляться только между обсуждением двух различных задач (между раундами). При этом команда, которая должна сделать вызов, делает его в письменной форме (без оглашения) непосредственно перед началом перерыва и сдает жюри, которое оглашает этот вызов сразу после окончания перерыва.

Вызовы. Бой состоит из нескольких раундов. В начале каждого раунда (если не происходит отказ от вызова – см. ниже пункт “Окончание боя”) одна из команд *вызывает* другую на одну из задач, решения которых еще не рассказывались (например: “Мы вызываем команду соперников на задачу номер 8”). После этого вызванная команда сообщает, *принимает ли она вызов*, т.е. согласна ли рассказывать решение задачи, на которую была вызвана (ответ можно обдумывать, но не более 1 минуты). Если да, то она выставляет *докладчика,* который должен рассказать решение, а вызвавшая команда выставляет *оппонента*, обязанность которого – искать в решении ошибки. Если нет, то докладчика обязана выставить команда, которая вызывала, а отказавшаяся отвечать команда выставляет оппонента. Команда, желающая сохранить выходы к доске, может отказаться выставлять оппонента. Тогда она в этом раунде не участвует (и изменить своего решения уже не может).

Ход раунда. ***Доклад.*** В начале раунда докладчик рассказывает решение. Доклад должен содержать ответы на все поставленные в задаче вопросы и доказательство правильности и полноты полученных ответов. В частности, докладчик обязан доказать каждое сформулированное им промежуточное утверждение либо сослаться на него, как на общеизвестное. Докладчик должен стремиться к ясности изложения, в частности, он обязан повторить по просьбе оппонента или жюри любую часть своего доклада. Время на доклад ограничивается 15 минутами, после чего жюри решает, разрешать ли докладчику рассказывать дальше.

Докладчик может иметь бумагу с чертежами и (с отдельного разрешения жюри) вычислениями, но не имеет права брать с собой текст решения. В докладе нельзя ссылаться на вычисления, проведенные с помощью калькулятора или иной вычислительной техники и не подтвержденные иным способом..

Докладчик имеет право :

– до начала выступления вынести на доску всю необходимую информацию (чертежи, вычисления и т.п.);

– не отвечать на вопросы оппонента, заданные до начала обсуждения;

– просить оппонента уточнить свой вопрос (в частности, докладчик может предложить свою версию вопроса: “Правильно ли я понимаю, что вы спросили о том-то и том-то?”);

– отказаться отвечать на вопрос, сказав, что: (а) он не имеет ответа на этот вопрос; (б) он уже ответил на этот вопрос (объяснив, когда и как); (в) вопрос некорректен или выходит за рамки научной дискуссии по поставленной задаче. В случае несогласия оппонента с основаниями (б) и (в) арбитром выступает жюри.

Докладчик не обязан:

– излагать способ получения ответа, если он может доказать правильность и полноту ответа другим путем;

– сравнивать свой метод решения с другими возможными методами, в том числе с точки зрения краткости, красоты и пригодности для решения других задач.

Докладчик обязан рассказывать решение в вежливой, корректной форме, критикуя действия оппонента, не допускать критики его личности, обращаться к оппоненту только на "Вы".

Оппонирование. Пока доклад не окончен, оппонент может задавать вопросы только с согласия докладчика, но имеет право просить повторения части решения и разрешать докладчику не доказывать какие-либо очевидные с точки зрения оппонента факты. После окончания доклада оппонент имеет право задавать вопросы докладчику. Если в течение минуты оппонент не задал ни одного вопроса, то считается, что у него нет вопросов. Если докладчик в течение минуты не начинает отвечать на вопрос, то считается, что у него нет ответа.

В качестве вопроса оппонент может :

– потребовать у докладчика повторить любую часть доклада;

– попросить уточнения любого из высказываний докладчика, в том числе: (а) попросить дать определение любого термина ("Что Вы понимаете под ..."); (б) переформулировать утверждение докладчика своими словами и попросить подтверждения ("Правильно ли я понимаю, что Вы утверждаете следующее: ..."");

– попросить докладчика доказать сформулированное тем неочевидное необщеизвестное утверждение (в спорных случаях вопрос об известности или очевидности решает жюри; во всяком случае, известными считаются факты, изучающиеся в общеобразовательной школе);

– после ответа на вопрос выразить удовлетворенность или мотивированную неудовлетворенность ответом.

Если оппонент считает, что докладчик тянет время, придумывая решение у доски, или что существенная часть доклада не является изложением решения обсуждаемой задачи, он имеет право (но не ранее, чем через 10 минут после начала доклада) попросить докладчика предъявить ответ (если таковой в задаче подразумевается) или план дальнейших рассуждений.

Оппонент обязан:

– формулировать свои вопросы в вежливой, корректной форме, обращаться к докладчику только на "Вы";

– критикуя доклад, не допускать критики докладчика;

– повторять и уточнять свои вопросы по просьбе докладчика или жюри.

По итогам доклада и ответов на вопросы оппонент имеет право дать свою оценку докладу и обсуждению в одной из следующих форм: (а) признать решение правильным; (б) признать решение (ответ) в основном правильным, но имеющим недостатки и/или пробелы с обязательным их указанием; (в) признать решение (ответ) неправильным с указанием ошибок в обоснованиях ключевых утверждений доклада или контрпримеров к ним (или ответу), или указанием существенных пробелов в обоснованиях или плане решения. Если оппонент согласился с решением, он и его команда в этом раунде больше не участвуют.

Если оппонент имеет контрпример, опровергающий решение докладчика в целом, и этот контрпример сам является решением задачи (такое бывает, например, в случаях, когда вопрос задачи звучит как "Можно ли …?", "Верно ли, что …?" и т.п.), то оппонент имеет право заявить: "Я с решением не согласен, у меня есть контрпример", но сам контрпример пока докладчику не предъявлять (хотя жюри имеет право потребовать от оппонента предъявления контрпримера в письменном виде, чтобы убедиться в корректности заявления оппонента). В этом случае, если докладчик не изменит своего решения в течение минуты или после взятого командой перерыва, оппонент получает право предъявить докладчику упомянутый контрпример, причем докладчик и его команда уже не имеют права менять решение или ответ.

Аналогично, если решение требует перебора случаев, оппонент имеет право заявить "Я с решением не согласен, рассмотрены не все случаи", не указывая пока докладчику явно, какой

именно случай не рассмотрен. Дальнейшие действия докладчика, жюри и оппонента такие же, как в ситуации с контрпримером.

