

Главное управление кадров Министерства обороны Российской Федерации

8 класс

Задача 1. На стадионе. Кадет бежит по стадиону, длина круга которого $L = 400$ м. Первый круг он пробежал со средней скоростью $v_1 = 9,0$ м/с. С какой скоростью v_2 ему нужно пробежать второй круг, чтобы средняя скорость за два круга составила $v_{\text{ср.}} = 6$ м/с?

Ответ: 4,5 м/с.

Возможное решение и критерии оценивания.

$$t_1 = \frac{L}{v_1}, \text{ (1 балл); } t_2 = \frac{L}{v_2}, \text{ (1 балл); } T = t_1 + t_2 = \frac{2L}{v_{\text{ср.}}}, \text{ (1 балл).}$$

$$v_2 = \frac{L}{t_2} = \frac{L}{T - t_1} = \frac{L}{\frac{2L}{v_{\text{ср.}}} - \frac{L}{v_1}} = \frac{v_1 v_{\text{ср.}}}{2v_1 - v_{\text{ср.}}}. \text{ (2 балла). } v_2 = 4,5 \text{ м/с. (1 балл).}$$

Задача 2. Лёд и пар. В герметичный теплоизолированный сосуд поместили 140 г льда при температуре -10°C , 500 г воды при температуре 20°C и 140 г пара при температуре 100°C . Какая температура установится в сосуде после наступления теплового равновесия?

Сколько воды (в жидкой фазе) окажется в сосуде?

Удельная теплоемкость воды равна $c_v = 4,20$ кДж/(кг $\cdot^\circ\text{C}$), удельная теплоемкость льда равна $c_{\text{л}} = 2,10$ кДж/(кг $\cdot^\circ\text{C}$), удельная теплота плавления льда $\lambda_{\text{л}} = 330$ кДж/кг, удельная теплота парообразования воды $r = 2\,300$ кДж/(кг).

Ответ: 1) 100°C ; 2) 760 г.

Возможное решение и критерии оценивания.

Приведём лёд и воду к температуре 100°C .

$$Q_{\text{л+}} = m_{\text{л}} c_{\text{л}} (t_0 - t_{-10}) + m_{\text{л}} \lambda + m_{\text{л}} c_{\text{в}} (t_{100} - t_0) = 2,94 + 46,2 + 58,8 = 107,94 \text{ кДж. (1 балл)}$$

$$Q_{\text{в+}} = m_{\text{в}} c_{\text{в}} (t_{100} - t_{20}) = 58,8 = 168,0 \text{ кДж. (1 балл)}$$

$$Q_{+} = 107,94 \text{ кДж} + 168,0 \text{ кДж} = 275,94 \text{ кДж. (1 балл)}$$

При конденсации всего пара выделится теплоты $Q_{-} = m_{\text{п}} r = 322,0$ кДж. (1 балл)

Мы видим, что этой теплоты хватит, чтобы покрыть все потребности в Q_{+} . Следовательно, конечная температура в сосуде станет равной 100°C . (1 балл).

За счёт конденсации пара воды в жидком состоянии окажется

$$\frac{Q_{+}}{r} + (m_{\text{л}} + m_{\text{в}}) = 120,0 \text{ г} + 640,0 \text{ г} = 760 \text{ г. (1 балл).}$$

Задача 3. Деревянный шар. Деревянный шар массы $m_{\text{д}} = 700$ г привязан нитью ко дну вертикального цилиндра с водой и полностью в неё погружен. В шаре имеется полость объемом $V = 0,5$ л. Площадь дна цилиндра $S = 500$ см 2 , $g = 10$ Н/кг.

1) Найдите силу натяжения нити.

2) Определите, как и насколько изменится уровень воды, если нить вдруг порвётся и шар всплывет.

Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м 3 , плотность дерева $\rho_{\text{д}} = 700$ кг/м 3 .

Ответ: 1) 8 Н; 2) уровень воды понизится на 1,6 см.

Главное управление кадров Министерства обороны Российской Федерации

Возможное решение и критерии оценивания.

Объем шара с полостью $V_{\text{общ}} = V + \frac{m_{\text{д}}}{\rho_{\text{д}}} = 1500 \text{ см}^3$ (2 балла)

Сила натяжения нити: $T = V_{\text{общ}} \rho_{\text{в}} g - m_{\text{в}} g = 15 \text{ Н} - 7 \text{ Н} = 8 \text{ Н}$ (2 балла)

Уровень воды понизится на $\Delta h = \frac{T}{\rho g S} = 1,6 \text{ см}$. (2 балла)

Другой способ нахождения Δh .

Погруженный шар вытесняет столб воды высотой $h_1 = \frac{V_{\text{общ}}}{S} = 3 \text{ см}$.

