ЕГЭ **ПУ** Прототип задания № **ПУ19** **Задачи в целых числах**

№	Каталог		Ответ
1	ПУ 4062	Имеется **8** карточек. На них записывают по одному каждое из чисел: 1; – 2; – 3; 4; – 5; 7; – 8; 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел: 1; – 2; – 3; 4; – 5; 7; – 8; 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают. а) Может ли в результате получиться **0** ? б) Может ли в результате получиться **1** ? в) Какое ***наименьшее*** целое ***неотрицательное*** число может в результате получиться?	Чтобы произведение было равно **0**, одна из сумм должна быть равна **0**. Сумма двух чисел равна **0**, если числа противоположные. **а) Ответ: нет** Дано: 5 нечетных и 3 четных числа. Значит, хотя бы две суммы, будут четными числами. Тогда и произведение будет четным числом. Или: Все суммы должны быть по модулю равны **1**. **б) Ответ: нет** Т.к. две суммы, как минимум, будут четными числами, то произведение будет делиться на **4**. Должно быть четное число отрицательных множителей. (1; – 2); (– 2; 1); (–3; 4); (4; –3); (–5; 7); (7; –5); (–8; 9); (9; –8) **в) Ответ: 4** https://ege.sdamgia.ru/problem?id=500023 http://self-edu.ru/ege2016_36.php?id=13_19 http://school.umk-spo.biz/forum/teksyr/imeetkar https://www.youtube.com/watch?v=3XMZabYlEjk https://vk.com/photo-30041539_289336415
2	ПУ 4082	Максим должен был умножить двузначное число на трехзначное число. Вместо этого он просто приписал трехзначное число справа к двузначному, получив пятизначное число, которое оказалось в N раз (N – натуральное число) больше правильного результата. а) Могло ли N равняться **2** ? б) Могло ли N равняться **10** ? в) Каково ***наибольшее*** возможное значение N ?	$z = 1000x + y = N \cdot xy;\ N \cdot xy - 1000x - y = 0;\ x \ge 10;\ y \ge 100$ $N = 2;\ (2x-1)(y-500) = 500 = 2^2 \cdot 5^3$ **а) Ответ: да, например: 13 и 520; 63 и 504** $N = 10;\ (10x-1)(y-100) = 100 = 2^2 \cdot 5^2$ **б) Ответ: нет** $N = \frac{1000x+y}{xy} = \frac{1000}{y} + \frac{1}{x} \le \frac{1000}{100} + \frac{1}{10} = 10{,}1;\ N \le 10$ $N = 9;\ y = \frac{1000x}{9x-1} = 111 + \frac{x+111}{9x-1};\ 10 \le x \le 14;\ x = 14$ **в) Ответ: 9** http://school.umk-spo.biz/forum/teksyr/imeetkar https://www.youtube.com/watch?v=PqTXRggyo5I
3	ПУ 4102	Моток веревки режут без остатка на куски длиной не меньше **115** см, но не больше **120** см (назовем такие куски стандартными). а) Некоторый моток веревки разрезали на **23** стандартных куска, среди которых есть куски ***разной*** длины. На какое ***наибольшее*** число ***одинаковых*** стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток веревки ? б) Найдите такое ***наименьшее*** число l, что любой моток веревки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.	$115 \le x_i \le 120;\ 115 \cdot n \le l \le 120 \cdot n$ Если есть куски разной длины и $n = 23$, то $l < 120 \cdot 23$ т.е. $l < 2760$ (*) Если эти куски обрезать и сделать одинаковыми, то $l_1 = 115 \cdot 23 = 2645 < 2760;\ l_2 = 115 \cdot 24 = 2760$ не уд. (*) **а) Ответ: 23** $115 \cdot n \le l \le 120 \cdot n;\ 115 \cdot (n+1) \le 120 \cdot n;\ n \ge 23$ $l \ge 115 \cdot 23 = 2645$ **б) Ответ: 2645** http://school.umk-spo.biz/forum/teksyr/motokverevki https://ege.sdamgia.ru/test?pid=500351 https://vk.com/photo-30041539_289336419
4	ПУ 4122	Каждый из группы учащихся сходил в кино и театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино. а) Могло ли быть в группе **10** мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было **20** учащихся ? б) Какое ***наибольшее*** количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было **20** учащихся ? в) Какую ***наименьшую*** долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов ***а*** и ***б*** ?	**а) Ответ: да** **б) Ответ: 10** в) Ответ: $\frac{9}{19}$ http://school.umk-spo.biz/forum/teksyr/imeetkar http://self-edu.ru/ege2016_36.php?id=6_19 https://ege.sdamgia.ru/test?pid=505541 https://vk.com/album-30041539_264498073

5	ПУ 4301	Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от **0** до **10** включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма – это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок. а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{30}$? б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{35}$? в) Найдите ***наибольшее*** возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.	Пусть: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < x_7$; $a = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$; $b = x_1 + x_7$; $10 \le a \le 40$; $1 \le b \le 19$; $21 \le a + b \le 49$ Новый рейтинг: $A = \frac{a}{5}$. Старый рейтинг: $B = \frac{a+b}{7}$. Разница: $B - A = \frac{a+b}{7} - \frac{a}{5} = \frac{5b-2a}{35}$ Если $B - A = \frac{1}{30}$; $\frac{5b-2a}{35} = \frac{1}{30}$; $30b - 12a = 7$ нечетное число **а) Ответ: нет** Если $B - A = \frac{1}{35}$; $\frac{5b-2a}{35} = \frac{1}{35}$; $5b - 2a = 1$ Например: $(a;\ b) = (17;7) = (22;9) = (27;11) = (32;13)$ Например: 0; 1; 2; 4; 7; 8; 9. Тогда: $B - A = \frac{31}{7} - \frac{22}{5} = \frac{155-154}{35} = \frac{1}{35}$ **б) Ответ: да** $B - A = \frac{a+b}{7} - \frac{a}{5} = \frac{5b-2a}{35}$. Наибольшее значение при наименьшем ***a***: $B - A = \frac{5\cdot(0+10)-2\cdot(1+2+3+4+5)}{35} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$ **в) Ответ: $\frac{4}{7}$** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=509185 https://znanija.com/task/6784484
6	ПУ 4322	Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от **1** до **15** включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма – это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок. а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{2}{45}$? б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{2}{35}$? в) Найдите ***наибольшее*** возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.	**а) Ответ: нет** **б) Ответ: да** **в) Ответ: $\frac{8}{7}$**
7	ПУ 4343	Из **40** последовательных ***нечетных*** чисел **1, 3, 5, …, 79** выбрали **7** различных чисел, которые записали в порядке ***возрастания***. Пусть ***A*** – четвертое по величине этих чисел, а ***B*** – среднее арифметическое выбранных семи чисел. а) Может ли ***B – A*** равняться $\frac{2}{7}$? б) Может ли ***B – A*** равняться $\frac{3}{7}$? в) Найдите ***наибольшее*** возможное значение ***B – A***.	$B = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + A + x_5 + x_6 + x_7}{7} = \frac{A+S}{7}$; $B - A = \frac{S-6A}{7}$ $x_1 < x_2 < x_3 < A < x_5 < x_6 < x_7$; S – четное число Если $B - A = \frac{2}{7}$; $S - 6A = 2$ **а) Ответ: да** Если $B - A = \frac{3}{7}$; $S - 6A = 3$ - нечетное число **б) Ответ: нет** $B - A = \frac{S-6A}{7} = \frac{(1+3+5+75+77+79)-6\cdot 7}{7} = \frac{198}{7}$ **в) Ответ: $28\frac{2}{7}$** http://self-edu.ru/ege2016_36.php?id=35_19 https://math-ege.sdamgia.ru/test?theme=209
8	ПУ 4364	Из **25** последовательных ***нечетных*** чисел **1, 3, 5, …, 49** выбрали **9** различных чисел, которые записали в порядке ***возрастания***. Пусть ***A*** – пятое по величине этих чисел, а ***B*** – среднее арифметическое выбранных девяти чисел. а) Может ли ***B – A*** равняться $\frac{1}{9}$? б) Может ли ***B – A*** равняться $\frac{2}{9}$? в) Найдите ***наибольшее*** возможное значение ***B – A***.	$B = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + +x_4 + A + x_6 + x_7 + x_8 + x_9}{9} = \frac{A+S}{9}$; $B - A = \frac{S-8A}{9}$; $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < A < x_6 < x_7 < x_8 < x_9$; S – четное число Если $B - A = \frac{1}{9}$; $S - 8A = 1$ - нечетное число **а) Ответ: нет** Если $B - A = \frac{2}{9}$; $S - 8A = 2$ - четное число **б) Ответ: да** $B - A = \frac{(1+3+5+7+43+45+47+49)-8\cdot 9}{9} = \frac{128}{9}$ **в) Ответ: $14\frac{2}{9}$**