Участие жюри в обсуждении. После окончания диалога докладчика и оппонента жюри задает свои вопросы. При необходимости оно может вмешиваться и раньше.

Выступающие и команда. Докладчик и оппонент могут обращаться к своим капитанам с просьбой о замене или перерыве для консультации. Другое общение между командой и докладчиком (оппонентом) допускается только во время полуминутного перерыва, который любая команда может взять в любой момент (при этом соперники тоже могут пользоваться этим временем). Каждая команда может взять в течение одного боя не более 6 полуминутных перерывов (см. также ниже пункт "Число выходов к доске"). Команда имеет право полностью использовать полуминутный перерыв, взятый командой соперников, даже если та закончила его досрочно.

Перемена ролей. Некорректный вызов. Порядок вызовов. Если *по ходу дискуссии* жюри установило, что оппонент доказал отсутствие у докладчика решения и ранее не произошел отказ от вызова, то возможны два варианта. Если вызов на этот раунд был принят, то оппонент получает право (но не обязан) рассказать свое решение. Если оппонент взялся рассказывать свое решение, то происходит *полная перемена ролей*: бывший докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование. Если же вызов на этот раунд не был принят, то говорят, что вызов был *некорректным.* В этом случае перемены ролей не происходит, а команда, вызывавшая некорректно, должна снова вызывать соперника в следующем раунде. Во всех остальных случаях в следующем раунде вызывает та команда, которая была вызвана в текущем раунде.

Принятый вызов всегда считается корректным!

Если же оппонент не доказал, что у докладчика нет решения, но выявил в предложенном решении некоторые конкретные недостатки, то, если ранее не произошел отказ от вызова и вызов на этот раунд был принят, оппонент получает право (но не обязан) устранить все (или некоторые) из этих недостатков (*"залатать дыры"*). Такое же право оппонент получает, если он доказал, что у докладчика нет решения, но отказался рассказывать собственное решение. Если оппонент взялся "залатывать дыры", то происходит *частичная перемена ролей*: оппонент обязан сформулировать предварительно, что именно он будет делать (например, разбирать такой-то не разобранный докладчиком случай, доказывать такое-то недоказанное докладчиком утверждение или что-либо еще), а бывший докладчик становится оппонентом и может зарабатывать баллы за оппонирование сформулированных утверждений. *При проверке корректности вызова частичная перемена ролей невозможна.*

Обратной перемены ролей ни в каком случае не происходит!

Число выходов к доске. Каждый член команды имеет право выйти к доске в качестве докладчика или оппонента не более двух раз за бой. Команда имеет право *не более трех раз за бой* заменять докладчика или оппонента, причем каждый раз выход засчитывается как тому, кого заменили, так и тому, кто вышел на замену. Кроме того, при замене время, отведенное команде на перерывы, уменьшается на 1 минуту (эту минуту можно использовать непосредственно перед заменой, а можно и не использовать – в последнем случае команда соперников тоже *не имеет права* пользоваться ею).

Отказ от вызова. Окончание боя. В любой момент боя команда, которая должна вызывать, может отказаться делать это (обычно это происходит, когда у команды больше нет решенных задач, если она не хочет делать вызов, который может оказаться некорректным). Тогда другая команда получает право (но не обязана) рассказывать решения оставшихся задач. При этом команда, отказавшаяся делать вызов, может выставлять оппонентов и получать баллы только за оппонирование, но рассказывать решения она уже не имеет права, даже если они у нее и появятся (то есть после отказа от вызова не происходит ни полной, ни частичной перемены ролей).

Бой заканчивается, когда не остается необсужденных задач либо когда одна из команд отказалась от вызова, а другая команда отказалась рассказывать решения оставшихся задач.

Первый вызов. Конкурс капитанов. Кто будет делать первый вызов, определяет команда, победившая в конкурсе капитанов. Он проводится в начале боя. Капитанам предлагается задача.

Капитан, первым сообщивший жюри о своем желании отвечать, получает такое право. Если он рассказывает правильное решение, то он победил, а если неправильное – победил его соперник. При этом что понимается под “правильным решением”: просто верный ответ, ответ с объяснением или что-либо еще – жюри при необходимости уточняет перед началом конкурса капитанов.

На решение задачи конкурса капитанов жюри отводит определенное время. Если за это время ни один из капитанов не высказал желания отвечать, жюри может заменить задачу или выявить победителя жребием. Вместо задачи жюри может предложить капитанам сыграть в игру. В этом случае победителем считается тот, кто выигрывает игру. Возможны и другие схемы проведения конкурса капитанов. Жюри боя заранее определяет способ проведения конкурса капитанов и сообщает о нем командам перед началом боя.

При желании на конкурс вместо капитана можно выставить любого другого члена команды.

Начисление баллов. Каждая задача оценивается в 12 баллов, которые по итогам раунда распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри. Если докладчик, не опираясь существенно на наводящие вопросы и иные соображения жюри и/или оппонента, рассказал правильное и полное решение, все 12 баллов достаются ему. Если же в решении были выявлены "дыры" (пробелы), то жюри по окончании дискуссии определяет их стоимость. После этого оппонент, как правило, сразу получает половину стоимости *обнаруженных им* дыр. Если некоторые из этих "дыр" были в ходе дискуссии полностью или частично закрыты, соответствующая часть остатка их общей стоимости распределяется между докладчиком и оппонентом пропорционально их вкладу в закрытие "дыр". При этом вкладом оппонента может признаваться не только закрытие им дыры (в случае полной или частичной перемены ролей), но и помощь докладчику в закрытии дыр путем высказанных *по окончании доклада* наводящих соображений. Все оставшиеся баллы жюри забирает себе.

Если не было полной перемены ролей, то оппонент не может получить больше 6 баллов.

Если ошибки или пробелы в докладе указаны самим докладчиком и не устранены его командой, то оппонент получает за них баллы так, как если бы он сам нашел эти недостатки. В частности, если, получив отказ от вызова, капитан вызывающей команды сразу признается, что у его команды нет решения, то команда соперников получает 6 баллов за оппонирование (которое в этом случае могло бы состоять из одной фразы: “У Вас нет решения”), а вызов признается некорректным. Докладчик и оппонент в этом случае не назначаются и выходы к доске не засчитываются.

Капитан. Во время боя только капитан может от имени команды обращаться к жюри и соперникам: сообщать о вызове или отказе, просить перерыв и т.д. Он имеет право в любой момент прекратить доклад или оппонирование представителя своей команды. Если капитан у доски, он оставляет за себя заместителя, исполняющего в это время обязанности капитана. Имена капитана и заместителя сообщаются жюри до начала решения задач.