Плавающий шар вытесняет столб воды высотой $h_2 = \frac{m_{\text{д}}}{\rho_{\text{в}}} \frac{1}{S} = \frac{700}{1} \frac{1}{500} \text{ см} = 1,4 \text{ см}$.

Изменение уровня воды при всплытии шара $\Delta h = h_2 - h_1 = 1,4 \text{ см} - 3 \text{ см} = -1,6 \text{ см}$.

Задача 4. Погрузка БМД. Боевую десантную машину БМД-4М массой $m = 13,6 \text{ т}$ с помощью полиспаста (системы подвижных и неподвижных блоков) равномерно поднимают на платформу.

1) Определите КПД полиспаста, если для подъема машины на высоту $H = 2,0 \text{ м}$ требуется совершить работу $A = 340 \text{ кДж}$.

2) Найдите силу, с которой при этом нужно тянуть за свободный конец троса.

3) С какой скоростью v_1 нужно тянуть свободный конец троса, чтобы БМД поднималась вверх со скоростью $v_2 = 5,0 \text{ см/с}$? Примите $g = 10 \text{ Н/кг}$.

Ответ: 1) $\eta = 80\%$; 2) $F = 21,25 \text{ кН}$; 3) $v_3 = 40 \text{ см/с}$.

Возможное решение и критерии оценивания.

Полезная работа по подъему БМД составит $A_{\text{пол}} = mgH = 272 \text{ кДж}$. (1 балл)

КПД полиспаста $\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A} = 0,8$ или 80% . (2 балла)

Каждый подвижный блок уменьшает усилие по подъему груза в 2 раза. 3 подвижных блока уменьшают требуемое усилие в 8 раз, т.е. $F = \frac{A}{8H} = 21,25 \text{ кН}$ (2 балла).

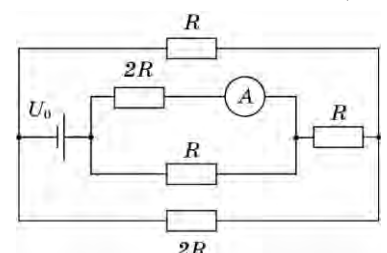
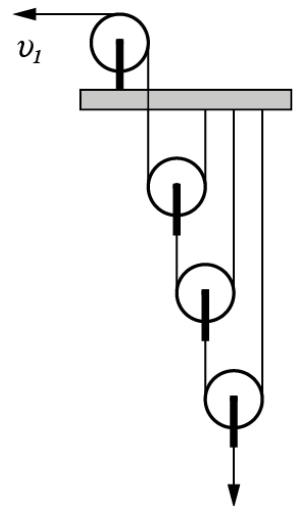
Скорость, с которой нужно тянуть за верёвку в 8 раз больше скорости подъема БМД: $v_1 = 40,0 \text{ см/с}$. (1 балл).

Задача 5. Двойной контур. Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке, состоит из резисторов сопротивлением R и $2R$, идеального источника постоянного тока, напряжение которого $U_0 = 5,6 \text{ В}$, и идеального амперметра. Сопротивление резистора $R = 2,0 \text{ кОм}$.

1) Определите показание амперметра.

2) Определите показание идеального вольтметра, если его включить в цепь вместо амперметра.

Ответ: 1) $I_A = 0,4 \text{ мА}$; 2) $U_V = 2,1 \text{ В}$.



Главное управление кадров Министерства обороны Российской Федерации

Возможное решение и критерии оценивания.

Сопротивление внешнего контура $R_{\text{внешн}} = \frac{2R \cdot R}{2R + R} = \frac{2}{3} R$. (0,5 балла)

Сопротивление внутреннего контура $R_{\text{внутр}} = \frac{2R \cdot R}{2R + R} + R = \frac{5}{3} R$. (0,5 балла)

Общее сопротивление цепи $R_{\text{общ}} = \frac{2}{3} R + \frac{5}{3} R = \frac{7}{3} R$. (0,5 балла)

Сила тока, текущего через батарейку $I_{\text{общ}} = \frac{3U_0}{7R} = 1,2 \text{ мА}$. (0,5 балла)

Сила тока, текущего через амперметр: $I_A = I_{\text{общ}} \frac{R}{R + 2R} = 0,4 \text{ мА}$. (1 балл)

Общее сопротивление цепи во втором случае: $R_{\text{общ}} = \frac{2}{3} R + 2R = \frac{8}{3} R$. (1 балл)

Сила тока, текущего через батарейку во втором случае $I_{\text{общ}} = \frac{3U_0}{8R} = 1,05 \text{ мА}$. (1 балл)

Напряжение на вольтметре: $U_V = I_{\text{общ}} R = \frac{3}{8} U_0 = 2,1 \text{ В}$. (1 балл)

Главное управление кадров Министерства обороны Российской Федерации

9 класс

Задача 1. У светофора. Автомобиль, который может разгоняться с максимальным ускорением $a = 2 \text{ м/с}^2$, стартует от светофора. Через $S = 125 \text{ м}$ метров находится следующий светофор, который начнет мигать зеленым светом через $\tau = 15$ секунд после старта автомобиля. Какое минимальное время следует разгоняться автомобилю, чтобы успеть проехать второй светофор до того, как он замигает? Считайте, что на участке от места старта до светофора автомобиль не тормозит.