9	ПУ 4385	На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа. Например, числа **9,3** , **10,5** и **12,7** округляются до **9, 11** и **13** соответственно. а) Всего проголосовало **13** посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным **29** ? б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трех футболистов. Могла ли сумма рейтингов быть больше **100** ? в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен **7**. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком ***наименьшем*** числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно ?	$R = \frac{100n}{13}$; $28{,}5 \le \frac{100n}{13} < 29{,}5$; $3{,}705 \le n < 3{,}835$; $\varnothing$ 2 способ: $\frac{100n}{13} = 29$; $n = 3{,}77$ При $n = 3$, $R = 23$. При $n = 4$, $R = 31$ **а) Ответ: нет** Например: $R_1 = R_2 = 33{,}5$; $R_3 = 33{,}0$ $33{,}5 + 33{,}5 + 33{,}0 = 100$; $R_1 + R_2 + R_3 = 34 + 34 + 33 = 101$ **б) Ответ: да** $6{,}5 \le \frac{100n}{m} < 7{,}5$; $0{,}065 \le \frac{n}{m} < 0{,}075$; $6{,}5 \le \frac{100(n+1)}{m+1} < 7{,}5$; $0{,}065 \le \frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1} < 0{,}075$; $\begin{cases} \frac{n}{m} \ge 0{,}065, \\ \frac{n+1}{m+1} < 0{,}075; \end{cases}$ $\begin{cases} 200n \ge 13m, \\ 200n < 15m - 185; \end{cases}$ $13m \le 200n < 15m - 185$; $13m < 15m - 185$; $m \ge 93$ $200n \ge 13 \cdot 93 = 1209$; $n \ge 7$ $15m - 185 > 200 \cdot 7 = 1400$; $m \ge 106$ **в) Ответ: 106** https://ege.sdamgia.ru/problem?id=505475 https://ege.sdamgia.ru/problem?id=505497
10	ПУ 4406	На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа. Например, числа **9,3** , **10,5** и **12,7** округляются до **9, 11** и **13** соответственно. а) Всего проголосовало **15** посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным **41** ? б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трех футболистов. Могло ли быть так, что все три футболиста получили разное число голосов, но их рейтинги одинаковые ? в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен **3**. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком ***наименьшем*** числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно ?	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:** https://ege.sdamgia.ru/problem?id=505475
11	ПУ 4427	На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа. Например, числа **9,3** , **10,5** и **12,7** округляются до **9, 11** и **13** соответственно. а) Всего проголосовало **15** посетителей сайта, и рейтинг некоторого футболиста был равен **7**. Увидев это, Вася отдал свой голос за этого футболиста. Чему теперь равен рейтинг этого футболиста? б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трех футболистов. Могла ли сумма рейтингов быть больше **100** ? в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен **6**. После того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста, его рейтинг на сайте стал равен **8**. При каком ***наибольшем*** числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно ?	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:** https://ege.sdamgia.ru/test?likes=505475 https://ege.sdamgia.ru/test?pid=505497
12	ПУ 4448	На сайте проводится опрос, кого из **146** футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа. Например, числа **9,3** , **10,5** и **12,7** округляются до **9, 11** и **13** соответственно. а) Всего проголосовало **13** посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста был равен **31**. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста? б)Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться не менее, чем на **30** ? в) Какое ***наименьшее*** значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов ?	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:** https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=514199 https://eek.diary.ru/p199366554.htm

13	ПУ 4469	Про некоторый набор, состоящий из **11** различных натуральных чисел, известно, что сумма любых двух различных чисел этого набора меньше суммы любых трех различных чисел этого набора. а) Может ли одним из этих чисел быть число **3000** ? б) Может ли одним из этих чисел быть число **16** ? в) Какое ***наименьшее*** возможное значение может принимать сумма чисел такого набора?	Пусть дана последовательность: $a_1 < a_2 < \cdots < a_{10} < a_{11}$ и $a_n = a_1 + (n-1)d$; тогда $a_{10} + a_{11} < a_1 + a_2 + a_3$ $2a_1 + 19d < 3a_1 + 3d;\ 16d < a_1$ Если $a_1 = 3000;\ d = 1$: 3000, 3001, 3002, 3003, …, 3009, 3010 3009 + 3010 = 6019 < 3000 + 3001 + 3002 = 9003 **а) Ответ: да** Если $a_1 = 16;\ 16d < 16;\ d < 1$ - не натуральное число 2 способ: $a_{10} + a_{11} < a_1 + a_2 + a_3$ $a_1 > (a_{11} - a_3) + (a_{10} - a_2) \geq 8 + 8 = 16$ **б) Ответ: нет** Наименьшее значение при: $a_1 = 17;\ d = 1;\ S = \frac{(2a_1+10d)\cdot 11}{2} = 242$ 2 способ: $a_1 + \cdots + a_{11} \leq a_1 + (a_1+1) + \cdots + (a_1+10) = 11(a_1+5)$ $11(a_1+5) \geq 11(17+5) = 242$ Пример: 17; 18; 19; …; 27. **в) Ответ: 242** http://self-edu.ru/ege2016_36.php?id=36_19
14	ПУ 4490	На ***окружности*** некоторым образом расставили натуральные числа от **1** до **21** (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего. а) Могли ли ***все*** полученные разности быть не меньше **11** ? б) Могли ли ***все*** полученные разности быть не меньше **10** ? в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого ***наибольшего*** целого числа ***k*** можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше ***k*** ?	Достаточно определить, что из 21 числа в середине находится 11, а значит, разность 11 и любого другого числа будет всегда меньше Рассмотрим число 11, самая большая разность, если справа и слева стоят числа 21 и 22: …; 21; 11; 22; … $R_1 = 10;\ R_2 = 11$ Или: 11 + 11 = 22; 11 – 11 = 0 таких чисел нет **а) Ответ: нет** Разобьем все числа на 2 группы: от 1 до 10; от 12 до 21. Заметим, что числа из одной группы не могут стоять рядом, так как разность наибольшего и наименьшего будет меньше 10. Поэтому при расстановке будем чередовать числа из разных групп. Например: 1;12;2;13;3;14;4;15;5;16;6;17;7;18;8;19;9;20;10;21;11 **б) Ответ: да** Использовать просто в качестве примера вариант заполнения части окружности числами от 1 до 7. После этого получалась максимальная разность между двумя прилегающими уже к числу 8 значениями. Разобьем все числа на 3 группы: от 1 до 7; от 8 до 14; от 15 до 21. Например: 1;8;15;2;9;16;3;10;17;4;11;18;5;12;19;6;13;20;7;14;21 **в) Ответ: 6** https://ege.sdamgia.ru/problem?id=510795 https://ege.sdamgia.ru/problem?id=505107
15	ПУ 4511	На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от **1** до **27** (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего. а) Могли ли все полученные разности быть не меньше **14** ? б) Могли ли все полученные разности быть не меньше **13** ? в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого ***наибольшего*** целого числа ***k*** можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше ***k*** ?	14 + 14 = 28 и 14 – 14 = 0 таких чисел нет **а) Ответ: нет** Разобьем все числа на 2 группы: от 1 до 13; от 15 до 27. 1; 15 ;2; 16; 3; 17; 4; 18; 5; 19; 6; 20; 7; 21; 8; 22; 9; 23; 10; 24; 11; 25; 12; 26; 13; 27; 14 **б) Ответ: да** Пример: **в) Ответ:**
16	ПУ 4532	На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от **7** до **27** (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего. а) Могли ли все полученные разности быть не меньше **11** ? б) Могли ли все полученные разности быть не меньше **10** ? в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого ***наибольшего*** целого числа ***k*** можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше ***k*** ?	Рассмотрим число 17, самая большая разность, если справа и слева стоят числа 26 и 27: …; 26; 17; 27; … $R_1 = 9;\ R_2 = 10$ Или: 17 + 11 = 28 и 17 – 11 = 6 таких чисел нет **а) Ответ: нет** Пример: 7,18,8,19,9,20,10,21,11,22,12,23,13,24,14,25,15,26,16,27,17 **б) Ответ: да** Разобьем все числа на 3группы: от 7 до 13; от 14 до 20; от 21 до 27. Пример: 7,14,21,8,15,22,9,16,23,10,17,24,11,18,25,12,19,26,13,20,27 **в) Ответ: 6** http://self-edu.ru/ege2016_36.php?id=34_19
17	ПУ 4553	На окружности некоторым образом расставили натуральные числа от **4** до **30** (каждое число поставлено по одному разу). Затем для каждой пары соседних чисел нашли разность большего и меньшего. а) Могли ли все полученные разности быть не меньше **14** ? б) Могли ли все полученные разности быть не меньше **13** ? в) Помимо полученных разностей, для каждой пары чисел, стоящих через одно, нашли разность большего и меньшего. Для какого ***наибольшего*** целого числа ***k*** можно так расставить числа, чтобы все разности были не меньше ***k*** ?	17 + 14 = 31 и 17 – 14 = 3 таких чисел нет **а) Ответ: нет** Пример: **б) Ответ:** **в) Ответ:**