Во время решения задач главная обязанность капитана – координировать действия членов команды так, чтобы имеющимися силами решить как можно больше задач. Для этого капитан распределяет между членами команды задачи для решения (с учетом их пожеланий), следит, чтобы каждая задача кем-то решалась, организует проверку найденных решений. Капитан заранее выясняет, кто будет докладчиком или оппонентом по той или иной задаче и определяет всю тактику команды на предстоящем бое.

Жюри. Жюри является верховным толкователем правил боя. В случаях, не предусмотренных правилами, оно принимает решение по своему усмотрению. Решения жюри являются обязательными для команд.

Во время решения командами задач всякое существенное разъяснение условий задач, данное одной из команд, должно быть в кратчайшее время сообщено жюри всем остальным командам.

Жюри может снять вопрос оппонента (например, если он не по существу), прекратить доклад или оппонирование, если они затягиваются. Если жюри не может быстро разобраться в решении, оно может с согласия обоих капитанов выделить своего представителя, который продолжит обсуждение задачи совместно с докладчиком и оппонентом в другом помещении. При этом бой продолжается по другим задачам, а очки по этой задаче начисляются позже.

Жюри ведет протокол боя. Если одна из команд не согласна с принятым жюри решением по задаче, она имеет право немедленно потребовать перерыв на несколько минут для разбора ситуации с участием Старшего по лиге. После начала следующего раунда счет предыдущего раунда, как правило, изменен быть не может. Единственное исключение составляет случай, когда Старший по лиге по результатам разбора ситуации принимает решение поставить вопрос о ней на заседании Методической комиссии (МК) турнира. В этом случае МК должна принять решение по этому вопросу в тот же день. Вопрос о корректности вызова на заседание МК вынесен быть не может и должен разрешаться Старшим лиги на месте.

Жюри следит за порядком. Оно может оштрафовать команду за шум, некорректное поведение, общение со своим представителем, находящимся у доски.

Жюри обязано мотивировать свои решения, не вытекающие непосредственно из правил боя.

ПРАВИЛА БЛИЦА

1. Задачи даются по одной.

2. Каждая команда по каждой задаче имеет право ответить один раз. Команда, первой давшая верное решение, получает 1 очко, после чего командам выдается следующая задача.

3. На решение каждой задачи отводится не более 4 минут. Если за 4 минуты ни одна из команд не изъявила желания отвечать, задача снимается.

4. Побеждает в блице команда, первой набравшая 3 очка. Две оставшиеся команды продолжают блиц. Второе место занимает команда, набравшая 3 очка второй.

5. Если для расстановки команд по местам не хватило 8 задач, нерешенные вопросы решаются жребием.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2001
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Как разрезать квадрат на 5 частей, из которых можно без пропусков и наложений сложить три попарно неравных квадрата?

2. Юра нарисовал на доске квадрат $ABCD$ и провел прямую l, проходящую через точку B и середину стороны CD, а затем стер всё, кроме точки A и проведенной прямой. Как циркулем и линейкой восстановить квадрат?

3. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнены равенства $\angle CBD = 2\angle ADB$, $\angle ABD = 2\angle CDB$ и $AB = CB$. Докажите, что $CD = AD$.

4. На Васиной чашке двухчашечных весов лежат гири весом 1, 3, 5, …, 2001 граммов, а на Петиной – 2, 4, …, 2000 граммов. Вася снимает со своей чашки гири по одной, пока она не станет строго легче, затем Петя разгружает свою чашку, пока она не станет легче, потом Вася и т.д. Выигрывает тот, кто первым разгрузит свою чашку. Кто выигрывает при правильной игре – Вася или Петя?

5. Решите систему уравнений:
$a_1+a_2 = a_3$, $a_2+a_3 = a_4$, …, $a_{n-1}+a_n = a_1$, $a_n+a_1 = a_2$.

6. Сколько существует таких трехзначных чисел n, что n^2+8n-1 делится на 239?

7. В поселке некоторые дома соединены проводами. Соседями называются двое, дома которых связаны проводом. Всегда ли удастся поселить в каждый дом по одному человеку – лжецу или рыцарю (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) – так, чтобы каждый на вопрос: «Есть ли среди ваших соседей лжецы?» ответил положительно? (Каждый знает про каждого из своих соседей, лжец он или нет).

8. На улице – 150 фонарей, расположенных в ряд. Некоторые из них разбиты, причем среди любых трех подряд идущих фонарей хотя бы один разбит. После того, как электрик Петров починил несколько фонарей, оказалось, что среди любых четырех подряд идущих фонарей разбито не более одного. Докажите, что электрик Петров починил по крайней мере 25 фонарей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2001

СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Как разрезать квадрат на 5 частей, из которых можно без пропусков и наложений сложить три попарно неравных квадрата?

2. Юра нарисовал на доске квадрат $ABCD$ и провел прямую l, проходящую через точку B и середину стороны CD, а затем стер всё, кроме точки A и проведенной прямой. Как циркулем и линейкой восстановить квадрат?

3. Чтобы от театра доехать до цирка, можно сесть на остановке на автобус №1 или на автобус №2. Они ходят с постоянными интервалами, причем автобус №1 в 2 раза реже, чем №2. За последние 20 минут автобус прошел 16 минут назад, 10 минут назад и 2 минуты назад. Когда будет следующий автобус?

4. Натуральное число удалось разложить на 10 сомножителей, больших 1, двумя способами так, что ни один из сомножителей первого разложения не совпадает ни с одним из сомножителей второго. Докажите, что это число можно разложить на 14 сомножителей (не обязательно различных), больших 1.

5. Решите систему уравнений:

$a_1+a_2 = a_3$, $a_2+a_3 = a_4$, …, $a_{n-1}+a_n = a_1$, $a_n+a_1 = a_2$.

6. Сколько существует таких трехзначных чисел n, что n^2+8n-1 делится на 239?

7. В поселке некоторые дома соединены проводами. Соседями называются двое, дома которых связаны проводом. Всегда ли удастся поселить в каждый дом по одному человеку – лжецу или рыцарю (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) – так, чтобы каждый на вопрос: «Есть ли среди ваших соседей лжецы?» ответил положительно? (Каждый знает про каждого из своих соседей, лжец он или нет).