Ответ: 5 с.

Возможное решение и критерии оценивания. За время разгона t пройденный путь составит $S_1 = \frac{at^2}{2}$, а скорость станет $v = at$. Тогда за оставшееся время $\tau - t$ автомобиль пройдет путь $S_2 = at(\tau - t)$. Весь пройденный путь составит $S = at\tau - \frac{at^2}{2}$. (2 балла)

Решая квадратное уравнение $t^2 - 2\tau t + \frac{2S}{a} = 0$ получаем два корня:

$$t = \tau \pm \sqrt{\tau^2 - \frac{2S}{a}}. \quad (2 \text{ балла})$$

Поскольку $t < \tau$, выбираем меньше корень: $t = \tau - \sqrt{\tau^2 - \frac{2S}{a}} = 5 \text{ с}$.

(2 балла)

Задача 2. Раптор. Патрульный катер «Раптор» массой $m = 8,1 \text{ т}$ с помощью системы блоков поднимают над водой с ускорением $a = g/6$. Какую силу F для этого нужно прикладывать к среднему блоку? Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Массой блоков пренебречь.

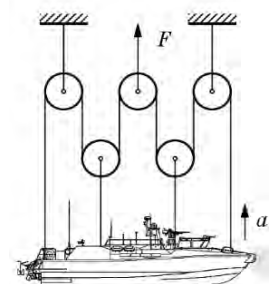
Ответ: $F = 31,5 \text{ кН}$.

Возможное решение и критерии оценивания.

Пусть T – сила натяжения троса, огибающего блоки. Силы натяжения веревок, привязанных к осям блоков, а также сила F , равны $2T$. (2 балла)

На катер в вертикальном направлении вверх действуют две силы T , две силы $2T$ и сила mg вниз. По второму закону Ньютона: $a = \frac{6T - mg}{m}$. (2 балла)

Отсюда $F = 2T = \frac{m(a + g)}{3} = \frac{7}{18}mg = 31,5 \text{ кН}$. (2 балла)



Главное управление кадров Министерства обороны Российской Федерации

Задача 3. Лёд и масло. В вертикальном цилиндрическом сосуде с маслом, не касаясь дна, плавает кусок льда массой $m_{\text{л}} = 950$ г. Определите, как и насколько изменится уровень жидкости в сосуде после того как лёд растает. Площадь дна сосуда $S = 50 \text{ см}^2$, плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000 \text{ кг/м}^3$, плотность льда $\rho_{\text{л}} = 920 \text{ кг/м}^3$, плотность масла $\rho_{\text{м}} = 950 \text{ кг/м}^3$.

Ответ: Уровень понизится на $\Delta h = 1 \text{ см}$.

Возможное решение и критерии оценивания. Объем воды V_1 , вытесненный льдом, найдём из условия его плавания: $\rho_{\text{м}} V_1 g = m_{\text{л}} g$; $V_1 = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{м}}}$. (1 балл)

Пусть $V_{\text{м}}$ – объем масла. Масло с погруженной частью льда представляет собой цилиндр объемом: $V_{\text{м}} + V_1 = S h_1$. (1 балл)

Высота столба масла с плавающим в нём льдом $h_1 = \frac{V_{\text{м}} + V_1}{S}$. (0,5 балла)

После того, как лёд растает, масло с водой будут занимать цилиндр объёмом:

$$V_{\text{м}} + \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} = S h_2. \quad (1 \text{ балл})$$

$$\text{Конечная высота поверхности масла } h_2 = \frac{V_{\text{м}} + \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}}{S}. \quad (0,5 \text{ балла})$$

$$\text{Тогда изменение уровня масла } \Delta h = h_2 - h_1 = \frac{m_{\text{л}}}{S \rho_{\text{в}}} - \frac{m_{\text{л}}}{S \rho_{\text{м}}} = -1 \text{ см}. \quad (1 \text{ балл})$$

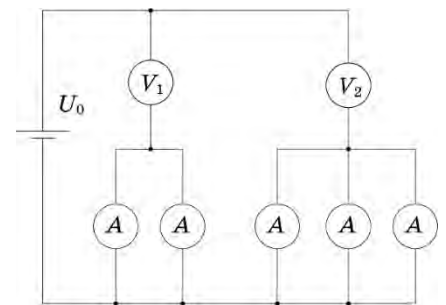
Знак «-» говорит о том, что уровень понизится. (1 балл)

Задача 4. Вольтметры и амперметры. Электрическая цепь, схема которой приведена на рисунке, состоит из одинаковых вольтметров, амперметров и идеального источника постоянного тока, напряжение которого U_0 не известно. Показание вольтметра V_1 равно $U_1 = 10,0 \text{ В}$, а вольтметра V_2 , соответственно $U_2 = 10,3 \text{ В}$. Определите напряжение U_0 .