18	ПУ 4574	На доске написали несколько ***не обязательно*** различных двузначных натуральных чисел ***без нулей*** в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной **363**. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71). а) Приведите пример ***исходных*** чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в **4** раза больше, чем сумма исходных чисел. б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в **2** раза больше, чем сумма исходных чисел? в) Найдите ***наибольшее*** возможное значение суммы ***получившихся*** чисел	1)Пусть первые два числа повторяются n раз: $(10a+b);(10c+d)$ Значит: $n \bullet ((10a+b)+(10c+d)) = 363$ Отсюда: $n \bullet (10(a+c)+(b+d)) = 3 \bullet 11 \bullet 11$ 2) $4 \bullet ((10a+b)+(10c+d)) = (10b+a)+(10d+c)$ Получим: $13(a+c) = 2(b+d)$ 3) Пусть: $(a+c) = 2$; $(b+d) = 13$ Тогда: $n \bullet (10 \bullet 2 + 13) = 3 \bullet 11 \bullet 11$; $33n = 3 \bullet 11 \bullet 11$; $n = 11$ 4) Например: 16; 17; 16; 17; 16; 17; 16; 17; 16; 17; … (22 числа) **а) Ответ:** **16; 17; 16; 17; 16; 17; 16; 17; 16; 17; 16; 17; 16; 17; 16; 17; 16; 17; 16; 17** 1) $10(a+c+\cdots)+(b+d+\cdots) = 363 = 3 \bullet 11 \bullet 11$ 2) $2 \bullet (10(a+c+..)+(b+d+\cdots)) = 10(b+d+..)+(a+c+..)$ $19(a+c+..) = 8(b+d+..)$ 3) $\begin{cases} 190(a+c+\cdots)+19(b+d+\cdots) = 19 \bullet 363; \\ 190(a+c+..)-80(b+d+..) = 0 \end{cases}$ $99(b+d+\cdots) = 3 \bullet 11 \bullet 11 \bullet 19$, нет решений **б) Ответ: нет** Наибольшая сумма получившихся чисел будет, если в исходных числах будет наибольшее количество 9-к в разряде единиц. $n \bullet (10a+9)+m = 363$, где m – некоторое двузначное число n - наибольшее при $a = 1$; $19n+m = 363$; $n \le 19$ Если $n = 19$, то $m = 2$ (не двузначное) Если $n = 18$, то $m = 21$ Получаем: $19 \bullet 18 + 21 = 363$; $91 \bullet 18 + 12 = 1650$ **в) Ответ: 1650** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=510098 http://self-edu.ru/ege2016_36.php?id=31_19 https://vk.com/photo-30041539_456252942 https://vk.com/photo-30041539_456252943
19	ПУ 4595	На доске было написано **30** ***натуральных*** чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит **40**. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось **7.** Вместо каждого из чисел на доске написали число в **2** раза ***меньшее*** первоначального. Числа, которые после этого оказались ***меньше*** **1**, с доски стерли. а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, ***оставшихся*** на доске, больше **14** ? б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше **12**, но меньше **13** ? в) Найдите ***наибольшее*** возможное значение среднего арифметического чисел, которые ***остались*** на доске.	Т.к. стерли числа, меньше 1, то на доске были числа, меньше 2, т.е. было несколько единиц. Пусть m - количество единиц, $m < 30$. Было: $1+1+1+\cdots+a+b+\cdots = 7 \bullet 30 = 210$ Пусть: $a+b+\cdots = 2S$ Тогда: $1 \bullet m + 2S = 210$; $2S = 210 - m$; m - четное число Сумма оставшихся чисел: $S > 14(30-m)$; $2S > 28(30-m)$ Отсюда: $210 - m > 840 - 28m$; $27m > 630$; $24 \le m \le 29$ Если $m = 24$, $2S = 210 - 24 = 186$; $S = 93$ Пример: $1 \bullet 24 + 31 \bullet 6 = 210$; $(31 \bullet 6) : 6 = 31 > 14$ Если $m = 28$, $2S = 210 - 28 = 182$; $S = 91$ Пример: $1 \bullet 28 + 91 \bullet 2 = 210$; $(91 \bullet 2) : 2 = 91 > 14$ **а) Ответ: да** $12(30-m) < S < 13(30-m)$; $24(30-m) < 2S < 26(30-m)$; $24(30-m) < 210 - m < 26(30-m)$; $23m > 510$ и $25m < 570$ $23 \le m \le 22$ нет решений **б) Ответ: нет** Чтобы средний балл был набольшим, на доске должно быть как можно больше чисел 40. Пусть: $1 \bullet m + 40 \bullet k + n \bullet 1 = 210$; $40k < 210$; $k \le 5$ Причем: $m + k + 1 = 30$ $\begin{cases} m + 40k + n = 210, \\ m + k + 1 = 30 \end{cases}$ $39k + n = 181$; $n = 181 - 39k$ Если $k = 5$; $n = 181 - 195 < 0$ Если $k = 4$; $n = 181 - 156 = 25$; $m = 25$ Пример: $1 \bullet 25 + 40 \bullet 4 + 25 \bullet 1 = 210$; $(20 \bullet 4 + 12{,}5) : 5 = 18{,}5$ **в) Ответ: 18,5** http://self-edu.ru/ege2016_30.php?id=18_19
20	ПУ 4616	На доске было написано **30** натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых больше **4**, но не превосходит **44**. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось **11.** Вместо каждого из чисел на доске написали число в **2** раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше **3**, с доски стерли. а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше **16** ? б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше **14**, но меньше **15** ? в) Найдите ***наибольшее*** возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:**

21	ПУ 4637	На доске было написано **20** натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит **40**. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на **1**. Числа, которые после этого оказались равными **0**, с доски стерли. а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось ? б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось **27**. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным **34** ? в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось **27**. Найдите ***наибольшее*** возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.	**а) Ответ: да** **б) Ответ: нет** **в) Ответ:** $38\frac{1}{7}$ http://self-edu.ru/ege2016_30_2.php?id=14_19
22	ПУ 4658	Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее **83** баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по **5** баллов, благодаря чему количество сдавших тест ***увеличилось.*** а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, ***не сдавших тест***, понизился? б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, ***сдавших тест***, понизился, и средний балл участников, ***не сдавших тест***, тоже понизился? в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил **90**, средний балл участников, сдавших тест, составил **100**, а средний балл участников, не сдавших тест, составил **75**. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен **103**, а не сдавших тест – **79**. При каком ***наименьшем*** числе участников теста возможна такая ситуация?	Пример: 30; 80; 100 и 35; 85; 105 (30 + 80) : 2 = 55 > 35 **а) Ответ: да** Пример: 30; 80; 100 и 35; 85; 105 (85 + 105) : 2 = 95 < 100 **б) Ответ: да** Пусть: всего n человек. Сдали: сначала a чел., потом – b чел. Сумма всех баллов первоначально: $90n$, потом: $90n + 5n = 95n$ $90n = 100a + 75(n - a)$ и $95n = 103b + 79(n - b)$ $3n = 5a$ и $2n = 3b$, значит, $n \vdots 3$ и $n \vdots 5$, т.е $n \vdots 15$, $n = 15k$ Наименьшее $n = 15$ Пример: $74 \cdot 5 + 80 \cdot 1 + 100 \cdot 9 = 1350;\ 1350 : 15 = 90$ $79 \cdot 5 + 85 \cdot 1 + 105 \cdot 9 = 1425;\ 1425 : 15 = 95$ **в) Ответ: 15** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=509953 https://reshimvse.com/zadacha.php?id=3320
23	ПУ 4679	а) Приведите пример четырехзначного числа, произведение цифр которого в **10** раз больше суммы цифр этого числа. б) Существует ли такое четырехзначное число, произведение цифр которого в **175** раз больше суммы цифр этого числа? в) Найдите ***все*** четырехзначные числа, произведение цифр которых в **50** раз больше суммы цифр этого числа.	$a \cdot b \cdot c \cdot d = 10 \cdot (a + b + c + d);\ \ 10 = 2 \cdot 5$ Например: $2 \cdot b \cdot 5 \cdot d = 10 \cdot (2 + b + 5 + d)$ $10 \cdot b \cdot d = 10 \cdot (b + 7 + d);\ b \cdot d - b - d = 7$ $(b - 1)(d - 1) = 8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$ **а) Ответ: 2259; 2355** и т.д. $a \cdot b \cdot c \cdot d = 175 \cdot (a + b + c + d);\ 175 = 5 \cdot 5 \cdot 7$ Тогда: $5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot d = 175 \cdot (5 + 5 + 7 + d);\ 175d = 175(17 + d)$ **б) Ответ: нет** $a \cdot b \cdot c \cdot d = 50 \cdot (a + b + c + d);\ 50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$ Если: $2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot d = 50 \cdot (2 + 5 + 5 + d)$ $50 \cdot d = 50 \cdot (12 + d);\ d = 12 + d;\ \varnothing$ Если: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot d = 50 \cdot (4 + 5 + 5 + d)$ $100 \cdot d = 50 \cdot (14 + d);\ 2d = 14 + d;\ d = 14$ не цифра Если: $6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot d = 50 \cdot (6 + 5 + 5 + d)$ $150 \cdot d = 50 \cdot (16 + d);\ 3d = 16 + d;\ d = 8$ Если: $8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot d = 50 \cdot (8 + 5 + 5 + d)$ $200 \cdot d = 50 \cdot (18 + d);\ 4d = 18 + d;\ d = 6$ **в) Ответ:** 5568; 5586; 5658; 5685; 5856; 5865; 6558; 6585; 6855; 8556; 8565; 8655 https://ege.sdamgia.ru/test?pid=515922 http://self-edu.ru/ege2016_36.php?id=3_19
24	ПУ 4700	Три числа назовем ***хорошей*** тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника. Три числа назовем ***отличной*** тройкой, если они могут быть сторонами ***прямоугольного*** треугольника. а) Даны **5** различных натуральных чисел. Может ли оказаться, что среди них не найдется ***ни одной хорошей*** тройкой чисел? б) Даны **4** различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти ***три отличных тройки*** чисел? в) Даны **10** различных чисел (не обязательно натуральных). Какое ***наибольшее*** количество отличных троек чисел могло оказаться среди них?	Пусть: $a < b < c;\ \ b - c < a < b + c;\ \ a^2 + b^2 = c^2$ Пример: 1; 2; 4; 8; 16 или 1; 2; 3; 5; 8 **а) Ответ: да** Из четырех чисел: два самые маленькие – это катеты. Значит, гипотенузой могут быть только два больших числа. Расположим числа в порядке возрастания: $a < b < c < d$. Запишем три равенства на гипотенузу треугольника: $a^2 + b^2 = c^2;\ b^2 + c^2 = d^2;\ a^2 + c^2 = d^2$. Из последних двух равенств следует равенство $a = b$ противоречащее условию. Теорема Ферма: не существует двух пифагоровых троек, в которых два катета одной тройки являются катетом и гипотенузой другой тройки. **б) Ответ: нет** Пример: $\sqrt{1};\ \sqrt{2};\ \sqrt{3};\ \sqrt{4};\ \sqrt{5};\ \sqrt{6};\ \sqrt{7};\ \sqrt{8};\ \sqrt{9};\ \sqrt{10}$ **в) Ответ: 20** https://ege.sdamgia.ru/test?likes=514433 https://ege.sdamgia.ru/problem?id=514433 https://reshimvse.com/zadacha.php?id=3319