8. На улице – 150 фонарей, расположенных в ряд. Некоторые из них разбиты, причем среди любых трех подряд идущих фонарей хотя бы один разбит. После того, как электрик Петров починил несколько фонарей, оказалось, что среди любых четырех подряд идущих фонарей разбито не более одного. Докажите, что электрик Петров починил по крайней мере 25 фонарей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2001
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Как разрезать квадрат на 5 частей, из которых можно без пропусков и наложений сложить три попарно неравных квадрата?

2. Точки E и F – середины сторон BC и CD квадрата $ABCD$. Отрезки AE и BF пересекаются в точке K. Что больше – площадь треугольника AKF или площадь четырехугольника $KECF$?

3. Чтобы от театра доехать до цирка, можно сесть на остановке на автобус №1 или на автобус №2. Они ходят с постоянными интервалами, причем автобус №1 в 2 раза реже, чем №2. За последние 20 минут автобус прошел 16 минут назад, 10 минут назад и 2 минуты назад. Когда будет следующий автобус?

4. В треугольнике ABC медиана AM равна стороне AB, а угол MAC равен 30°. Найдите углы треугольника.

5. Решите систему уравнений:

$$a_1+a_2 = a_3,\ a_2+a_3 = a_4,\ \ldots,\ a_{n-1}+a_n = a_1,\ a_n+a_1 = a_2.$$

6. Сколько существует таких трехзначных чисел n, что n^2+8n-1 делится на 239?

7. В поселке некоторые дома соединены проводами. Соседями называются двое, дома которых связаны проводом. Всегда ли удастся поселить в каждый дом по одному человеку – лжецу или рыцарю (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) – так, чтобы каждый на вопрос: «Есть ли среди ваших соседей лжецы?» ответил положительно? (Каждый знает про каждого из своих соседей, лжец он или нет).

8. Натуральное число удалось разложить на 10 сомножителей, больших единицы, двумя способами так, что ни один из сомножителей первого разложения не совпадает ни с одним из сомножителей второго. Докажите, что это число можно разложить на 14 сомножителей (не обязательно различных), больших единицы.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 18.02.2001
МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Как разрезать квадрат на 5 частей, из которых можно без пропусков и наложений сложить три попарно неравных квадрата?

2. Точки E и F – середины сторон BC и CD квадрата $ABCD$. Отрезки AE и BF пересекаются в точке K. Что больше – площадь треугольника AKF или площадь четырехугольника $KECF$?

3. Чтобы от театра доехать до цирка, можно сесть на остановке на автобус №1 или на автобус №2. Они ходят с постоянными интервалами, причем автобус №1 в 2 раза реже, чем №2. За последние 20 минут автобус прошел 16 минут назад, 10 минут назад и 2 минуты назад. Когда будет следующий автобус?

4. Для чисел x, y, z и k выполняются соотношения

$$\frac{7}{x+y}=\frac{k}{x+z}=\frac{11}{z-y}.$$

Найдите k.

5. Можно ли расставить числа от 1 до 25 в клетках квадрата 5×5 так, чтобы в каждой строке и каждом столбце произведение чисел делилось на 16?

6. Сколько существует таких трехзначных чисел n, что n^2+8n-1 делится на 17?

7. За круглым столом сидят 30 человек. Некоторые из них всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. У каждого спросили: «Есть ли среди ваших соседей лжец?», и каждый ответил: «Да». Сколько лжецов могло быть за столом?

8. Натуральное число удалось разложить на 10 сомножителей, больших единицы, двумя способами так, что ни один из сомножителей первого разложения не совпадает ни с одним из сомножителей второго. Докажите, что это число можно разложить на 14 сомножителей (не обязательно различных), больших единицы.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2001
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Юра составил из 32 раскрашенных доминошек квадрат 8×8 так, что любые две доминошки одного цвета не имеют общих точек. Докажите, что у Юры были доминошки хотя бы четырех цветов.

2. На плоскости дано 13 точек, причем из любых пяти четыре лежат на одной окружности. Докажите, что есть окружность, на которой лежат по крайней мере шесть из данных точек.

3. Имеется неограниченный запас гирь, каждая весом в целое число граммов. Требуется подобрать такой набор гирь общим весом в n граммов, что любой целочисленный вес, меньший n, можно было единственным образом уравновесить гирями из этого набора (гири одного веса считаются одинаковыми). Класть на одну и ту же чашку гири и груз не разрешается. Простейший способ – взять для этого много гирек весом в 1 грамм. Такой способ мы будем называть тривиальным. Докажите, что если нетривиальный способ подбора гирь существует, то число $n+1$ составное.

4. D, E и F – основания перпендикуляров, опущенных из внутренней точки M на стороны остроугольного треугольника ABC. Найдите геометрическое место таких точек M, что $\angle DEF = 90°$.

5. Докажите, что среди любых 22 последовательных натуральных чисел найдется число, не делящееся на сумму своих цифр.

6. В стране Фалкерсонии некоторые города соединены авиалиниями, причем из города А в город В нельзя попасть, сделав менее десяти пересадок. Докажите, что все авиалинии можно распродать 11 авиакомпаниям таким образом, что любой маршрут из А в В будет проходить по линиям, принадлежащим всем 11 компаниям.

7. В остроугольном треугольнике ABC BH – высота. Прямые, симметричные AC относительно AB и BC пересеклись в точке K. Докажите, что угол KBC равен углу ABH.

8. Докажите, что при любых натуральных a и b число $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ не является целым.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2001
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Юра составил из 32 раскрашенных доминошек квадрат 8×8 так, что любые две доминошки одного цвета не имеют общих точек. Докажите, что у Юры были доминошки хотя бы четырех цветов.

2. Пусть a, b, c и d – такие числа, что $ab = 1$ и $ac + bd = 2$. Докажите, что $cd \le 1$.

3. Имеется неограниченный запас гирь, каждая весом в целое число граммов. Требуется подобрать такой набор гирь общим весом в n граммов, что любой целочисленный вес, меньший n, можно было единственным образом уравновесить гирями из этого набора (гири одного веса считаются одинаковыми). Класть на одну и ту же чашку гири и груз не разрешается. Простейший способ – взять для этого много гирек весом в 1 грамм. Такой способ мы будем называть тривиальным. Докажите, что для $n = 6$ нетривиального подбора гирь не существует.

4. D, E и F – основания перпендикуляров, опущенных из точки M на стороны остроугольного треугольника ABC. Найдите геометрическое место таких точек M, что $\angle DEF = 90°$.

5. На плоскости дано 13 точек, причем из любых пяти четыре лежат на одной окружности. Докажите, что есть окружность, на которой лежат по крайней мере шесть из них.