Ответ: $U_0 \approx 11,0 \text{ В}$.

Возможное решение и критерии оценивания.

Сила тока, текущего через вольтметр V_1 равна $I_1 = \frac{U_1}{R_v}$.



Падение напряжения на подсоединенном к вольтметру амперметре $U_{\text{А1}} = \frac{1}{2} \frac{U_1}{R_v} r$.

$$\text{Напряжение } U_0 = U_1 + \frac{U_1}{2 R_v} r = U_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r}{R_v} \right) \text{ или } 2 \left(\frac{U_0}{U_1} - 1 \right) = \frac{r}{R_v}. \quad (2 \text{ балла})$$

Аналогичным образом получим для ветви с вольтметром V_2 :

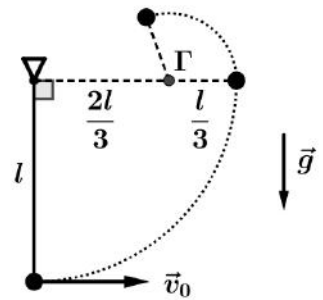
$$\text{Напряжение } U_0 = U_2 + \frac{U_2}{3 R_v} r = U_2 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{r}{R_v} \right) \text{ или } 3 \left(\frac{U_0}{U_2} - 1 \right) = \frac{r}{R_v}. \quad (2 \text{ балла})$$

Приравняв отношение $\frac{r}{R_v}$, взятое из первого и второго уравнения, получим:

$$U_0 = \frac{U_1 U_2}{3 U_1 - 2 U_2} \approx 11 \text{ В}. \quad (2 \text{ балла})$$

Главное управление кадров Министерства обороны Российской Федерации

Задача 5. Пригвоздили. Маленький шарик подвешен на нити длиной $l = 30$ см. На расстоянии $2l/3$ от точки подвеса на том же уровне в стену вбит гвоздь Γ . Найдите, какую минимальную скорость v_0 в горизонтальном направлении необходимо придать шарiku, чтобы он мог совершить полный оборот вокруг гвоздя и при этом нить не провисала?



Ответ: $\sqrt{3gl} = 3$ м/с.

Возможное решение и критерии оценивания.

Для того, чтобы шарик смог пройти полный оборот вокруг гвоздика, необходимо, чтобы нить не провисла в верхней точке. Условием этого будет неравенство $T \geq 0$.

Пусть скорость шарика в верхней точке равна v_1 . Она направлена горизонтально. Запишем ЗСЭ для начального момента и моментом прохождения шариком верхней точки:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg \left(l + \frac{l}{3} \right) + \frac{mv_1^2}{2}. \quad (2 \text{ балла})$$

Отсюда
$$v_1^2 = v_0^2 - \frac{8}{3} gl.$$

Запишем 2-й закон Ньютона для шарика в верхней точке в проекции на вертикальную ось,

направленную вниз: $a_c = \frac{v_1^2}{\left(\frac{l}{3} \right)} = \frac{mg + T}{m}. \quad (2 \text{ балла})$

$$T = \frac{3mv_1^2}{l} - mg \geq 0. \quad (1 \text{ балл})$$

Из полученного неравенства следует, что $v_1^2 \geq \frac{gl}{3}$; $v_0^2 = \frac{gl}{3} + \frac{8gl}{3} = 3gl$ или

$$v_0 = \sqrt{3gl} = 3 \text{ м/с}. \quad (1 \text{ балл})$$

Главное управление кадров Министерства обороны Российской Федерации

10 класс

Задача 1. Ворона и сыр. Ворона с сыром сидит на ветке дерева на высоте $H = 5$ м над землей. Внизу строго под ней сидит лисица, которая может прыгать вертикально вверх с максимальной скоростью $v_0 = 6$ м/с. Через какое время после того, как ворона каркнет, лисице следует прыгнуть за сыром, чтобы как можно скорее его заполучить? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Ответ: $\frac{\sqrt{2gH - v_0^2} - v_0}{g} = 0,2$ с.

Возможное решение и критерии оценивания.

