ИНФОРМАЦИОННЫЙ БАНК

КОНТРОЛЬНО-ДИАГНОСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ (КДМ)

ПО НАПРАВЛЕНИЮ ПОДГОТОВКИ МАГИСТРАТУРЫ

«МАТЕМАТИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ» (02.04.01)

Дисциплина:

Дифференциальная геометрия и основы тензорного исчисления

(8 баллов)

1. Доказать, что: $\nabla \otimes (a \times b) = (\nabla \otimes a) \times b - (\nabla \otimes b) \times a$, где a, b векторы (ковекторы)
2. Доказать, что: $\nabla \cdot (a \times b) = (\nabla \times a) \cdot b - (\nabla \times b) \cdot a$, где a, b векторы (ковекторы)
3. Доказать, что: $\nabla \cdot (a \otimes b) = (\nabla \cdot a) \otimes b + a \cdot \nabla \otimes b$, где a, b векторы (ковекторы)
4. Доказать, что: $\nabla \times (a \times b) = b \cdot \nabla \otimes a + a(\nabla \cdot b) - b(\nabla \cdot a) - a \cdot \nabla \otimes b$, где a, b векторы (ковекторы)
5. Доказать, что: $\nabla \times (a \otimes b) = (\nabla \times a) \otimes b - a \times (\nabla \otimes b)$, где a, b векторы (ковекторы)
6. Доказать, что: $\nabla \otimes (T \cdot a) = (\nabla \otimes T) \cdot a + (\nabla \otimes a) \cdot T^t$, где $a -$ вектор (ковектор), $T -$ тензор второго ранга
7. Доказать, что: $\nabla \otimes (a \cdot T) = (\nabla \otimes a) \cdot T + (\nabla \otimes T^t) \cdot a$, где $a -$ вектор (ковектор), $T -$ тензор второго ранга
8. Доказать, что: $\nabla \cdot (T \cdot a) = (\nabla \cdot T) \cdot a + T \cdot\cdot (\nabla \otimes a)^t$, где $a -$ вектор (ковектор), $T -$ тензор второго ранга
9. Доказать, что: $\nabla \cdot (a \cdot T) = (\nabla \cdot T^t) \cdot a + T \cdot\cdot \nabla \otimes a$, где $a -$ вектор (ковектор), $T -$ тензор второго ранга
10. Доказать, что: $\nabla \cdot (T \times a) = (\nabla \cdot T) \times a + (T^t \cdot \nabla) \times a$, где $a -$ вектор (ковектор), $T -$ тензор второго ранга
11. Доказать, что: $\nabla \cdot (a \times T) = (\nabla \times a) \cdot T - a \cdot (\nabla \times T)$, где $a -$ вектор (ковектор), $T -$ тензор второго ранга
12. Доказать, что: $\nabla \times (T \cdot a) = (\nabla \times T) \cdot a - (T \times \nabla)^t \cdot a$, где $a -$ вектор (ковектор), $T -$ тензор второго ранга
13. Доказать, что: $\nabla \times (a \cdot T) = (\nabla \times \mathrm{T}^{\mathrm{t}}) \cdot a - (T^t \times \nabla) \cdot a$, где $a -$ вектор (ковектор), $T -$ тензор второго ранга
14. Доказать, что: $\nabla \times (T \times a) = (\nabla \times T) \times a - (T^t \times \nabla) \times a$, где $a -$ вектор (ковектор), $T -$ тензор второго ранга
15. Доказать, что: $\nabla \times (a \times T) = -(\nabla \cdot a)T + (\nabla \otimes a) \cdot T - a \cdot \nabla \otimes T + a \otimes \nabla \cdot T$, где $a -$ вектор (ковектор), $T -$ тензор второго ранга
16. Вычислить $\nabla \frac{1}{|x|}$, где x радиус –вектор в трехмерном евклидовом пространстве.