6. В стране Фалкерсонии некоторые города соединены авиалиниями, причем из города А в город В нельзя попасть, сделав менее десяти пересадок. Докажите, что все авиалинии можно распродать 11 авиакомпаниям таким образом, что любой маршрут из А в В будет проходить по линиям, принадлежащим всем 11 компаниям.

7. Сумма 100 целых чисел равна нулю. Докажите, что из них можно по крайней мере 99 способами выбрать два числа, сумма которых неотрицательна.

8. Докажите, что при любых натуральных a и b число $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ не является целым.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2001
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Юра составил из 32 раскрашенных доминошек квадрат 8×8 так, что любые две доминошки одного цвета не имеют общих точек. Докажите, что у Юры были доминошки хотя бы четырех цветов.

2. На плоскости дано 13 точек, причем из любых пяти четыре лежат на одной окружности. Докажите, что есть окружность, на которой лежат по крайней мере шесть из них.

3. Имеется неограниченный запас гирь, каждая весом в целое число граммов. Требуется подобрать такой набор гирь общим весом в n граммов, что любой целочисленный вес, меньший n, можно было единственным образом уравновесить гирями из этого набора (гири одного веса считаются одинаковыми). Класть на одну и ту же чашку гири и груз не разрешается. Простейший способ – взять для этого много гирек весом в 1 грамм. Такой способ мы будем называть тривиальным. Известно, что число n+1 – составное. Докажите, что нетривиальный способ подбора гирь существует.

4. Докажите, что среди любых 22 последовательных натуральных чисел найдется число, не делящееся на сумму своих цифр.

5. В круге какого наименьшего диаметра могут найтись четыре точки A, B, C, D такие, что AB=3, BC=2, CD=4, DA=5?

6. Пусть a, b, c и d – такие числа, что $ab = 1$ и $ac + bd = 2$. Докажите, что $cd \le 1$.

7. Докажите, что при любых натуральных a и b число $\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ не является целым.

8. В стране Фалкерсонии некоторые города соединены авиалиниями, причем из города A в город B нельзя попасть, сделав менее десяти пересадок. Докажите, что все авиалинии можно распродать 11 авиакомпаниям таким образом, что любой маршрут из A в B будет проходить по линиям, принадлежащим всем 11 компаниям.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 19.02.2001
МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Сложите квадрат 8×8 из 32 доминошек так, чтобы ни в какой точке не сходились четыре доминошки.

2. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого больше 1500.

3. Имеется неограниченный запас гирь, каждая весом в целое число граммов. Требуется подобрать такой набор гирь общим весом в n граммов, что любой целочисленный вес, меньший n, можно было единственным образом уравновесить гирями из этого набора (гири одного веса считаются одинаковыми). Класть на одну и ту же чашку гири и груз не разрешается. Простейший способ – взять для этого много гирек весом в 1 грамм. Такой способ мы будем называть тривиальным. Докажите, что для $n = 6$ нетривиального подбора гирь не существует.

4. Каждый ученик класса занимается в двух кружках, и для каждых трех учеников есть кружок, в который они ходят вместе. Докажите, что имеется кружок, в котором занимаются все ученики.

5. В круге какого наименьшего диаметра могут найтись четыре точки A, B, C, D такие, что AB=3, BC=2, CD=4, DA=5?

6. Пусть a, b, c и d – такие числа, что $ab = 1$ и $ac + bd = 2$. Докажите, что $cd \le 1$.

7. Докажите, что при любых натуральных a и b число $\dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ не является целым.

8. Сумма 100 целых чисел равна нулю. Докажите, что из них можно по крайней мере 99 способами выбрать два числа, сумма которых неотрицательна.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2001
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В очки 15 жителей Изумрудного города вставлено по 10 зеленых, розовых и голубых стекол. Эти жители встали по кругу так, что любые два соседа не носят стекол одного цвета. Какое максимальное число жителей может носить очки с разноцветными стеклами?

2. Найдутся ли семь таких различных натуральных чисел, что у любых двух из них – одно и то же наименьшее общее кратное?

3. Натуральное число называется *палиндромом (перевертышем)*, если его запись читается одинаково слева направо и справа налево (например, 1043401). Все палиндромы выписали в ряд в порядке возрастания. Найдите все простые числа, которые могут быть делителями разности двух соседних чисел этого ряда.

4. В треугольнике ABC проведены биссектриса BL и медианы AM и CK. Оказалось, что треугольник MKL – равносторонний. Докажите, что и треугольник ABC – равносторонний.

5. Решите уравнение $(x+y)^2=(x+1)(y-1)$.

6. Около бензоколонки с неограниченным запасом бензина стоят три грузовика, каждый из которых на полной заправке может проехать 100 км. Машины могут заправляться неограниченное число раз. Разрешается также переливать бензин из одного бензобака в другой. Докажите, что одна из машин может (с помощью двух других) доехать до города, расположенного в 235 км от бензоколонки.

7. Натуральные числа от 1 до 50 расставлены в клетках прямоугольника 5×10 так, что в каждой из пяти строк слева направо и в каждом из 10 столбцов сверху вниз числа возрастают. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, стоящих в «уголке», образованном верхней строкой и левым столбцом?

8. В треугольнике ABC на стороне AB выбраны такие точки K и L, что $AK = BL$. Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно. Оказалось, что $KM = LN$. Докажите, что либо $AC = BC$, либо $KL=AB/2$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2001
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В очки 15 жителей Изумрудного города вставлено по 10 зеленых, розовых и голубых стекол. Эти жители встали по кругу так, что любые два соседа не носят стекол одного цвета. Какое максимальное число жителей может носить очки с разноцветными стеклами?

2. Найдутся ли семь таких различных натуральных чисел, что у любых двух из них – одно и то же наименьшее общее кратное?

3. Натуральное число называется *палиндромом (перевертышем)*, если его запись читается одинаково слева направо и справа налево (например, 1043401). Все палиндромы выписали в ряд в порядке возрастания. Найдите все простые числа, которые могут быть делителями разности двух соседних чисел этого ряда.

4. Про положительные числа a, b, x, y известно, что $ax+by = xy$. Докажите, что $ax+by \geq 4ab$.

5. Около бензоколонки с неограниченным запасом бензина стоят три грузовика, каждый из которых на полной заправке может проехать 100 км. Машины могут заправляться неограниченное число раз. Разрешается также переливать бензин из одного бензобака в другой. Докажите, что одна из машин может (с помощью двух других) доехать до города, расположенного в 195 км от бензоколонки.