Минимальное время будет тогда, когда лиса поймает сыр в наивысшей точке своего полёта.

1) $H - \frac{g(\Delta t + t)^2}{2} = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. (2 балла)

Время полёта лисы до высшей точки: 2) $t = \frac{v_0}{g}$. (1 балл)

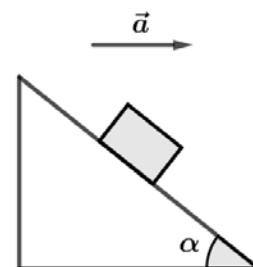
Решая совместно уравнения (1) и (2) относительно Δt получим квадратное уравнение:

$(\Delta t)^2 + 2\left(\frac{v_0}{g}\right)\Delta t + \left(2\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 - \frac{2H}{g}\right) = 0$. (1 балл)

Корнем этого уравнения будет $\Delta t = \frac{\sqrt{2gH - v_0^2} - v_0}{g} = 0,2$ с. (2 балла)

Задача 2. Груз на клине. На горке с углом наклона $\alpha = 45^\circ$ расположен груз массой m . Горка движется вправо с постоянным ускорением a . Коэффициент трения между грузом и плоскостью равен $\mu = 0,2$. Найдите максимальное ускорение, при котором груз будет оставаться в покое относительно горки. Примите ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Ответ: $a_2 = 3g / 2 = 15$ м/с².



Возможное решение и критерии оценивания.

Введём ось OX вдоль наклонной поверхности горки, а ось OY перпендикулярно этой поверхности и направленной вверх.

1) OX : $ma \cos \alpha = mg \sin \alpha + \mu N$. (2 балла)

2) OY : $ma \sin \alpha = N - mg \cos \alpha$ (2 балла)

Из (2) находим N . $N = ma \sin \alpha + mg \cos \alpha$.

Подставляя в (1) найденное значение N , получим:

$ma \cos \alpha = mg \sin \alpha + \mu(ma \sin \alpha + mg \cos \alpha)$. После алгебраических преобразований

получим: $a = g \frac{(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)} = g \frac{1 + \mu}{1 - \mu} = \frac{3}{2} g$. (2 балла)

Главное управление кадров Министерства обороны Российской Федерации

Задача 3. Водород и гелий. Вычислите внутреннюю энергию смеси водорода и гелия объемом $V = 6$ л при давлении $p = 2 \cdot 10^5$ Па, если известно, что их парциальные давления относятся как $p_{H_2} / p_{He} = 1/3$.

Считайте, что теплоёмкость C_v от температуры не зависит; оба газа идеальные; при нуле градусов Кельвина внутренняя энергия смеси газов равна нулю.

Ответ: 2,1 кДж.

Возможное решение и критерии оценивания.

$$p_{H_2} V = \nu_{H_2} RT; \quad p_{He} V = \nu_{He} RT; \quad \frac{p_{H_2}}{p_{He}} = \frac{1}{3} = \frac{\nu_{H_2}}{\nu_{He}} \quad (1 \text{ балл})$$

$$\nu_{H_2} + \nu_{He} = \nu; \quad \nu_{H_2} = \nu / 4; \quad \nu_{He} = 3\nu / 4. \quad (1 \text{ балл})$$

$$U(He) = \frac{3}{4} \nu \left(\frac{3}{2} R \right) T = \frac{9}{8} \nu RT. \quad (1 \text{ балл})$$

$$U(H_2) = \frac{1}{4} \nu \left(\frac{5}{2} R \right) T = \frac{5}{8} \nu RT. \quad (1 \text{ балл})$$

Внутреннюю энергию смеси водорода и гелия

$$U = \frac{9}{8} \nu RT + \frac{5}{8} \nu RT = \frac{7}{4} \nu RT = \frac{7}{4} pV = 2,1 \text{ кДж}. \quad (1 \text{ балл})$$

Задача 4. Запаянная трубка. В U-образной трубке постоянного сечения $S = 2 \text{ см}^2$ налита вода. Со стороны запаянного конца над водой находится воздух, другой конец связан с атмосферой. Уровень воды в обоих коленах одинаков. Высота столбика воздуха в запаянном колене $H = 100$ см. Найдите, какой объем воды нужно долить в открытый конец, чтобы высота столбика воздуха в запаянном конце трубки уменьшилась на $h = 1$ см. Атмосферное давление $p_0 = 100$ кПа, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³. Воздух считать идеальным газом, а процесс изотермическим. Давлением насыщенного водяного пара при данной температуре пренебречь.

Ответ: $V = Sh \left(\frac{p_0}{\rho g(H-h)} + 2 \right) \approx 0,024 \text{ л}.$

Возможное решение и критерии оценивания.