17. Найти компоненту тензора T : $\widetilde{T}^{12}_{123}$ в новом базисе, если все компоненты тензора в исходном базисе равны 2, и дана матрица преобразования базисов $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

18. Дать определение обратного, ортогонального тензоров. Вывести выражения для их компонент. Геометрическое представление этих тензоров в двумерном евклидовом пространстве.

19. На поверхности V с метрикой $ds^2 = e^{2v}du^2 - e^{u+v}dudv + e^{2u}dv^2$ задано семейство линий $u = v + c$. Найдите ортогональные траектории этого семейства.

21. Найти по заданным натуральным уравнениям натуральным уравнениям $k = k(s), \varkappa = \varkappa(s)$ параметрические уравнения пространственной кривой, проходящей через заданную точку, с заданными значениями касательного вектора и нормального вектора в этой точке $k = 1, \varkappa = \frac{1}{2}, M = (0,0,0), \tau_0 = i,\ \nu_0 = j$

20. На поверхности V с метрикой $ds^2 = fdu^2 + 2\sqrt{f^2 - 1}\,dudv + fdv^2, f = 1 + u - v$ задан криволинейный треугольник ABC, ограниченный линиями: СА: $v = 0$, АВ: $u = 1$, СВ: $u = v$. Найдите длины сторон и площадь треугольника.

22. Найти параметрическое уравнение кривой по ее натуральному уравнению $k = k(s)$

$$k = \frac{1}{9s}$$

23. В базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ заданы компоненты тензора типа (1,1) матрицей $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$. Найти компоненты тензора в базисе $\overline{e}_1^{\,1} = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$ и $\overline{e}_2^{\,1} = 2\overline{e}_1 + 3\overline{e}_2$.

24. Доказать, что $R^k = \sqrt{g}/2\varepsilon^{knm} R_n \times R_m$, где $R^k, R_n -$ векторы локального и взаимного базиса

25. Показать, что $a \cdot T \cdot a = a \otimes a \cdot\cdot T$, где $a -$ вектор (ковектор), $T -$ тензор второго ранга

26. Найти угол между координатными линиями на геликоиде ($x = au\cos v,\ \ y = au\sin v,$ $z = bv$)

27. Вычислить $\left(\frac{d}{ds}\beta, \frac{d^2}{ds^2}\beta, \frac{d^3}{ds^3}\beta\right)$, где β —вектор бинормали.

28. Доказать, что $\nabla \cdot (T \cdot B) = (\nabla \cdot T) \cdot B + T^t \cdot\cdot \nabla \otimes B$,где $T, B -$ тензоры второго ранга

Дисциплина:

Алгебра

(8 баллов)

1. Сформулировать теорему о собственных значениях самосопряженного оператора. Сформулировать и доказать теорему об ортогональности собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих различным собственным значениям.