6. Натуральные числа от 1 до 36 расставлены в клетках квадрата 6×6 так, что в каждой из шести строк слева направо и в каждом из шести столбцов сверху вниз числа возрастают. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, стоящих в «уголке», образованном верхней строкой и левым столбцом?

7. В треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно. На стороне AB выбраны такие точки K и L, что $AK = BL$, а отрезки KM и LN пересекаются и равны. Докажите, что $AC = BC$.

8. У Альберта сначала было 6 гиней, у Бруно – 3 гинеи и 23 шиллинга, а у Кристофера – 46 шиллингов. После того, как каждый из мальчиков подарил каждому из остальных по одной из своих монет, у всех оказались одинаковые суммы денег. Сколько шиллингов в одной гинее?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2001
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В очки 15 жителей Изумрудного города вставлено по 10 зеленых, розовых и голубых стекол. Эти жители встали по кругу так, что любые два соседа не носят стекол одного цвета. Какое максимальное число жителей может носить очки с разноцветными стеклами?

2. Найдутся ли семь таких различных натуральных чисел, что у любых двух из них – одно и то же наименьшее общее кратное?

3. Натуральное число называется *палиндромом (перевертышем)*, если его запись читается одинаково слева направо и справа налево (например, 1043401). Все палиндромы выписали в ряд в порядке возрастания. Найдите все простые числа, которые могут быть делителями разности двух соседних чисел этого ряда.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса AL, а затем проведены биссектрисы LN и LM углов ALB и ALC (точки N и M лежат на отрезках AB и AC). Оказалось, что $LN=LM$. Докажите, что или $AB=AC$, или угол BAC – прямой.

5. Около бензоколонки с неограниченным запасом бензина стоят два грузовика, каждый из которых на полной заправке может проехать 100 км. Машины могут заправляться неограниченное число раз. Разрешается также переливать бензин из одного бензобака в

другой. Докажите, что одна из машин может с помощью другой доехать до города, расположенного в 172 км от бензоколонки.

6. Натуральные числа от 1 до 36 расставлены в клетках квадрата 6×6 так, что в каждой из шести строк слева направо и в каждом из шести столбцов сверху вниз числа возрастают. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, стоящих в «уголке», образованном верхней строкой и левым столбцом?

7. У Альберта сначала было 6 гиней, у Бруно – 3 гинеи и 23 шиллинга, а у Кристофера – 46 шиллингов. После того, как каждый из мальчиков подарил каждому из остальных по одной из своих монет, у всех оказались одинаковые суммы денег. Сколько шиллингов в одной гинее?

8. В городе n $(n\geq 2)$ улиц идут с запада на восток и n улиц идут с севера на юг. Всего n^2 перекрестков. Каким наименьшим количеством автобусных маршрутов можно обойтись, чтобы от любого перекрестка до любого другого можно было бы доехать (возможно, с пересадками), а каждый маршрут шел по границе некоторого прямоугольника?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.2001
МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. В очки 15 жителей Изумрудного города вставлено по 10 зеленых, розовых и голубых стекол. Эти жители встали по кругу так, что любые два соседа не носят стекол одного цвета. Какое максимальное число жителей может носить очки с разноцветными стеклами?

2. Найдутся ли семь таких различных натуральных чисел, что у любых двух из них – одно и то же наименьшее общее кратное?

3. Натуральное число называется *палиндромом (перевертышем)*, если его запись читается одинаково слева направо и справа налево (например, 1043401). Все палиндромы выписали в ряд в порядке возрастания. Найдите все простые числа, которые могут быть делителями разности двух соседних чисел этого ряда.

4. Натуральные числа от 1 до 50 расставлены в клетках прямоугольника 5×10 так, что в каждой из пяти строк слева направо и в каждом из 10 столбцов сверху вниз числа возрастают. Какое наибольшее значение может принимать сумма всех чисел, стоящих в верхней строке?

5. Около бензоколонки с неограниченным запасом бензина стоят два грузовика, каждый из которых на полной заправке может проехать 100 км. Машины могут заправляться неограниченное число раз. Разрешается также переливать бензин из одного бензобака в другой. Докажите, что одна из машин может с помощью другой доехать до города, расположенного в 145 км от бензоколонки.

6. У Альберта сначала было 6 гиней, у Бруно – 3 гинеи и 23 шиллинга, а у Кристофера – 46 шиллингов. После того, как каждый из мальчиков подарил каждому из остальных по одной из своих монет, у всех оказались одинаковые суммы денег. Сколько шиллингов в одной гинее?

7. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена медиана CM. Оказалось, что биссектрисы треугольников AMC и BMC, проведенные из точки M, равны. Докажите, что треугольник ABC – равнобедренный.

8. В городе n $(n\geq 2)$ улиц идут с запада на восток и n улиц идут с севера на юг. Всего n^2 перекрестков. Каким наименьшим количеством автобусных маршрутов можно обойтись, чтобы от любого перекрестка до любого другого можно было бы доехать (возможно, с пересадками), а каждый маршрут шел по границе некоторого прямоугольника?

Блицбой за 1-3 места в подгруппе "Б" первой старшей лиги.
21 февраля 2001 г.

1. В магазин привезли муку в мешках. Известно, что в первом, втором и третьем мешках 60 кг муки, первом, втором и четвертом – 50 кг муки, первом, третьем и четвертом - 40 кг муки, а во втором, третьем и четвертом – 30 кг муки. Сколько муки было в каждом мешке?

2. По окружности выписаны числа: 1, 2, 4. Затем между каждыми двумя соседними числами вставили их сумму (в результате получилось: 1, 3, 2, 6, 4, 5). Потом повторили эту операцию еще 5 раз. Теперь вдоль окружности стоят 192 числа. Найдите их сумму.

3. Десять человек пришли в гости в галошах. Уходили они по одному, и каждый надевал произвольную пару галош, в которую он мог влезть (то есть не меньшего размера, чем его собственная). Какое наибольшее число людей не смогло надеть галоши?

4. Могут ли шесть попарных разностей для четырех чисел совпадать с суммами 2, 2, 3, 4, 5, 6?

5. Пусть M и K - точки на сторонах AC и BC треугольника ABC, O - точка пересечения отрезков AK и BM. Найдите площадь треугольника ABC, если $S_{AMO}=S_{BKO}=8$, $S_{KMO}=4$.

6. Существуют ли 19 последовательных натуральных чисел, сумма которых делится на 87?