Пусть уровень долитой воды равен x . Избыточное давление в запаянном конце трубки $\Delta p = \rho g(x - 2h).$ (1 балл)

По закону Бойля-Мариотта $p_0 SH = (p_0 + \Delta p) S(H - h).$ (2 балла)

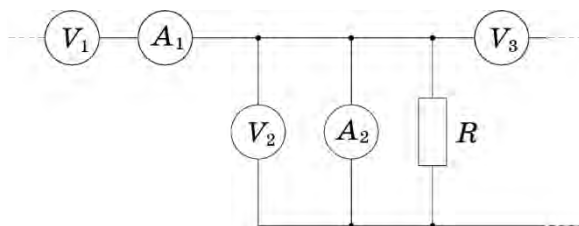
После алгебраических преобразований получим:

$$x = \frac{p_0 h}{\rho g(H-h)} + 2h = h \left(\frac{p_0}{\rho g(H-h)} + 2 \right) \text{ или } V = Sh \left(\frac{p_0}{\rho g(H-h)} + 2 \right). \quad (2 \text{ балла})$$

Численный ответ: $V \approx 0,024 \text{ л} = 24 \text{ см}^3.$ (1 балл)

Главное управление кадров Министерства обороны Российской Федерации

Задача 5. Фрагмент цепи. Фрагмент разветвлённой электрической цепи представлен на рисунке. Показание вольтметра V_1 равно 10 В, вольтметра V_3 равно 50 В, миллиамперметра A_1 равно



20 мА, миллиамперметра A_2 равно 40 мА, сила тока, протекающего через резистор R , равна 20 мА. Вычислите сопротивление резистора R .

Ответ: $R_1 = 500 \text{ Ом}$; $R_2 = 1\,500 \text{ Ом}$.

Возможное решение и критерии оценивания.

Сопротивление вольтметра $R = \frac{U_1}{I_1} = \frac{10 \text{ В}}{20 \text{ мА}} = 0,5 \text{ кОм}$. (1 балл)

Сила тока, текущего через вольтметр V_3 равна $I_3 = \frac{U_3}{R} = \frac{50 \text{ В}}{0,5 \text{ кОм}} = 100 \text{ мА}$ (1 балл)

Предположим, что ток втекает через миллиамперметра A_1 , а вытекает через вольтметра V_3 . Тогда он втекает во фрагмент цепи через вольтметра V_2 , миллиамперметра A_2 и резистор R . Тогда сила тока, текущего через вольтметра V_2 , равна $I_{V_2} = I_3 - I_1 - I_2 - I_R = 20 \text{ мА}$.

Сопротивление резистора равно сопротивлению вольтметра и равно $R = 0,5 \text{ кОм}$. (1 балл)

Теперь предположим, что ток втекает через миллиамперметра A_1 через вольтметра V_3 . В этом случае он вытекает из фрагмента цепи через вольтметра V_2 , миллиамперметра A_2 и резистор R . В этом случае сила тока, текущего через вольтметр V_2 равна

$I_{V_2} = I_3 + I_1 - I_2 - I_R = 60 \text{ мА}$. Падение напряжения на этом вольтметре

$U_2 = I_{V_2} R = 60 \text{ мА} \cdot 0,5 \text{ кОм} = 30 \text{ В}$. (1 балл)

Сопротивление резистора равно $\frac{U_2}{I_R} = \frac{30 \text{ В}}{20 \text{ мА}} = 1,5 \text{ кОм}$. (2 балла)

Главное управление кадров Министерства обороны Российской Федерации

11 класс

Задача 1. Ворона и лиса. Лисица преследует ворону, летящую с сыром в клюве на высоте $H = 3$ м со скоростью $v_b = 3$ м/с, находясь все время точно под ней. В некоторый момент ворона роняет сыр. Лисица тут же прыгает со скоростью $v_l = 6$ м/с относительно земли и ловит сыр в полете. Примите ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

- 1) Под каким углом α к горизонту прыгнула лиса?
- 2) Через какое время t после прыжка сыр окажется у нее в зубах?
- 3) На какой высоте h лиса поймала сыр?

Ответ: $\alpha = 60^\circ$, $t = 0.58$ с, $h = 1.33$ м.