2. Даны векторы $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_3}$, $\overline{a_4}$, в некотором ортонормированном базисе этого пространства. Применяя процесс ортогонализации, ортонормировать эту систему векторов $\overline{a_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\overline{a_2} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\overline{a_3} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$ $\overline{a_4} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$
3. Сформулировать аксиомы линейного пространства и привести примеры линейных пространств. Дать определение размерности и базиса линейного пространства. Сформулировать и доказать теорему о единственности разложения элемента линейного пространства по базису. Координаты вектора. Линейные операции над векторами в базисе.
4. Найти канонический вид заданной квадратичной формы и построить на плоскости XOY линию, определяемую заданным уравнением $7y^2 + 6xy - x^2 = 2$.
5. Дать определение линейного оператора в евклидовом пространстве. Сопряженный и самосопряженный операторы, их матрицы в ортонормированном базисе.
6. В пространстве многочленов $P_2(x)$, степени не выше двух, задан линейный оператор дифференцирования $A = \dfrac{d^2}{dx^2}$. Найдите его матрицу в стандартном базисе $\{1, x, x^2\}$ и координаты образа вектора $\overline{x}_1 = 3x^2 - 5x + 7$ в этом базисе. Ответ проверьте непосредственным дифференцированием.
7. Приведите квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа и укажите матрицу преобразования.
   $f(\overline{x}) = x_1^2 + 3x_2^2 - 17x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 10x_2x_3$
8. Исследуйте квадратичную форму $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ на знакоопределенность при различных значениях λ
9. В некотором базисе линейного пространства заданы векторы $\overline{e}_1 = (1,2,0), \overline{e}_2 = (-1,1,3), \overline{e}_3 = (2,1,-2)$ и $\overline{x} = (3,6,1)$. Убедитесь, что векторы образуют новый базис и найдите в этом базисе координаты вектора $\overline{x}$.
10. Найти нормальную жорданову форму матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ и базис, в котором она имеет эту форму
11. Сформулируйте и докажите теорему о разложении определителя по строке
12. В пространстве геометрических векторов V_2 с базисом $(\overline{i}, \overline{j})$ задан линейный оператор $\tilde{A}_1$ поворота пространства относительно точки O на угол $\psi = \dfrac{\pi}{6}$.
    Составьте матрицу этого оператора и найдите образ вектора $\overline{x} = (1, \sqrt{3})$ под его действием.
13. Приведите квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием и укажите матрицу этого преобразования.
    $\varphi(\overline{x}) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$

14. Матрица линейного оператора A в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Составьте матрицу этого оператора в базисе $\bar{e}_1 = \bar{i} + \bar{j}; \bar{e}_2 = \bar{i} + \bar{k}; \bar{e}_3 = \bar{j} + \bar{k}$

15. В линейном пространстве заданы два базиса:

$E \quad \bar{e}_1 = (2;1;-1); \bar{e}_2 = (0;1;2); \bar{e}_3 = (1;1;0)$

$E' \quad \bar{e}'_1 = (1;1;3); \bar{e}'_2 = (3;-2;0); \bar{e}'_3 = (-1;1;1)$

Найдите матрицу перехода от базиса E к базису E'

16. Составьте матрицу линейного оператора $\tilde{A}$ в стандартном базисе линейного пространства $\{\bar{x} : \bar{x} \in V_2\}$,

где $\tilde{A}(\bar{x}) = (\text{Пр}_{\bar{a}}\bar{x})\bar{a}$, $\bar{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$. Найдите образ вектора $\bar{x}_1 = (2,2)$. под действием этого оператора.

17. Постройте в исходной системе координат кривую, заданную уравнением

$$64x_1^2 + 80x_1x_2 + 25x_2^2 = 89$$

18 Линейные операторы: определение, примеры. Матрица линейного оператора в данном базисе. Ядро и образ оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису, инвариантность её определителя и следа относительно замены базиса. Подобные матрицы.

19. Сформулировать и доказать неравенство Коши-Буняковского.
20. Правило Крамера (вывод)
21. Сформулировать и доказать теорему о преобразовании матрицы квадратичной формы при переходе к новому базису. Дать определение ранга квадратичной формы, доказать его инвариантность относительно выбора базиса.
22. В некотором ортонормированном базисе линейного пространства матрица линейного оператора имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Приведите ее к диагональному виду и укажите матрицу преобразования.
23. В пространстве арифметических векторов $\mathbf{R}^3$ задан линейный оператор $\tilde{A}(x) \quad (x_1 + x_2; x_2 + x_3; x_3 - x_1)$. Составьте его матрицу в каноническом базисе и найдите результат действия этого оператора на вектор $\bar{x}_1 = (1,2,3)$

24. Матрица оператора A в базисе $\bar{i}, \bar{j}$ имеет вид $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$. Найдите его матрицу в новом базисе $\bar{e}_1 = 2\bar{i} + \bar{j}; \bar{e}_2 = \bar{i} + \bar{j}$.