25	ПУ 4721	Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из единственного числа среднее арифметическое равно этому числу). а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трех значений средних арифметических в группах из разного количества чисел? б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифметических? в) Найдите ***наименьшее*** возможное значение ***наибольшего*** из получаемых трех средних арифметических.	**а) Ответ: да** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 6,14** http://self-edu.ru/ege2016_36.php?id=2_19 https://reshimvse.com/zadacha.php?id=4546 https://znanija.com/task/31532005
26	ПУ 4742	В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму **600 000** рублей (размер премии каждого сотрудника – целое число, кратное **1000**). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея **100** купюр по **1000** рублей и **100** купюр по **5000** рублей. а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе **40** сотрудников и все должны получить ***поровну***? б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать **40 000** рублей, а остальные поделить поровну на **70** сотрудников? в) При каком ***наибольшем*** количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?	Пример: каждый получит по 15000 рублей 20 человек по 5000 • 3 и 20 человек по 5000 • 2 + 1000 • 5 **а) Ответ: да** (600000 – 40000) : 70 = 8000 Каждому не менее трех 1000-х купюр, всего не менее 210 штук **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 26** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=513263 https://ege.sdamgia.ru/test?likes=513263 http://alexlarin.com/viewtopic.php?p=164652 http://eek.diary.ru/p209364244.htm?oam https://otvet.mail.ru/question/195519229
27	ПУ 4763	а) Приведите пример четырехзначного числа, произведение цифр которого в **14** раз больше суммы цифр этого числа. б) Существует ли такое четырехзначное число, произведение цифр которого в **210** раз больше суммы цифр этого числа? в) Найдите ***все*** четырехзначные числа, произведение цифр которых в **49** раз больше суммы цифр этого числа.	$a \cdot b \cdot c \cdot d = 14 \cdot (a + b + c + d)$; $14 = 2 \cdot 7$ Например: $2 \cdot b \cdot c \cdot 7 = 14 \cdot (2 + b + c + 7)$ $14 \cdot b \cdot c = 14 \cdot (b + 9 + c)$; $b \cdot c - b - c = 10$ $(b-1)(c-1) = 10 = 2 \cdot 5$, т.к. $b - 1 \le 8$ и $c - 1 \le 8$ **а) Ответ: 2367** и т.д. $a \cdot b \cdot c \cdot d = 210 \cdot (a + b + c + d)$; $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ Тогда: $a \cdot b \cdot 5 \cdot 7 = 210 \cdot (a + b + 5 + 7)$ $35 \cdot a \cdot b = 210 \cdot (a + b + 12)$; $a \cdot b = 6 \cdot (a + b + 12)$ $a \cdot b \le 8 \cdot 9 = 72$; $6 \cdot (a + b + 12) \ge 6 \cdot 12 = 72$ **б) Ответ: нет** $a \cdot b \cdot c \cdot d = 49 \cdot (a + b + c + d)$; $49 = 7 \cdot 7$ Тогда: $a \cdot b \cdot 7 \cdot 7 = 49 \cdot (a + b + 7 + 7)$ $49 \cdot a \cdot b = 49 \cdot (a + b + 14)$; $a \cdot b - a - b = 14$ $(a-1)(b-1) = 15 = 3 \cdot 5$, т.к. $a - 1 \le 8$ и $b - 1 \le 8$ Итак, цифры: 4; 6; 7; 7 **в) Ответ:** **4677; 4767; 4776; 6477; 6747; 6774; 7467; 7476; 7647; 7674; 7746; 7764** https://ege.sdamgia.ru/problem?id=515923
28	ПУ	Множество чисел назовем ***хорошим***, если его можно разбить на два подмножества с одинаковой ***суммой*** чисел. а) Является ли множество { **200; 201; 202; …; 299** } хорошим? б) Является ли множество { **2; 4; 8; …;** $\mathbf{2^{100}}$ } хорошим? в) Сколько хороших ***четырехэлементных*** подмножеств у множества: { **1; 2; 4; 5; 7; 9; 11** } ?	$a_1 = 200$; $d = 1$; $n = 299 - 199 = 100$; $a_n = 199 + n$ $a_1 + a_{100} = a_2 + a_{99} = \cdots = a_{50} + a_{51} = 499$; $499 \cdot 50 = 24950$ $(a_1 + \cdots + a_{25}) + (a_{76} + \cdots + a_{100}) = a_{26} + \cdots + a_{75} = 499 \cdot 25$ (200 +…+ 224) + (275 +…+ 299) = 225 + …+ 274 = 12475 **а) Ответ: да** $b_1 = 2$; $q = 2$; $n = 100$; $b_n = 2^n$; $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{(q-1)} = 2^{n+1} - 2$ $S_{99} = a_1 + \cdots + a_{99} = 2^{100} - 2 < 2^{100} = a_{100}$ **б) Ответ: нет** 11 = 2 + 4 + 5 = 1 + 5 + 7; 11 + 1 = 5 + 7; 11 + 2 = 4 + 9; 11 + 5 = 7 + 9; 9 + 2 = 4 + 7; 7 + 2 = 4 + 5; 5 + 1 = 2 + 4 **в) Ответ: 8** https://eek.diary.ru/p209728089.htm?oam#more1 https://www.youtube.com/watch?v=zkGlNcFHLDM
29	ПУ 4782	Множество чисел назовем ***хорошим***, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым ***произведением*** чисел. а) Является ли множество { **100; 101; 102; …; 199** } хорошим? б) Является ли множество { **2; 4; 8; …;** $\mathbf{2^{200}}$ } хорошим? в) Сколько хороших ***четырехэлементных*** подмножеств у множества: { **1; 3; 4; 5; 6; 7; 9; 11; 12** } ?	Т.к. число 199 – простое, то, при разбиении множества на два подмножества, одно из них будет делиться на 199, а другое – нет. **а) Ответ: нет** $b_1 = 2$; $q = 2$; $n = 200$; $b_n = 2^n$ $b_1 \cdot b_{200} = b_2 \cdot b_{199} = \cdots = b_{100} \cdot b_{101} = 2^{201}$ $(b_1 \cdot \ldots \cdot b_{50}) \cdot (b_{151} \cdot \ldots \cdot b_{200}) = b_{51} \cdot \ldots \cdot b_{150} = (2^{201})^{50}$ $(2^1 \cdot \ldots \cdot 2^{50}) \cdot (2^{151} \cdot \ldots \cdot 2^{200}) = 2^{51} \cdot \ldots \cdot 2^{150}$ **б) Ответ: да** 12 • 1 = 3 • 4; 12 • 3 = 4 • 9, т.к. числа 5; 7; 11 - простые **в) Ответ: 2** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=516515