7. Какую цифру надо поставить вместо знака "?" в числе 666..66?555..55 (шестерка и пятерка выписаны 25 раз), чтобы получившееся число делилось на 11?

8. В сказочной стране Перра-Терра среди прочих обитателей проживают карабасы и барабасы. Каждый карабас знаком с шестью карабасами и девятью барабасами. Каждый барабас знаком с десятью карабасами и семью барабасами. Кого в этой стране больше - карабасов или барабасов?

9. Докажите, что любое натуральное число, большее 5, можно представить как сумму простого числа и составного.

10. На длинной доске выписано 450-значное число 12345678912345... (50 раз повторена группа из 8 цифр 123456789). В этом числе вычеркиваются все цифры, стоящие на нечетных местах. Затем в полученном числе опять вычеркиваются все цифры, стоящие на нечетных местах, и так далее. Какая цифра будет вычеркнута последней? Ответ нужно обосновать.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2001
СТАРШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Два фокусника показывают зрителю такой фокус. У зрителя есть 78 карточек, пронумерованных числами от 1 до 78. Он выбирает из них 40 карточек и передает первому фокуснику. Тот возвращает зрителю две из них. Зритель добавляет к этим двум одну из оставшихся у него 38 карточек и, перемешав, передает эти три карточки второму фокуснику. Как фокусникам договориться, чтобы второй всегда с гарантией мог определить, какую из трех карточек добавил зритель?

2. При каких натуральных k, больших 2, но меньших 50, существует число, которое является суммой k идущих подряд натуральных чисел, но не является суммой m идущих подряд натуральных чисел при любом m от 2 до k–1?

3. В клетках прямоугольника 5×9 стоят 33 фишки. Ход состоит в том, что все фишки одновременно сдвигаются так, чтобы каждая фишка оказалась на клетке, соседней с исходной. При этом запрещается ставить две фишки на одну клетку (в том числе и в начальной позиции). Кроме того, если какая-то фишка передвинулась по горизонтали, то в следующий ход она должна передвигаться по вертикали, и наоборот. Докажите, что по этим правилам невозможно сделать подряд 100 ходов.

4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AD, BE и CF равны, и каждая из них делит шестиугольник на две части равной площади. Докажите, что каждая из них делит шестиугольник на две части равного периметра.

5. Можно ли отметить 2001 число так, чтобы для любого отмеченного числа x число $3x^2$–2 тоже было отмеченным.

6. В треугольнике ABC $\angle B = 120°$. BL – биссектриса этого треугольника. K и M – основания перпендикуляров, опущенных из точки L на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что $2KM < AC$.

7. В группе из 100 людей среди любых троих есть человек, знающих обоих других. Докажите, что из этой группы можно выбрать компанию из 50 человек, в которой все знакомы друг с другом.

8.По кругу расставлено $n > 3$ положительных чисел $a_1,a_2,...,a_n$, произведение которых равно 1. Доказать, что для этих чисел выполнено неравенство $(a_1+a_2)^2(a_2+a_3)^2... (a_n+a_1)^2 > (a_1+a_2+a_3)(a_2+a_3+a_4)\times... \times(a_{n-1}+a_n+a_1)(a_n+a_1+a_2)$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2001
СТАРШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Назовем число совершенненьким, если его цифры можно разбить на две группы так, что сумма цифр в первой группе равна сумме цифр во второй. Докажите, что среди любых трех подряд идущих чисел хотя бы одно не является совершенненьким.

2. Два фокусника показывают зрителю такой фокус. У зрителя есть 78 карточек, пронумерованных числами от 1 до 78. Он выбирает из них 40 карточек и передает первому фокуснику. Тот возвращает зрителю две из них. Зритель добавляет к этим двум одну из оставшихся у него 38 карточек и, перемешав, передает эти три карточки второму фокуснику. Как фокусникам договориться, чтобы второй всегда с гарантией мог определить, какую из трех карточек добавил зритель?

3. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AD, BE и CF равны и пересекаются в одной точке. Оказалось, что $AB = DE$, а $BC = EF$. Докажите, что $CD = FA$.

4. В группе из 100 людей среди любых троих есть человек, знающих обоих других. Докажите, что из этой группы можно выбрать компанию из 50 человек, в которой все знакомы друг с другом.

5 Докажите, что для положительных чисел x, y, z, произведение которых равно 1, выполнено неравенство $(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 > (x+y+z)^3$.

6. В треугольнике ABC $\angle B = 120°$. BL – биссектриса этого треугольника. K и M – основания перпендикуляров, опущенных из точки L на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что $2KM < AC$.

7. Некоторое число является суммой 100 идущих подряд натуральных чисел. Докажите, что оно является и суммой m идущих подряд натуральных чисел при некотором m большем 1 и меньшем 100?

8. Дети гуляют во дворе детского сада. Тех из них, у кого на ногах надето поровну носков, в 5 раз меньше, чем тех, у кого не поровну. Воспитательница велела детям переодеться, и каждый ребенок снял с одной ноги носок и надел его на другую ногу. Теперь тех, у кого носков на ногах поровну, стало в 2 раза меньше, чем тех, у кого не поровну. Могло ли быть так, что в начале прогулки более чем у половины детей на одной ноге было ровно на один носок меньше, чем на другой?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2001
МЛАДШАЯ ГРУППА, ВЫСШАЯ ЛИГА

1. В клетках прямоугольника 5×9 стоят 33 фишки. Ход состоит в том, что все фишки одновременно сдвигаются так, чтобы каждая фишка оказалась на клетке, соседней с исходной. При этом запрещается ставить две фишки на одну клетку (в том числе и в начальной позиции). Кроме того, если какая-то фишка передвинулась по горизонтали, то в следующий ход она должна передвигаться по вертикали, и наоборот. Докажите, что по этим правилам невозможно сделать подряд 100 ходов.

2. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AD, BE и CF равны и пересекаются в одной точке. Оказалось, что $AB = DE$, а $BC = EF$. Докажите, что $CD = FA$.

3. Найдите все такие числа n, что $n = [n/2]+ [n/3]+ [n/5]$. $[x]$ – это наибольшее целое число, не превосходящее числа x.

4. При каких натуральных k, больших 2, но меньших 50, существует число, которое является суммой k идущих подряд натуральных чисел, но не является суммой m идущих подряд натуральных чисел при любом m от 2 до k–1?

5.