25 . Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 18 & 24 \end{pmatrix}$$

26. Дать определение обратной матрицы. Доказать теорему о единственности обратной матрицы.
27. Найдите значение матричного многочлена $f(A)$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

28. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 10 & -2 & 4 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 11 \\ 8 & -4 & 20 \\ 2 & -7 & 16 \end{pmatrix}$$

Дисциплина:

Уравнения математической физики (8 баллов)

1. Решить задачу для уравнения Лапласа в прямоугольнике $0 \le x \le a$; $0 \le y \le b$ с краевыми условиями : $u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = 0$; $u(x,b) = \varphi(x)$, выписав возникающие коэффициенты Фурье в общем виде.
2. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце $a \le r \le b$ с краевыми условиями $u(a,\varphi) = u_1 = const$; $u(b,\varphi) = u_2 = const$;
3. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в круге $r \le R$ с краевым условием $u(R,\varphi) = 1 + \cos\varphi$.
4. Решить Внешнюю краевую задачу для уравнения Лапласа вне круга $r \ge R$ с краевым условием $u(R,\varphi) = \sin\varphi$.
5. Выписать общее решение уравнения в частных производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.
6. Построить функцию Грина для одномерного волнового уравнения $\frac{d^2u}{dx^2} + k^2 u = f(x)$ на всей числовой оси с условиями отсутствия волн, приходящих из бесконечности.

7. Привести краевую задачу для уравнения колебаний конечной струны ($0 \le x \le l$) с неоднородными краевыми условиями $u(0,t) = f(t)$; $u(l,t) = g(t)$ к задаче с однородными краевыми условиями.
8. Привести краевую задачу для уравнения продольных колебаний конечного упругого стержня ($0 \le x \le l$) с неоднородными краевыми условиями $u_x(0,t) = f(t)$; $u_x(l,t) = g(t)$ к задаче с однородными краевыми условиями.
9. Вычислить предел при $t \to \infty$ решения $u(x,t)$ краевой задачи для уравнения теплопроводности на ограниченном отрезке $0 \le x \le l$, если на краях поддерживается температура $u(0,t) = u_1 = const$; $u(l,t) = u_2 = const$.
10. Вычислить предел при $t \to \infty$ решения $u(x,t)$ краевой задачи для уравнения теплопроводности на неограниченном отрезке $-\infty \langle x \langle \infty$, если начальное условие имеет вид $\begin{cases} T_1 & ; x \langle 0 \\ T_2 & ; x \rangle 0 \end{cases}$.
11. Построить методом отражений функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа внутри полуокружности : $x^2 + y^2 \le R^2;\ y \ge 0$.
12. Выписать общее решение уравнения в частных производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\frac{\partial u}{\partial x} = 0$.
13. Построить функцию Грина уравнения Лапласа для полосы: $0 < Im z < \pi$. (Указание: функция $w = e^z$ отображает данную полосу на верхнюю полуплоскость).
14. Построить функцию Грина уравнения Лапласа в кольце: $0 \le \varphi \le 2\pi$; $b \le r \le a$; с краевыми условиями первого рода.
15. Первая и вторая формулы Грина для дважды непрерывно дифференцируемых функций в ограниченной области с гладкой границей (вывести).
16. Третья формула Грина для функции гармонической в области (вывести).
17. Фундаментальные решения уравнения Лапласа на плоскости и в пространстве (вывести).
18. Теорема о среднем значении для функций гармонических в круге и в шаре (вывести).
19. Построить функцию Грина для уравнения Лапласа в ограниченной области на плоскости , если задано ее конформное отображение на круг единичного радиуса.
20. Формула Пуассона решения краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласв круге и в шаре.
21. Предельные значения гармонического потенциала двойного слоя при стремлении точки наблюдения к границе Ляпунова ограниченной области на плоскости и в пространстве. Применение к выводу интегральных уравнений теориин потенциала .
22. Функция Грина одномерного уравнения теплопроводности. Ее график и его поведение при $t \to \infty$.