30	ПУ 4801	Множество чисел назовем ***хорошим***, если его можно разбить на два подмножества с одинаковым ***произведением*** чисел. а) Является ли множество { **200; 201; 202; …; 299** } хорошим? б) Является ли множество { **2; 4; 8; …;** $\mathbf{2^{100}}$ } хорошим? в) Сколько хороших четырехэлементных подмножеств у множества: { **1; 2; 4; 6; 7; 9; 13; 17; 18** } ?	Т.к. число 299 – простое, то, при разбиении множества на два подмножества, одно из них будет делиться на 299, а другое – нет. **а) Ответ: нет** $b_1 = 2;\ q = 2;\ n = 100;\ b_n = 2^n$ $b_1 \bullet b_{100} = b_2 \bullet b_{99} = \dots = b_{50} \bullet b_{51} = 2^{101}$ $(b_1 \bullet \dots \bullet b_{25}) \bullet (b_{76} \bullet \dots \bullet b_{100}) = b_{26} \bullet \dots \bullet b_{75} = (2^{101})^{25}$ $(2^1 \bullet \dots \bullet 2^{25}) \bullet (2^{76} \bullet \dots \bullet 2^{100}) = 2^{26} \bullet \dots \bullet 2^{75}$ **б) Ответ: да** 18 • 1 = 2 • 9; 18 • 2 = 4 • 9, т.к. числа 7; 13; 17 - простые **в) Ответ: 2**
31	ПУ 4820	В последовательности $a_1; a_2; \dots; a_{n-1}; a_n$, состоящей из ***целых*** чисел, $a_1 = 1$; $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна **3**, **5** или **25**. а) Приведите пример такой последовательности. б) Может ли такая последовательность состоять из **1000** членов? в) Из какого ***наименьшего*** числа членов может состоять такая последовательность?	Рассмотрим две группы чисел: В первой 118 чисел: 1; 3; 5; 7; 9; …; 233; 235 Во второй 117 чисел: 2; 0; – 2; – 4; – 6;…; – 228; – 230 1; 2; 3; 0; 5; – 2; 7; – 4; 9; – 6; 11; … ; – 228; 233; – 230; 235 или короче: 1; 2; 3; 0; 5; – 2; 7; – 4; 9; – 6; 11; … ; 213; – 210; 235 **а) Ответ: да** Так как сумма любых двух соседних членов – нечетное число, то в этой последовательности четные и нечетные числа должны чередоваться. Так как на концах последовательности стоят нечетные числа, то количество четных чисел на 1 меньше количества нечетных чисел. Значит, общее количество чисел в последовательности будет нечетным числом. **б) Ответ: нет** Пусть: $1; \dots; a; b; c; \dots; 235$ $a + b \geq 3;\ b + c \leq 25;\ n = 2k + 1$ $3 - a \leq b \leq 25 - c;\ 3 - a \leq 25 - c;\ c - a \leq 22$ Тогда: $1 + 22k \geq 235;\ 11k \geq 117;\ k \geq 11;\ n = 2 \bullet 11 + 1 = 23$ 1; 2; 23; –20; 45; –42; 67; –64; 89; –86; 111; –108; 133; –130; 155; –150; 175; –170; 195; –190; 215; –210; 235 **в) Ответ: 23** http://krivoleg.blogspot.com/2019/02/blog-post_35.html
32	ПУ 4839	На доске написаны числа **2** и **3**. За один ход два числа a и b, записанные на доске, заменяются на два числа: или $a + b$ и $2a - 1$, или $a + b$ и $2b - 1$ (например, из чисел **2** и **3** можно получить либо **3** и **5**, либо **5** и **5**). а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из двух чисел, написанных на доске, окажется числом **19**. б) Может ли после **100** ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом **200** ? в) Сделали **1007** ходов, причем на доске никогда не было написано одновременно двух равных чисел. Какое ***наименьшее*** значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:** https://ege.sdamgia.ru/test?likes=514452 https://eek.diary.ru/p209728089.htm?oam https://vk.com/photo-30041539_456252872
33	ПУ 4858	На доске написаны числа **1; 2; 3; … ; 30**. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых больше **58** и отлична от каждой из сумм троек чисел, стертых на предыдущих ходах. а) Приведите пример последовательных **5** ходов. б) Можно ли сделать **10** ходов? в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=514479 https://eek.diary.ru/p209378460.htm
34	ПУ 4877	На доске написаны числа **1; 2; 3; … ; 30**. За один ход разрешается стереть произвольные три числа, сумма которых меньше **35** и отлична от каждой из сумм троек чисел, стертых на предыдущих ходах. а) Приведите пример последовательных **5** ходов. б) Можно ли сделать **10** ходов? в) Какое наибольшее число ходов можно сделать?	**а) Ответ:** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 6** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=514479

https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/zadanie-19/
https://shkolkovo.net/catalog/zadachi_na_teoriyu_chisel/ege_proshlyh_let/page-3
https://studopedia.net/6_112816_primeri-otsenivaniya-resheniy-zadaniya-.html
https://repetitor-mathematics.ru/v-tselochislennoy-posledovatelnosti-a1-2-a2-an-336/

35	ПУ 4896	На доске написано **10** неотрицательных чисел. За один ход стираются два числа, а вместо них записывается их сумма, округленная до целого числа (например, вместо 5,5 и 3 записывается 9, а вместо 3,3 и 5 записывается 8). а) Приведите пример **10** нецелых чисел и последовательности **9** ходов, после которых на доске будет записано число, равное сумме исходных чисел. б) Может ли после **9** ходов на доске быть написано число, отличающееся от суммы исходных чисел на **7** ? в) На какое ***наибольшее*** число могут отличаться числа, записанные на доске после **9** ходов, выполненных с одним и тем же набором исходных чисел в различном порядке?	**а) Ответ: 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01; 0,99; 0,01** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 5** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=514485
36	ПУ 4915	Про возрастающую последовательность из **10** различных натуральных чисел известно, что каждый член последовательности больше предыдущего не более, чем на **10**. Среднее арифметическое пяти первых членов равно **10**, а среднее арифметическое шести последних членов равно **40**. а) Приведите пример такой последовательности, для которой среднее арифметическое четырех первых членов равно **8,5**. б) Может ли в такой последовательности среднее арифметическое четырех первых членов быть равно **9,5** ? в) Найдите **наибольшее** возможное значение среднего арифметического всех членов такой последовательности.	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:** https://eek.diary.ru/p209748700.htm https://www.diary.ru/~eek/?tag=4169&from=40 https://www.youtube.com/watch?v=dFIcuZE483U
37	ПУ 4934	На доске написано несколько различных натуральных чисел, ***произведение*** любых двух из которых больше **40** и меньше **100**. а) Может ли на доске быть **5** чисел? б) Может ли на доске быть **6** чисел? в) Какое ***наибольшее*** значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:**
38	ПУ 4953	На доске написано **30** различных натуральных чисел, десятичная запись каждого из которых ***оканчивается*** или на цифру **2**, или на цифру **6**. Сумма написанных чисел равна **2454**. а) Может ли на доске быть поровну чисел, оканчивающихся на **2** и на **6** ? б) Может ли ровно одно число на доске оканчиваться на **6** ? в) Какое ***наименьшее*** количество чисел, оканчивающихся на **6**, может быть на доске?	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:** https://www.youtube.com/watch?v=ZumYtmmrnyw
39	ПУ 4972	На доске написано **30** различных натуральных чисел, каждое из которых либо ***четное***, либо его десятичная запись ***оканчивается*** на цифру **7**. Сумма написанных чисел равна **810**. а) Может ли на доске быть ровно **24** четных числа? б) Могут ли ровно два числа на доске оканчиваться на **7** ? в) Какое ***наименьшее*** количество чисел, оканчивающихся на **7**, может быть на доске?	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:**
40	ПУ 4991	На доске написано **30** натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зеленого, либо красного цвета. Каждое зеленое число, кратно **3**, а каждое красное число кратно **7**. При этом все зеленые числа различны и все красные различны (какое-то зеленое число может равняться какому-то красному числу). а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше **1395 = 3 + 6 + … + 90**, если все числа на доске кратны **3** ? б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна **1067** ? в) Какое ***наименьшее*** количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна **1067** ?	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:** https://ege.sdamgia.ru/problem?id=517579 https://ege.sdamgia.ru/test?pid=517572
41	ПУ 5010	На доске написано **100** различных натуральных чисел, сумма которых равна **5120**. а) Может ли оказаться, что на доске написано число **230** ? б) Может ли оказаться, что на доске нет числа **14** ? в) Какое ***наименьшее*** количество чисел, кратных **14**, может быть на доске?	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=517583

https://ege-study.ru/ru/ege/podgotovka/matematika/probnyj-ege/2018-2/fevral/zadanie-19-reshenie/variant-3
https://studopedia.net/6_112816_primeri-otsenivaniya-resheniy-zadaniya-.html
https://shkolkovo.net/catalog/zadachi_na_teoriyu_chisel/zadachi_formata_ege
https://shkolkovo.net/catalog/zadachi_na_teoriyu_chisel/ege_proshlyh_let