Возможное решение и критерии оценивания. Чтобы лиса поймала сыр, проекции скоростей лисы и сыра на горизонтальную ось должны быть равны между собой:

$$v_l \cos \alpha = v_b, \text{ откуда } \alpha = \arccos(v_b / v_l) = 30^\circ. \quad (2 \text{ балла})$$

Если ось Оу направить вертикально вверх, поместив начало отсчёта в место прыжка лисы, то уравнения движения для лисы и сыра в проекции на эту ось будет иметь вид:

$$y_l(t) = v_l t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}, \quad y_c(t) = H - \frac{gt^2}{2}.$$

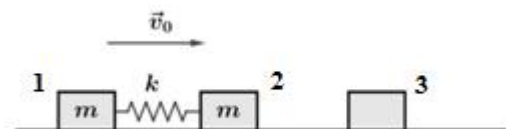
1. В момент встречи лисы и сыра будет выполнено условие: $y_l(t_1) = y_c(t_1)$, откуда

$$t_1 = \frac{H}{\sqrt{v_l^2 - v_b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.58 \text{ с}. \quad (2 \text{ балла})$$

2. Высота, на которой лиса поймала сыр: $y_l(t_1) = H \left(1 - \frac{gH}{2(v_l^2 - v_b^2)} \right) = \frac{4}{3} \text{ м} \approx 1.33 \text{ м}.$

(2 балла)

Задача 2. Столкновение. Система, состоящая из двух одинаковых брусков массы m каждый, соединенных пружиной жёсткости k , движется по гладкому горизонтальному столу со скоростью v_0 и налетает на покоящийся брусок массы $m/2$. Удар центральный и абсолютно упругий.



Найдите:

- 1) скорость v_1 покоившегося бруска сразу после столкновения;
- 2) максимальную деформацию ΔL пружины.
- 3) период колебаний брусков, соединенных пружиной.

Ответ: $v_1 = (4/3)v_0$; $\Delta L = v_0 \sqrt{\frac{2m}{9k}}$; $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}$.

Возможное решение и критерии оценивания. 1. Обозначим начальные скорости и массы тел следующим образом: $v_{01} = v_{02} = v_0$, $v_{03} = 0$, $m_1 = m_2 = m$, $m_3 = m/2$. При абсолютно упругом соударении 2-го и 3-го брусков можно считать, что за время соударения пружина не успела сжаться на какую-либо величину и потерь энергии нет, поэтому ЗСИ и ЗСЭ для

брусков запишутся в виде: $m_2 v_{02} = m_2 v_2 + m_3 v_3$, $\frac{m_2 v_{02}^2}{2} = \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2}.$

Главное управление кадров Министерства обороны Российской Федерации

Решая данную систему, получаем: $v_2 = \frac{1}{3}v_0$, $v_3 = \frac{4}{3}v_0$. (2 балла)

2. Максимальной деформации пружина достигнет, когда скорости брусков 1 и 2 сравняются. Запишем ЗСИ и ЗСЭ для этого случая:

$$m_1 v_{01} + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v, \quad \frac{m_1 v_{01}^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2} + \frac{k \Delta L^2}{2}. \quad \text{Выражая из 1-го уравнения скорость центра масс системы и подставляя её в ЗСЭ, получаем:}$$

$$\Delta L = v_0 \sqrt{2m / (9k)}. \quad (2 \text{ балла})$$

3. Так как массы брусков, соединённых пружиной, равны, центр масс системы этих брусков находится посередине пружины. Каждый из брусков будет колебаться относительно центра масс т.е. середины пружины. Тогда жесткость половины пружины равна $2k$. Период колебаний каждого из брусков на пружине $T = 2\pi \sqrt{m / (2k)}$. (2 балла)

Задача 3. Шар и шарик. У поверхности равномерно заряженной диэлектрической сферы массы M и радиуса R находится маленький одноименно заряженный шарик массы m . Шарик и сферу отпускают. Сразу после этого ускорение шарика оказалось равным a . Вычислите установившуюся скорость $v_{\text{уст}}$ шарика, если: 1) $M \gg m$. 2) Масса сферы $M = 8m$.

Силой тяжести и гравитационным взаимодействием шарика и сферы пренебречь.

Ответ: $v_{\text{уст.1}} = \sqrt{2aR}$, $v_{\text{уст.2}} = \frac{4}{3}\sqrt{aR}$.

Возможное решение и критерии оценивания. Пусть заряд сферы Q , а заряд шарика q .

1) Запишем второй закон Ньютона для шарика в начальном положении:

$$ma = F_0, \quad \text{где } F_0 = k \frac{qQ}{R^2}, \quad \text{откуда следует: } ma = k \frac{qQ}{R^2}. \quad (1 \text{ балл})$$

2) Потенциальная энергия заряда q , находящегося в электростатическом поле заряженной сферы Q равна: $W = q\varphi = k \frac{qQ}{r}$.