23. Функция Грина для одномерного уравнения теплпороводности на ограниченном отрезке с однородными краевыми условиями первого рода.
24. Принцип максимума (минимума) функции гармонической в области и его применение для доказательства теоремы единственности

решения краевых задач для уравнения Лапласа.

25. Теорема существования решения краевой задачи для одномерного уравнения колебания ограниченной струны (стержня) с однородными краевыми условиями, полученного методом разделения переменных.
26. Формула Даламбера решения задачи возбуждения неограниченноя струны (стержня), вывод.
27. Принцип максимума для решения уравнения теплопроводности в ограниченной области и его применение для доказательства теоремы единственности решения.
28. Понятие обобщенной задачи Коши для одномерных уравнений гиперболического и параболического типов (постановка задач, построение решения через фундаментальное решение).

Дисциплина:

Численные методы (12 баллов)

1. Найти интерполяционный полином Лагранжа для сеточной функции: $f(-1)=1, f(0)=1, f(1)=3, f(2)=7$.

2. Используя систему функций Чебышёва: $h_0(x)\equiv 1$, $h_1(x)=2+3x$, $h_2(x)=2x^2+x-1$, – решить задачу интерполяции для сеточной функции: $f(-1)=2, f(0)=-1, f(1)=3$.

3. Дана сеточная функция: $f(-1)=3, f(0)=-1, f(1)=1, f(2)=2$. Для неё построить интерполяционный дефектный сплайн 2-ой степени.

4. Дана сеточная функция: $f(-2)=1, f(-1)=-2, f(0)=1, f(1)=3$. Для неё построить интерполяционный дефектный сплайн 2-ой степени.

6. С помощью сплайнов 1-ой степени на сетке $<0, 1, 2>$ отрезка $[0;2]$ приближённо найти значение интегрального оператора Фредгольма с ядром $K(s,t)=st$ для функции $x(t)=t^2+1$.

7. Используя составную квадратурную формулу парабол, на отрезке $[0;2]$ для сетки с шагом 0.5 приближённо вычислить интеграл от функции $x(t)=2t^3+t+2$.

8. Вычислить $exp(t\boldsymbol{A})$, где матрица $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

9. Используя составную квадратурную формулу парабол, на отрезке $[2;4]$ для сетки с шагом 0.5 приближённо вычислить интеграл от функции $x(t)=4t^3-3t^2+1$.

10. Используя составную квадратурную формулу трапеций, методом конечных сумм на сетке шага 1 отрезка $[2;4]$ найти ((в виде сплайна первой степени на той же сетке)) приближённое значение интегрального оператора Фредгольма с ядром $K(s,t)=4s+2t$ для функции $x(t)=2t+4$.

11. Для модели парной линейной регрессии: $y = a + bt + \varepsilon$ (ε – случайная ошибка с нормальным законом распределения, имеющим нулевое математическое ожидание), – оценить неизвестные параметры a и b, если заданы экспериментальные значения $y(0)=1$, $y(1)=2$, $y(2)=3$, $y(3)=5$.

12. С помощью сплайнов 1-ой степени на сетке $<1, 2, 3>$ отрезка $[1;3]$ приближённо найти значение интегрального оператора Фредгольма с ядром $K(s,t)=st$ для функции $x(t)=t^2+t+1$.

13. Используя составную квадратурную формулу прямоугольников, методом конечных сумм на равномерной сетке шага 2 отрезка $[0;6]$ найти приближённое решение (в виде сплайна первой степени на той же сетке) интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода $x(s)+\int_0^6 x(t)dt = s+1 \ \ (s\in[0;6])$.

14. Используя три шага метода простой итерации найти приближённое решение СЛАУ:

$$\boldsymbol{A}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}},\text{ если } \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix},\ \vec{\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}=[3,1,1\rangle .$$

15. Используя два шага метода Зейделя найти приближённое решение СЛАУ:

$$\boldsymbol{A}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}},\text{ если } \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix},\ \vec{\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}=[3,1,1\rangle .$$

16. Используя для отрезка $[0;3]$ равномерную сетку шага 1, найти приближённое решение (в виде сплайна первой степени на той же сетке) краевой задачи: $\varphi''-2\varphi=2\tau-4,\ \varphi(0)=2, \varphi(3)=-1$.