42	ПУ 5029	Маша и Наташа делали фотографии в течение некоторого количества подряд идущих дней. В первый день Маша сделала m фотографий, а Наташа – n фотографий. В каждый следующий день каждая из девочек делала на одну фотографию больше, чем в предыдущий день. Известно, что Наташа за все время сделала суммарно на **1001** фотографию больше, чем Маша, и что фотографировали они больше одного дня. а) Могли ли они фотографировать в течение **7** дней? б) Могли ли они фотографировать в течение **8** дней? в) Какое ***наибольшее*** суммарное число фотографий могла сделать Наташа за все дни фотографирования, если известно, что в ***последний*** день Маша сделала меньше **40** фотографий?	Маша: $x+(x+1)+(x+2)+\dots+(x+n-1)=\frac{(x+x+n-1)\cdot n}{2}$ Наташа: $y+(y+1)+(y+2)+\dots+(y+n-1)=\frac{(y+y+n-1)\cdot n}{2}$ Разница: $n\cdot(y-x)=1001=7\cdot 11\cdot 13$ Если $n=7$, то $7\cdot(y-x)=7\cdot 11\cdot 13$; $y-x=11\cdot 13=143$ **а) Ответ: да** Если $n=8$, то $8\cdot(y-x)=7\cdot 11\cdot 13$ **б) Ответ: нет** $x+n-1<40$; $x+n<41$ Если $n=7$, то $7\cdot(y-x)=7\cdot 11\cdot 13$; $y=x+143$ $x+7<41$; $x<34$; $x=33$; $y=176$; Маша: 252; Наташа: 1253 Если $n=11$, то $11\cdot(y-x)=7\cdot 11\cdot 13$; $y=x+91$ $x+11<41$; $x<30$; $x=29$; $y=120$; Маша: 374; Наташа: 1375 Если $n=13$, то $13\cdot(y-x)=7\cdot 11\cdot 13$; $y=x+77$ $x+13<41$; $x<28$; $x=27$; $y=104$; Маша: 429; Наташа: 1430 **в) Ответ: 1430** https://ege.sdamgia.ru/problem?id=517567 http://self-edu.ru/ege2018_36.php?id=4_19 http://gdz-larin.ru/?p=1961
43	ПУ 5048	По окружности в некотором порядке расставлены натуральные числа от **1** до **12**. Между каждыми двумя соседними числами написали модуль их разности. Затем все исходные числа стерли. а) Приведите пример расстановки, когда сумма полученных чисел равна **32**. б) Может ли сумма полученных чисел быть равна **29** ? в) Какое ***наибольшее*** значение может принимать сумма полученных чисел?	**а) Ответ: 1; 2; 3; 4; 5; 12; 6; 7; 8; 9; 11; 10** **б) Ответ: нет** Пример: 12; 1; 11; 2; 10; 3; 9; 4; 8; 5; 7; 6 **в) Ответ: 72**
44	ПУ 5067	На доске написано n чисел $a_1; \dots; a_n$, каждое из которых не меньше **50**, но не больше **150**. Каждое из чисел a_i ($1 \le i \le n$) уменьшили на $r_i\%$ соответственно. При этом для каждого i ($1 \le i \le n$) либо $r_i = 2$, либо a_i уменьшилось на **2**. а) Может ли среднее арифметическое чисел $r_1; \dots; r_n$ быть равным **5** ? б) Может ли оказаться, что среднее арифметическое чисел $r_1; \dots; r_n$ больше **2**, а сумма чисел $a_1; \dots; a_n$ уменьшилась более, чем на $2n$? в) Известно, что на доске написаны **30** чисел и их сумма уменьшилась на **40**. Найдите ***наибольшее*** значение среднего арифметического чисел $r_1; \dots; r_n$.	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=519478
45	ПУ 5086	В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из ***каждой*** школы тест писали, по крайней мере, **2** учащихся, а суммарно тест писал **51** учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал ***натуральное*** количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. а) Мог ли средний балл в школе №1 вырасти в **2** раза? б) Средний балл в школе №1 вырос на **10%**, средний балл в школе №2 также вырос на **10%**. Мог ли первоначальный средний балл в школе **№2** равняться **1** ? в) Средний балл в школе №1 вырос на **10%**, средний балл в школе №2 также вырос на **10%**. Найдите ***наименьшее*** значение первоначального среднего балла в школе **№2.**	Было: n человек, a - средний балл. Всего: an баллов Стало: $(n-1)$ человек, $2a$ - средний балл. Всего: $2a(n-1)$ Балл ушедшего ученика: $x=an-2a(n-1)=a(2-n)\le 0$, т.к. $n\ge 2$ **а) Ответ: нет** 1 школа: $x=an-1{,}1a(n-1)=a(1{,}1-0{,}1n)$ 2 школа: $x=1{,}1b(51-n+1)-b(51-n)=b(6{,}2-0{,}1n)$ Значит, $10x=a(11-n)=b(62-n)>0$; $n<11$ Если $b=1$, $10x=a(11-n)=(62-n)$; $(62-n)\vdots 10$; $n=2$ Отсюда: $a(11-2)=(62-2)$; $9a=60$; a – не натуральное **б) Ответ: нет** Если $b=2$, $10x=a(11-n)=2(62-n)$; $(62-n)\vdots 5$; $n=7$ Отсюда: $a(11-7)=2(62-7)$; $2a=55$; a – не натуральное Если $b=3$, $10x=a(11-n)=3(62-n)$; $(62-n)\vdots 10$; $n=2$ Отсюда: $a(11-2)=3(62-2)$; $a=20$; $x=18$ Пример: 1 школа 2 человека (22; 18); 2 школа 49 человек по 3 балла **в) Ответ: 3** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=520808 https://ege.sdamgia.ru/test?pid=520858 https://www.youtube.com/watch?v=LIod3iF6QfU
46	ПУ 5105	В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали, по крайней мере, **2** учащихся, а суммарно тест писали **9** учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. а) Мог ли средний балл в школе №1 уменьшиться в **10** раз? б) Средний балл в школе №1 уменьшился на **10%**, средний балл в школе №2 также уменьшился на **10%**. Мог ли первоначальный средний балл в школе №2 равняться **7** ? в) Средний балл в школе №1 уменьшился на **10%**, средний балл в школе №2 также уменьшился на **10%**. Найдите ***наименьшее*** значение первоначального среднего балла в школе №2.	**а) Ответ: да** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 5** http://gdz-larin.ru/?p=2798 https://ege.sdamgia.ru/test?likes=520808

47	ПУ 5124	В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали, по крайней мере, **2** учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причем в школе №1 средний балл равнялся **18**. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. В результате средний балл в школе №1 вырос на **10%**, средний балл в школе №2 также вырос на **10%**. а) Сколько учащихся могло писать тест в школе №1 изначально? б) В школе №1 все писавшие тест набрали разное количество баллов. Какое ***наибольшее*** количество баллов мог набрать учащийся этой школы? в) Известно, что изначально в школе №2 писали тест более **10** учащихся. Найдите ***наименьшее*** количество учащихся могло писать тест в школе №2 изначально.	**а) Ответ: 6** **б) Ответ: 89** **в) Ответ: 19** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=520943
48	ПУ 5143	В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали, по крайней мере, **2** учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом, причем в школе №2 средний балл равнялся **42**. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. В результате средний балл в школе №1 уменьшился на **10%**, средний балл в школе №2 также уменьшился на **10%**. а) Сколько учащихся могло писать тест в школе №2 изначально? б)Каждый учащийся школы №2, писавший тест, набрал больше баллов, чем перешедший в нее учащийся школы №1. Какое ***наибольшее*** количество баллов мог набрать учащийся школы №2 ? в) Какое ***наибольшее*** количество учащихся могло писать тест в школе №1 изначально?	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:** https://ege.sdamgia.ru/test?likes=520943
49	ПУ 5162	На доске написано **10** различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно **5**, а среднее арифметическое шести наибольших равно **15**. а) Может ли наименьшее из этих чисел равняться **3** ? б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться **11** ? в) Найдите ***наибольшее*** значение среднего арифметического всех десяти чисел.	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=520789 http://self-edu.ru/ege2019_36.php?id=7_19 https://www.youtube.com/watch?v=xEmxUlStGNQ
50	ПУ 5181	На доске написано **10** различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно **6**, а среднее арифметическое шести наибольших равно **12**. а) Может ли наибольшее из этих чисел равняться **14** ? б) Может ли среднее арифметическое всех десяти чисел равняться **8,4** ? в) Найдите ***наименьшее*** значение среднего арифметического всех десяти чисел.	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:** https://eek.diary.ru/p215564954.htm?from=30
51	ПУ 5199	На доске написано **11** различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно **5**, а среднее арифметическое шести наибольших равно **15**. а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться **3** ? б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться **9** ? в) Пусть B – шестое по величине число, а S – среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите ***наибольшее*** значение выражения $S - B$.	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:**

https://ege-study.ru/ru/ege/podgotovka/matematika/reshenie-zadachi-19-s-nastoyashhego-ege-2018/
https://shkolkovo.net/catalog/zadachi_na_teoriyu_chisel/ege_proshlyh_let

Тренировочные работы СтатГрад и другие

1	**СтатГрад 21.01.15**	Красный карандаш стоит **17** рублей, синий — **13** рублей. Нужно купить карандаши, имея всего **495** рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять. а) Можно ли купить при таких условиях **32** карандаша? б) Можно ли купить при таких условиях **35** карандашей? в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?	**а) Ответ: да** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 33** https://ege.sdamgia.ru/problem?id=510464 https://vk.com/photo-30041539_351516883 http://self-edu.ru/ege2016_30_2.php?id=7_19 https://www.youtube.com/watch?v=0AW8-XjNHEU
2	**СтатГрад 21.01.15; 18.04.18**	Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству: $3x = 8y - 29$. а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным **170**? б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным **2**? в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.	**а) Ответ: да** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 4** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=511111 https://vk.com/photo-30041539_353865281 http://self-edu.ru/ege2016_30_2.php?id=6_19 https://vk.com/photo-30041539_456252967 https://vk.com/photo-30041539_456252968
3	**СтатГрад 13.02.15**	В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем **50**, а вместе солдат меньше чем **120**. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее **7**, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов. а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример. б) Можно ли построить роту указанным способом по **11** солдат в одном ряду? в) Сколько в роте может быть солдат?	**а) Ответ: например: 54 и 63** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 117 и 119** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=509027 https://vk.com/photo-30041539_356764565 http://self-edu.ru/ege2016_30_2.php?id=27_19 https://www.youtube.com/watch?v=F2YO6RbGM7E
4	**СтатГрад 05.03.15; 24.09.15; 20.12.16**	Известно, что a, b, c, и d — попарно различные положительные ***двузначные*** числа. а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{7}{19}$? б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в **11** раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$? в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 3b$ и $c > 6d$?	$\frac{7}{19} = \frac{14}{38} = \frac{21}{57} = \frac{28}{76} = \frac{35}{95} = \cdots$ **а) Ответ: да, например:** $\frac{10+11}{20+37}$ $\frac{a+c}{b+d} \cdot 11 = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$; $11bd(a+c) = ad(b+d) + bc(b+d)$ $10abd + 10bdc = ad^2 + b^2c$; $ad(10b-d) = bc(b-10d)$ $10 \le b \le 99$; $10 \le d \le 99$; $10b - d > 0$; $b - 10d < 0$ **б) Ответ: нет** $a > 3b; a \ge 3b+1; 3b+1 \le a \le 99; 10 \le b \le 32$ $c > 6d; c \ge 6d+1; 6d+1 \le c \le 99; 10 \le d \le 16$ $\frac{a+c}{b+d} \ge \frac{(3b+1)+(6d+1)}{b+d} = \frac{3b+6d+2}{b+d} =$ $= 3 + \frac{3d+2}{b+d} \ge 3 + \frac{3d+2}{b+32} = 6 - \frac{94}{d+32} \ge 6 - \frac{94}{10+32} = \frac{79}{21}$ **в) Ответ:** $\frac{79}{21}$**, пример:** $\frac{97+61}{32+10} = \frac{158}{42} = \frac{79}{21}$ https://ege.sdamgia.ru/test?pid=508977 https://math-ege.sdamgia.ru/test?theme=172 http://self-edu.ru/ege2016_30_2.php?id=30_19 https://vk.com/photo-30041539_377087561 https://vk.com/photo-30041539_456252841 https://vk.com/photo-30041539_456252892 https://vk.com/photo-30041539_456252914
5	**СПб 05.04.16**	После того, как учитель доказал классу новую теорему, выяснилось, что ***большая*** часть класса не поняла доказательство (быть может, все). На перемене один ученик вдруг понял доказательство (и только он). Также известно, что в классе учится не более **30**, но не менее **20** человек. а) Могло ли получиться так, что теперь уже меньшая часть класса не понимает доказательство? б) Могло ли получиться так, что исходно процент учеников, понявших доказательство, выражался целым числом, а после перемены — нецелым числом? в) Какое наибольшее целое значение может принять процент учеников класса, так и не понявших доказательство этой теоремы?	**а) Ответ: да** **б) Ответ: да** **в) Ответ: 96** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=513689 https://vk.com/photo-30041539_456252862