6. В треугольнике ABC $\angle B = 120°$. BL – биссектриса этого треугольника. K и M – основания перпендикуляров, опущенных из точки L на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что $2KM < AC$.

7. В группе из 100 людей среди любых троих есть человек, знающих обоих других. Докажите, что из этой группы можно выбрать компанию из 50 человек, в которой все знакомы друг с другом.

8. Можно ли вырезать из клетчатой бумаги 16 прямоугольников так, чтобы из них можно составить любой клетчатый прямоугольник, обе стороны которого не больше 15?

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №4. 22.02.2001
МЛАДШАЯ ГРУППА, ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Назовем число совершенненьким, если его цифры можно разбить на две группы так, что сумма цифр в первой группе равна сумме цифр во второй. Докажите, что среди любых трех подряд идущих чисел хотя бы одно не является совершенненьким.

2. Два фокусника показывают зрителю такой фокус. У зрителя есть 78 карточек, пронумерованных числами от 1 до 78. Он выбирает из них 40 карточек и передает первому фокуснику. Тот возвращает зрителю две из них. Зритель добавляет к этим двум одну из оставшихся у него 38 карточек и, перемешав, передает эти три карточки второму фокуснику. Как фокусникам договориться, чтобы второй всегда с гарантией мог определить, какую из трех карточек добавил зритель?

3. В группе из 100 людей среди любых троих есть человек, знающих обоих других. Докажите, что из этой группы можно выбрать компанию из 50 человек, в которой все знакомы друг с другом.

4. В треугольнике ABC BL – биссектриса, K – основание перпендикуляра, опущенных из точки L на сторону AB. Докажите, что $2KL < AC$.

5. Дети гуляют во дворе детского сада. Тех из них, у кого на ногах надето поровну носков, в 5 раз меньше, чем тех, у кого не поровну. Воспитательница велела детям переодеться, и каждый ребенок снял с одной ноги носок и надел его на другую ногу. Теперь тех, у кого носков на ногах поровну, стало в 2 раза меньше, чем тех, у кого не поровну. Могло ли быть так, что в начале прогулки более чем у половины детей на одной ноге было ровно на один носок меньше, чем на другой?

6. По кругу расставлены 14 положительных чисел (не обязательно целых). Сумма любых четырех чисел, стоящих подряд, равна 30. Докажите, что каждое из этих чисел меньше 15.

7. Найдите все тройки натуральных чисел x, y, z такие, что $xyz = 170170$ и $x^2y + y^2z + z^2x = xy^2 + yz^2 + zx^2$.

8. Найдите 9 клетчатых прямоугольников (среди них могут быть и равные), из которых можно составить любой клетчатый прямоугольник, обе стороны которого не больше 7?

Турнирные таблицы

Старшая группа

Высшая лига, подгруппа А

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Киров-8-I		58:34	39:38	36:58	3	II
2	Пермь-146	34:58		37:55	37:31	2	III
3	Ижевск-41	38:39	55:37		52:28	5	I
4	Барнаул	58:36	31:37	28:52		2	IV

Высшая лига, подгруппа Б

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Екатеринбург-Н.Тагил		33:53	41:21	35:53	2	III
2	Ижевск-30	53:33		34:46	56:6	4	I
3	Набережные Челны-8	21:41	46:34		35:40	2	IV
4	Казань-I	53:35	6:56	40:35		4	II

Первая лига, подгруппа А

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Озерск		9:31	50:39	51:28	4	
2	Снежинск-127	31:9		41:52	83:9	4	
3	Казань-II	39:50	52:41		52:0	4	
4	Тюмень	28:51	9:83	0:52		0	IV

Первая лига, подгруппа Б

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Киров-8-II		43:51	36:14	58:35	4	II
2	Москва-Л2Ш	51:43		73:13	27:30	5	I
3	Снежинск-125	14:36	13:73		53:23	2	III
4	Тобольск	35:58	30:27	23:53		1	IV

Младшая группа

Высшая лига, подгруппа А

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Санкт-Петербург		43:30	54:32	66:24	6	I
2	Ижевск-29	30:43		24:34	16:60	0	IV
3	Пермь-9	32:54	34:24		21:7	4	II
4	Челябинск	24:66	60:16	7:21		2	III

Высшая лига, подгруппа Б

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Омск-Екатеринбург		15:65	22:21	36:38	2	IV
2	Киров-7	65:15		77:13	24:39	4	I
3	Москва-7	21:22	13:77		40:32	3	II
4	Саров	38:36	39:24	32:40		3	III

Первая лига, подгруппа А

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Казань-7		6:47	19:47	27:50	0	IV
2	Нижний Новгород-Киров	47:6		36:49	40:32	4	II
3	Набережные Челны-6-7	47:19	49:36		13:60	6	I
4	Киров-6	50:27	32:40	13:60		2	III

Первая лига, подгруппа Б

	Команда	1	2	3	4	Очки	Место
1	Москва-ММФ		14:65	35:43	24:59	0	IV
2	Екатеринбург-7	65:14		31:35	37:46	2	III
3	Салават	43:35	35:31		26:52	4	II
4	Глазов	59:24	46:37	52:26		6	I

XVII Уральский турнир юных математиков

Финал

Старшая группа
Высшая лига

За 1-2 места: Ижевск-41 – Ижевск-30 = 30:14
За 3-4 места: Киров-8-I – Казань-I = 65:24
За 5-6 места: Екатеринбург-Н.Тагил – Пермь-146 = 62:15
За 7-8 места: Набережные Челны – Барнаул = 46:43 (ничья)

Старшая группа
Первая лига

За 1-2 места: Москва-Л2Ш – Снежинск-127 = 54:36
За 3-4 места: Киров-8-II – Озерск-8 = 49:45
За 5-6 места: Казань-II – Снежинск-125 = 57:24
За 7-8 места: Тобольск – Тюмень = 41:23

Младшая группа
Высшая лига

За 1-2 места: Санкт-Петербург – Киров-7 = 49:29
За 3-4 места: Москва-43 – Пермь-9 = 43:18
За 5-6 места: Челябинск – Саров = 36:34 (ничья)
За 7-8 места: Ижевск-29 – Омск-Екатеринбург=28:29 (ничья)

Младшая группа
Первая лига

За 1-2 места: Глазов – Н.Челны-6-7 = 45:36
За 3-4 места: Н.Новгород – Салават = 42:28
За 5-6 места: Киров-6 – Екатеринбург-7 = 25:28 (ничья)
За 7-8 места: Казань-7 – Москва-МММФ = 34:36 (ничья)

ЯнусС.РФ