17. Используя метод Рунге-Кутта 2-го порядка (Эйлера-Коши «трапеций») и равномерную сетку шага 0.5 отрезка $[0;2]$, найти приближённое (в виде сплайна первой степени на той же сетке) решение задачи Коши: $y'=6x+1$, если $y(0)=1$.

18. Используя метод Рунге-Кутта 2-го порядка (Эйлера-Коши «трапеций») и равномерную сетку шага 0.5 отрезка $[0;2]$, найти приближённое решение (в виде сплайна первой степени на той же сетке) задачи Коши: $y'=4x-1,\ y(0)=0$.

19. Используя для отрезков $[-2;2]$ и $[0;2]$ равномерные сетки шагов $h=1$ и $\tau=1$, соответственно, и явную схему, найти приближённые решения задачи Коши (в виде сеточной функции для момента «времени» $t=2$ на сетке $\langle -2,-1,0,1,2\rangle\subset[-2;2]$):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-0.5\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}=1,\quad \varphi(0,s)=1,\quad \varphi(t,-2)=t+1 \text{ и } \varphi(t,2)=1 .$$

20. Используя для отрезков $[-2;2]$ и $[0;1]$ равномерные сетки шагов $h=1$ и $\tau=1$, соответственно, и неявную схему, найти приближённые решения задачи Коши (в

виде сеточных функций для момента «времени» $t=1$ на сетке $\langle -2,-1,0,1,2\rangle \subset [-2;2]$):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}=2,\quad \varphi(0,s)=1,\quad \varphi(t,-2)=t+1 \text{ и } \varphi(t,2)=1 \ .$$

21. Найти интерполяционный полином Лагранжа для сеточной функции:

$$f(-1)=2, f(0)=1, f(1)=3, f(2)=4.$$

22. Найти интерполяционный полином Лагранжа для сеточной функции:

$$f(-1)=3, f(0)=-1, f(1)=2, f(2)=1.$$

23. Дана сеточная функция: $f(-2)=3, f(-1)=-1, f(0)=0, f(1)=2$. Для неё построить интерполяционный дефектный сплайн 2-ой степени.

24. Используя метод Рунге-Кутта 2-го порядка (Эйлера-Коши «трапеций») и равномерную сетку шага *0.5* отрезка *[0;2]*, найти приближённое решение (в виде сплайна первой степени на той же сетке) задачи Коши: $y'=2x-1,\ y(0)=2$.

25. Описать разностную схему численного решения краевой задачи для линейного ОДУ 2-го порядка.

26. Изложить метод простой итерации для решения невырожденной СЛАУ специального вида.

27. Описать составную квадратурную формулу прямоугольников.

28. Описать модель полиномиальной регрессии.

Дисциплина:

Механика сплошной среды

(12 баллов)

1. Дайте понятие лагранжева и эйлерова описаний движения сплошных сред, понятие актуальной и отсчетной конфигурации. Дайте определение локальных векторов базиса и метрических матриц в этих конфигурациях.

2. Дайте определение градиента деформации, определение правых и левых тензоров деформаций Альманзи и Коши-Грина.

3. Изложите физический смысл компонент тензора деформаций.

4. Запишите формулу преобразования ориентированной площадки при деформации сплошной среды.

5. Сформулируйте теорему о полярном разложении. Тензоры искажений и поворота. Собственные значения и собственные вектора тензоров искажений.

6. Дайте определение вектора перемещений, запишите соотношения между перемещениями и градиентом деформаций, перемещениями и тензорами деформаций. Запишите соотношения Коши в случае малых деформаций.