6	СПб 11.04.17	Дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, где a, b и c — натуральные числа не превосходящие **100.** Также известно, что числа a, b и c попарно отличаются друг от друга не менее, чем на **2.** а) Может ли такое уравнение иметь корень (**- 7**)? б) Может ли такое уравнение иметь корень (**- 53**)? в) Какой наименьший целый корень может иметь такое уравнение ?	**а) Ответ: да** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: – 50** https://math-ege.sdamgia.ru/test?theme=172 https://vk.com/photo-30041539_456252917
7	Экзамен 02.06.17	Каждый из **28** студентов писал или одну из двух контрольных работ, или написал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от **0** до **20** включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил **15**. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов равно S. а) Приведите пример, когда **S < 15.** б) Могло ли оказаться, что только два студента написали обе контрольные работы, если **S = 13**? в) Какое наименьшее количество студентов могло написать обе контрольные работы, если **S = 13**?	**а) Ответ: да, например: 18 • 20 две к/р и 0 • 4 одна к/р** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 12** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=517465 https://vk.com/photo-30041539_456252932 https://vk.com/photo-30041539_456252931 https://www.youtube.com/watch?v=vowRRd-5XrA
8	Резерв 28.06.17	В каждой клетке квадратной таблицы **6x6** стоит натуральное число, меньшее **7**. Вася в каждом столбце находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. Петя в каждой строке находит наименьшее число и складывает шесть найденных чисел. а) Может ли сумма у Пети получиться в два раза больше, чем сумма у Васи? б) Может ли сумма у Пети получиться в шесть раз больше, чем сумма у Васи? в) В какое наибольшее число раз сумма у Пети может быть больше, чем сумма у Васи?	**а) Ответ: да** **б) Ответ: нет** **в) Ответ:** $\frac{31}{6}$ https://ege.sdamgia.ru/test?pid=517835 https://math-ege.sdamgia.ru/test?theme=172
9	СтатГрад 21.12.17	Восемь экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку — целое число баллов от **0** до **12** включительно. Все эксперты выставил различные оценки. Старый рейтинг фильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и подсчитывается среднее арифметическое шести оставшихся оценок. а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{20}$? б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{24}$? в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.	**а) Ответ: нет** **б) Ответ: да, например: 0; 1; 2; 3; 4; 6; 7; 8** **в) Ответ:** $\frac{5}{8}$ https://ege.sdamgia.ru/problem?id=518964 https://ege.sdamgia.ru/test?likes=509185 https://vk.com/photo-30041539_456252949 https://vk.com/photo-30041539_456252950 https://www.youtube.com/watch?v=VhAVs_GVrzE
10	СтатГрад 21.01.18	Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из натуральных чисел, причём $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ при всех натуральных n. а) Может ли выполняться равенство: $4a_5=7a_4$? б) Может ли выполняться равенство: $5a_5=7a_4$? в) При каком наибольшем натуральном n может выполняться равенство: $6na_{n+1}=(n^2+24)a_n$?	**а) Ответ: да** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 5** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=509585 https://vk.com/photo-30041539_456252956
11	СтатГрад 06.03.18	Пусть $S(n)$ и $K(n)$ обозначают сумму всех цифр и сумму квадратов всех цифр натурального числа n соответственно. а) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n)=2S(n)+11$? б) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n)=3S(n)+11$? в) Для какого наименьшего натурального числа n выполнено равенство $K(n)=8S(n)+74$?	**а) Ответ: да** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 1 999 999 999** https://ege.sdamgia.ru/problem?id=520705 https://vk.com/photo-30041539_456252962

12	СПб 04.04.18	Назовем натуральное число хорошим, если в нем можно переставить цифры так, чтобы получившееся число делилось на **11**. а) Является ли число **1234** хорошим? б) Является ли число **12345** хорошим? в) Найти наибольшее хорошее число, состоящее из различных нечетных цифр.	**а) Ответ: да** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 9753** https://ege.sdamgia.ru/problem?id=519520 https://vk.com/photo-30041539_456252973 https://vk.com/photo-30041539_456252974
13	Резерв 11.04.18	а) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что $\left\|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right\|<\frac{1}{100}$? б) Существуют ли двузначные натуральные числа m и n такие, что $\left\|\frac{m^2}{n^2}-2\right\|<\frac{1}{10000}$? в) Найдите все возможные значения натурального числа n , при каждом которых значение выражения $\left\|\frac{n+10}{n}-\sqrt{2}\right\|$ будет наименьшим.	**а) Ответ: да** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 24** https://ege.sdamgia.ru/problem?id=519664
14	Экзамен 01.06.18	В школах №1 и №2 учащиеся писали тест. Из ***каждой*** школы тест писали, по крайней мере, **2** учащихся, а суммарно тест писал **51** учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал ***натуральное*** количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого, один из учащихся, писавших тест, перешел из школы №1 в школу №2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах. а) Мог ли средний балл в школе №1 вырасти в **2** раза? б) Средний балл в школе №1 вырос на **10%**, средний балл в школе №2 также вырос на **10%**. Мог ли первоначальный средний балл в школе **№2** равняться **1** ? в) Средний балл в школе №1 вырос на **10%**, средний балл в школе №2 также вырос на **10%**. Найдите ***наименьшее*** значение первоначального среднего балла в школе **№2.**	**а) Ответ: нет** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 3** https://vk.com/photo-30041539_456252992
15	Экзамен 01.06.18	С натуральным числом проводят следующую операцию: между каждыми двумя его соседними цифрами записывают сумму этих цифр (например, из числа **1923** получается число **110911253**). а) Приведите пример числа, из которого получается **2108124117**. б) Может ли из какого-нибудь числа получиться число **37494128**? в) Какое наибольшее число, кратное **11**, может получиться из трехзначного числа?	**а) Ответ: 2847** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 9167169** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=517744 https://vk.com/photo-30041539_456252983
16	Экзамен 01.06.18	На доске написано **11** различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно **5**, а среднее арифметическое шести наибольших равно **15**. а) Может ли наименьшее из этих одиннадцати чисел равняться **3**? б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться **9**? в) Пусть B — шестое по величине число, а S — среднее арифметическое всех одиннадцати чисел. Найдите наибольшее значение выражения $S-B$.	**а) Ответ: нет** **б) Ответ: нет** **в) Ответ:** $\frac{24}{11}$ https://ege.sdamgia.ru/test?pid=520789 http://self-edu.ru/ege2019_36.php?id=7_19 https://vk.com/photo-30041539_456252991 https://www.youtube.com/watch?v=xEmxUlStGNQ

17	Резерв 25.06.18	За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трёх звёзд. При этом заряд аккумулятора планшета уменьшается на **3** пункта при получении трёх звёзд, на **6** пунктов при получении двух звёзд и на **9** пунктов при получении одной звезды. Витя прошёл несколько уровней игры подряд. а) Мог ли заряд аккумулятора уменьшиться ровно на **32** пункта? б) Сколько уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на **33** пункта и суммарно было получено **17** звёзд? в) За пройденный уровень начисляется **9000** очков при получении трёх звёзд, **5000** — при получении двух звёзд и **2000** — при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на **33** пункта и суммарно было получено **17** звёзд?	**а) Ответ: нет** **б) Ответ: 7** **в) Ответ: 49 000** https://ege.sdamgia.ru/problem?id=520979
18	СтатГрад 20.09.18	Пусть $K(n)$ обозначает сумму квадратов всех цифр натурального числа n. а) Существует ли такое трехзначное число n, что $K(n) = 171$? б) Существует ли такое трехзначное число n, что $K(n) = 172$? в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $4K(n) - n$, если n — трехзначное число?	**а) Ответ: да** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: – 582** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=521928 https://vk.com/photo-30041539_456253000 https://vk.com/photo-30041539_456253001
19	СтатГрад 20.12.18	а) Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\frac{1*3*6*15}{1*4*8*16}$ вместо всех знаков * так расставить знаки «+» и «−», чтобы эта дробь стала равна $\frac{5}{3}$? б) Можно ли в числителе и знаменателе дроби $\frac{1*3*6*9*12}{1*4*8*12*16}$ вместо всех знаков * так расставить знаки «+» и «−», чтобы эта дробь стала равна $\frac{4}{7}$? в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $\left\lvert\frac{3}{4} - \frac{1*3*6*9*12}{1*4*8*12*16}\right\rvert$, если всевозможными способами заменять каждый из знаков * на «+» или «−» ?	**а) Ответ: да** **б) Ответ: нет** **в) Ответ:** $\frac{1}{164}$ https://ege.sdamgia.ru/test?pid=523381 https://vk.com/photo-30041539_456253006 https://vk.com/photo-30041539_456253007
20	СтатГрад 24.01.19	У Вовы есть набор из n грузиков попарно различных натуральных масс в граммах и чашечные весы, которые находятся в равновесии, если на каждой из двух их чаш лежат грузики с одинаковыми суммарными массами. Известно, что, какие бы два из них ни положили на одну чашу весов, всегда можно положить на другую чашу один или несколько из оставшихся грузиков так, что весы уравновесятся. а) Может ли у Вовы быть ровно **6** грузиков, среди которых есть грузик массой **7** г? б) Может ли у Вовы быть ровно **5** грузиков? в) Известно, что среди грузиков Вовы самый лёгкий грузик имеет массу **2** г. Какую наименьшую массу может иметь самый тяжёлый грузик Вовы?	**а) Ответ: да, например: 3; 4; 5; 6; 7; 8** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 8** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=524078 https://vk.com/photo-30041539_456253013
21	СтатГрад 24.01.19	Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ состоят из натуральных чисел. а) Приведите пример таких прогрессий, для которых: $a_1b_1 + 2a_3b_3 = 4a_2b_2$ б) Существуют ли такие прогрессии, для которых: $2a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_2b_2$? в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_2b_2, если $2a_1b_1 + 2a_4b_4 \le 210$?	**а) Ответ: 2; 3; 4; … и 2; 3; 4; …** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 68** https://math-ege.sdamgia.ru/test?likes=516337 https://vk.com/photo-30041539_456253012