3) Запишем закон сохранения энергии: $\frac{mv_{\text{уст}}^2}{2} = k \frac{qQ}{R}$. (1 балл)

4) Разделим почленно уравнение (3) на уравнение (1):

$$\frac{v_{\text{уст}}^2}{2a} = R \quad \text{или} \quad v_{\text{уст}} = \sqrt{2aR}. \quad (1 \text{ балл})$$

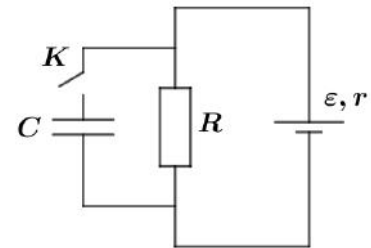
Б) Во втором случае сфера также начнёт ускоряться. Запишем ЗСИ и ЗСЭ:

$$0 = mv_2 - MU_2, \quad k \frac{qQ}{R} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{MU_2^2}{2}. \quad (1 \text{ балл})$$

С учётом соотношения $ma = k \frac{qQ}{R^2}$, получим: $v_2 = \frac{4}{3}\sqrt{aR}$. (2 балла)

Главное управление кадров Министерства обороны Российской Федерации

Задача 4. Зарядка конденсатора. В цепи, схема которой изображена на рисунке, известна емкость конденсатора C , который не заряжен, ЭДС ε и внутреннее сопротивление r источника. В начальный момент ключ K разомкнут, в цепи течет постоянный ток. Затем ключ замыкают. В установившемся режиме после замыкания ключа на конденсаторе устанавливается заряд q . Найдите:



- 1) силу тока I_0 , идущего к конденсатору сразу после замыкания ключа K ;
- 2) сопротивление резистора R ;
- 3) силу тока I_1 , идущего через источник в момент, когда заряд на конденсаторе равен $q/2$.
- 4) Силу тока I_2 , идущего к конденсатору в тот момент, когда заряд на нём равен $q/4$;

Ответ: 1) $I_0 = \frac{\varepsilon}{r}$; 2) $R = r \frac{q}{C\varepsilon - q}$; 3) $I_2 = \frac{\varepsilon}{r} - \frac{q}{2rC}$; 4) $I_2 = \frac{3\varepsilon}{4r}$.

Возможное решение и критерии оценивания.

1. Сразу после замыкания ключа заряд и напряжение на конденсаторе равны нулю, значит равно нулю и напряжение на резисторе, подключенном параллельно конденсатору. Ток через резистор в этот момент не течёт. Тогда ток от батареи идёт на заряд конденсатора:

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{r}. \quad (1 \text{ балл})$$

2. В установившемся режиме напряжение на конденсаторе $U_c = \frac{q}{C}$ и весь ток батареи течёт через резистор $I = \frac{U_R}{R} = \frac{q}{RC}$. С другой стороны, $I = \frac{\varepsilon}{r + R}$. Приравняв

выражения для силы тока, получаем: $R = r \frac{q}{\varepsilon C - q}$. (1 балл)

3. Силу тока, идущего через источник, найдём из закона Кирхгоффа: $I_1 r + \frac{q}{2C} = \varepsilon$,

откуда $I_1 = \frac{\varepsilon}{r} - \frac{q}{2rC}$. (1 балл)

4. Сила тока, идущий на зарядку конденсатора, найдем из выражения: $I_{2,C} = I_2 - I_{2,R}$. Так как сила тока, идущего через батарею, согласно предыдущему пункту, равен $I_2 = \frac{\varepsilon - q/(4C)}{r} = \frac{4C\varepsilon - q}{4rC}$, (1 балл)

а сила тока, идущего через резистор $I_{2,R} = \frac{q}{4CR} = \frac{q}{4C} \frac{\varepsilon C - q}{qr} = \frac{\varepsilon C - q}{4Cr}$, получаем

$$I_0 = \frac{3\varepsilon}{4r}. \quad (2 \text{ балла})$$

Главное управление кадров Министерства обороны Российской Федерации

Задача 5. Два изображения. С помощью собирающей линзы получают изображение предмета, находящегося на её главной оптической оси, с увеличением $\Gamma = 3$. Затем линзу смещают вдоль оси на расстояние $x = 20$ см и получают изображение с тем же увеличением. Найдите фокусное расстояние линзы.

Ответ: $F = x\Gamma/2 = 30$ см.

Возможное решение и критерии оценивания. Пусть в первый раз мы получили действительное изображение, значит предмет находится между фокусом и двойным

фокусом. В этом случае $\Gamma = \frac{f}{a_1 - f}$, откуда $a_1 = \frac{f}{\Gamma} + f$. (2 балла)

Во втором случае изображение мнимое и $\Gamma = \frac{f}{f - a_2}$, откуда $a_2 = f - \frac{f}{\Gamma}$. (2 балла)

По условию $x = a_1 - a_2 = \left(\frac{f}{\Gamma} + f\right) - \left(f - \frac{f}{\Gamma}\right) = \frac{2f}{\Gamma}$. (2 балла)

Окончательно $f = x \frac{\Gamma}{2} = 30$ см. (2 балла)