7. Дайте определения вектора скорости, конвективной производной, тензора скоростей деформаций.
8. Сформулируйте закон сохранения массы. Запишите уравнение неразрывности в переменных Лагранжа в различных формах.
9. Сформулируйте правило дифференцирования интеграла по подвижному объему и запишите уравнение неразрывности в пространственном описании.
10. Запишите закон изменения количества движения. Запишите интегральную форму уравнения движения. Дайте понятие внутренних и внешних сил, массовых и поверхностных сил.
11. Дайте определение вектора напряжений. Сформулируйте теоремы № 1 и 2 Коши о свойствах вектора напряжений.
12. Изложите вывод понятия тензора напряжений Коши, его свойства, тензор напряжений Пиола-Кирхгофа.
13. Запишите уравнение движения в пространственном и материальном описании.
14. Запишите полную систему законов сохранения в единой универсальной форме, в пространственном и материальном описании.

(16 баллов)

15. Сформулируйте закон сохранения моментов количества движения. Запишите дифференциальную форму закона сохранения моментов количества движения. Дайте определение полярных и неполярных сред. Изложите свойство симметрии тензора напряжений Коши.
16. Сформулируйте первый закон термодинамики. Запишите интегральную и дифференциальную формулировки уравнения энергии. Изложите вывод выражения для вектора потока тепла.
17. Сформулируйте нулевой закон и второй закон термодинамики. Запишите интегральную и дифференциальную формулировки закона баланса энтропии.
18. Изложите вывод основного термодинамического тождества. Дайте понятие энергетических пар тензоров напряжений и деформаций.
19. Изложите принципы термодинамически согласованного детерминизма, равноприсутствия и локальности. Запишите общий вид определяющих соотношений сплошных сред для модели A_n
20. Изложите понятие Н-пробразования отсчетной конфигурации, понятие об Н-индифферентных и Н-инвариантных тензорах, приведение примеры. Сформулируйте принцип материальной симметрии. Дайте определение группы симметрии сплошной среды. Дайте определения жидких и твердых сред.
21. Изложите понятие об скалярных инвариантах. Запишите представления определяющих соотношений для твердых сред с помощью инвариантов (случаи изотропии, трансверсальной изотропии, ортотропии). Запишите определяющие соотношение для идеальной жидкости.
22. Дайте классификацию поверхностей раздела. Сформулируйте аксиому о классе функций при переходе через поверхность разрыва. Запишите правило дифференцирования объемного интеграла при наличии поверхности разрыва.

23. Запишите общий вид соотношений на поверхностях сильных разрывов в материальном и пространственном описании.

24. Запишите систему уравнений идеального газа, систему уравнений для несжимаемой идеальной жидкости и вязкой жидкости. Сформулируйте модель совершенного идеального газа.

25. Запишите уравнение Громеки-Лемба. Запишите соотношения на поверхностях разрыва идеальных жидких сред. Запишите соотношения Гюгонио, запишите граничные условия в идеальном газе на поверхности контакта с твердой средой.

26. Сформулируйте модель адиабатических процессов в идеальной жидкости. Запишите уравнение адиабаты Пуассона, дайте различные формулы ее записи. запишите систему уравнений для идеального газа при адиабатических процессах.

27. Дайте определение плоских волн, запишите автомодельное решение Римана. Изложите понятия о характеристических направления в одномерной задаче, инвариантах Римана. Изложите ход решения задачи о поршне, выдвигаемом из газа. Изложите ход решения задача о поршне, вдвигаемом в газ.

28. Дайте определение установившихся процессов. Изложите понятие функции давления, запишите выражения для нее при баротропных процессах. Сфрмулимрутй теорему об интеграле Бернулли.

29. Изложите применение интеграла Бернулли для несжимаемой жидкости в поле силы тяжести, применение интеграла Бернулли для адиабатических процессов в совершенном газе.

30. Запишите изэнтропические формулы, дайте определение критической скорости. Изложите применение интеграла Бернулли для определения формы трубок тока в одномерных течениях.