https://ege-study.ru/materialy-ege/novaya-zadacha-19-profilnogo-ege-po-matematike-chisla-i-ix-svojstva-vostok/

22	СПб 12.03.19	Агата добиралась от дома до института на своем автомобиле с постоянной скоростью **100** км/ч. Обратно она ехала с постоянной скоростью, которая измерялась целым числом километров в час, причем путь до дома занял у нее больше времени, чем путь до института. а) Могла ли ее средняя скорость за эти две поездки составить **90** км/ч? б) Могла ли ее средняя скорость за эти две поездки оказаться равной целому числу километров в час? в) Какое наименьшее целое число километров в час могла составлять ее средняя скорость за эти две поездки?	**а) Ответ: нет** **б) Ответ: да** **в) Ответ:40** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=525413 https://ege.sdamgia.ru/test?pid=525458 https://vk.com/photo-30041539_456253030 https://vk.com/photo-30041539_456253031
23	СтатГрад 13.03.19	а) Приведите пример **5** различных натуральных чисел, расставленных по кругу так, что наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел равно **30.** б) Можно ли расставить по кругу **8** различных натуральных чисел так, чтобы наименьшее общее кратное двух соседних чисел равнялось **450**, а наибольший общий делитель любых трёх подряд идущих чисел равнялся **1**? в) Какое наибольшее количество чисел можно расставить по кругу так, чтобы наименьшее общее кратное любых двух соседних чисел было равно **150**?	**а) Ответ: 2; 15; 10; 3; 30** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 8** https://ege.sdamgia.ru/test?likes=525074 https://vk.com/photo-30041539_456253018
24	СтатГрад 13.03.19	Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ состоит из различных натуральных чисел. а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_7$ ровно три числа делятся на **36**? б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ ровно **9** чисел делятся на **36**? в) Для какого наибольшего натурального n может оказаться так, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ больше кратных **36**, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \ldots, a_{5n}$?	**а) Ответ: да, например: 18; 36; 54; 72; 90; 108; 126;…** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 23** https://ege.sdamgia.ru/test?likes=525029 https://vk.com/photo-30041539_456253019
25	Экзамен 29.03.19	Вася и Петя решали задачи из сборника, и они оба решили все задачи этого сборника. Каждый день Вася решал на одну задачу больше, чем в предыдущий день, а Петя решал на две задачи больше, чем в предыдущий день. Они начали решать задачи в один день, при этом в первый день каждый из них решил хотя бы одну задачу. а) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу меньше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за **5** дней? б) Могло ли получиться так, что Вася в первый день решил на одну задачу больше, чем Петя, а Петя решил все задачи из сборника ровно за **4** дня? в) Какое наименьшее количество задач могло быть в сборнике если каждый из ребят решал задачи более **6** дней, причем в первый день один из мальчиков решил на одну задачу больше чем другой?	**а) Ответ: да** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 84** https://ege.sdamgia.ru/test?pid=525123 https://www.youtube.com/watch?v=g21k1zculcw
26	СтатГрад 19.04.19	а) Приведите пример целого числа n , не кратного **7**, при котором дробь $\frac{n^3+n^2+7n}{n^2+n-7}$ сократима. б) Может ли дробь $\frac{n^3+n^2+7n}{n^2+n-7}$ быть сократимой на **2** при каком-то целом n ? в) Сколько существует натуральных n , не превосходящих **100**, при которых эта дробь сократима ?	**а) Ответ: да, например: 6** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 28** https://vk.com/photo-30041539_456253024

27	**СтатГрад 19.04.19**	На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, разность которых делится на **5.** а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться **34**, если изначально по одному разу были написаны все натуральные числа от **9** до **20** включительно? б) Может ли на доске остаться ровно два числа, произведение которых оканчивается на цифру **1**, если изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от **59** до **92** включительно? в) Пусть известно, что на доске осталось ровно два числа, а изначально по одному разу были написаны квадраты натуральных чисел от **59** до **92** включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?	**а) Ответ: да** **б) Ответ: нет** **в) Ответ:** $\left(\frac{23}{15}\right)^2$ https://ege.sdamgia.ru/test?pid=525732 https://vk.com/photo-30041539_456253025 https://www.youtube.com/watch?v=1C8SZSkVEI4
28	**Экзамен 29.05.19**	Есть синие и красные карточки. Всего карточек **50** штук. На каждой написаны натуральные числа, среднее арифметическое которых равно **16**. Все числа на синих карточках разные. При этом любое число на синей карточке больше, чем любое на красной. Числа на синих увеличили в **2** раза, после чего среднее арифметическое стало равно **31,2.** а) Может ли быть **10** синих карточек? б) Может ли быть **10** красных карточек? в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть?	**а) Ответ: да** **б) Ответ: нет** **в) Ответ: 35** https://ege.sdamgia.ru/problem?id=526258 https://ege.sdamgia.ru/problem?id=526295
29	**Экзамен 29.05.19**	Последовательность натуральных чисел (a_n) состоит из **400** членов. Каждый член последовательности, начиная со второго, либо вдвое больше предыдущего, либо на **98** меньше предыдущего. а) Может ли последовательность (a_n) содержать ровно **5** различных чисел? б) Чему может равняться a_1, если $a_{100} = 75$? в) Какое наименьшее значение может принимать наибольший член последовательности (a_n) ?	**а) Ответ: да** **б) Ответ: 9777** **в) Ответ: 112** https://math-ege.sdamgia.ru/test?theme=209
30	**Резерв 24.06.19**	Дано квадратное уравнение $x^2 + bx + q = 0$, имеющее два различных корня. а) При $q = 55$ найдите ***все различные*** возможные значения p. б) При $p + q = 30$ найдите все возможные значения q . в) При $q^2 - p^2 = 2108$ найдите все возможные ***корни*** уравнения.	Пусть: $x_1 < x_2$. Тогда: $p = -(x_1 + x_2) < 0$; $q = x_1 \cdot x_2 > 0$ Если $q = 55$, $x_1 \cdot x_2 = 55 = 1 \cdot 55 = 5 \cdot 11$ Тогда: $p = -(1 + 55) = -56$ или $p = -(5 + 11) = -16$ **а) Ответ: – 56; – 16** Если $p + q = 30$, $-(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 = 30$ $x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = 30$; $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 31 = 1 \cdot 31$ $x_1 = 2$; $x_2 = 32$; $q = 2 \cdot 32 = 64$ **б) Ответ: 64** Если $q^2 - p^2 = 2108 > 0$; $(q - p)(q + p) = 2 \cdot 2 \cdot 17 \cdot 31$ Т.к. $p < 0$; $q > 0$, то $(q - p) > (q + p) > 0$ Причем, $(q - p)$ и $(q + p)$ –четные, т.к. $(q^2 - p^2)$ – четное $\begin{cases} q + p = 2, \\ q - p = 1054 \end{cases}$ или $\begin{cases} q + p = 34, \\ q - p = 62 \end{cases}$ $p = -526; q = 528$; $x^2 - 526x + 528 = 0$; $\frac{D}{4} = 68641 \neq m^2$ $p = -14; q = 48$; $x^2 - 14x + 48 = 0$; $x_1 = 6$; $x_2 = 8$ **в) Ответ: 6; 8** https://vk.com/photo-30041539_456253050
31		а) б) в)	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:**
32		а) б) в)	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:**

https://shkolkovo.net/catalog/zadachi_na_teoriyu_chisel/ege_proshlyh_let/page-3

		а) б) в)	**а) Ответ:** **б) Ответ:** **в) Ответ:**

13.07.2019

https://math-ege.sdamgia.ru/test?theme=172 Числа и их свойства просмотреть (60 шт.)
https://math-ege.sdamgia.ru/test?theme=217 Числовые наборы на карточках и досках просмотреть (32 шт.)
https://math-ege.sdamgia.ru/test?theme=209 Последовательности и прогрессии просмотреть (40 шт.)
https://math-ege.sdamgia.ru/test?theme=210 Сюжетные задачи: кино, театр, мотки верёвки просмотреть (51 шт.)

Ялубов.рф