

Ответы на вопросы к зачёту по ТСП

Оглавление

1. Определение и задание случайного процесса (СП).....	2
2. Дискретный абсолютно непрерывный СП. Задание СП с помощью конечномерной (КМ) функции распределения (ФР) и КМ рядов.	3
3. Основные числовые характеристики (ЧХ) СП и их свойства.	4
4. Задание СП с помощью системы конечных характеристических функций (ХФ).	5
5. Вычисление основных ЧХ с помощью основных ХФ.	6
6. Элементарный СП. Линейная комбинация. Вычисление основных числовых характеристик.....	6
7. Гауссовский СП. ХФ.	6
8. Процесс с непрерывными приращениями (НП), вычисление корреляционной функции (КФ) и дисперсии.	6
9. Процесс с независимыми приращениями. Вывод формул (ВФ) для n-мерных ХФ. ..	7
10. Простейший поток событий (ПС). ВФ для вероятности в заданный промежуток времени.	8
11. Винеровский СП. ВФ для n-мерных ХФ, для стационарного процесса.	8
12. Простейший Пуассоновский процесс (ПП). Вывод формул (ВФ) для n-мерных ХФ. 9	
13. ПП общего вида, ВФ для ХФ.	10
14. Марковский процесс. Доказательства равенства Винеровский СП к Марковскому СП. 11	
15. Марковские цепи (МЦ). Стационарные.....	12
16. Марковские цепи с непрерывным временем.....	13
17. Уравнение Колмогорова-Чепмена. Решение с помощью матричной экспоненты. 14	
18. Уравнение размножения гибели. Решение уравнения размножения и гибели методом операционного исчисления.....	15
19. Нахождение стационарных решений уравнения размножения гибели.	16

1. Определение и задание случайного процесса (СП).

Все экономические процессы производства, снабжения, эксплуатации, потребления и т.п. протекают во времени и пространстве и носят **случайный** характер, поэтому естественно в качестве их математических моделей рассматривать **случайные функции** (процессы).

Случайным процессом (СП) называют семейство **случайных величин** (СВ), зависящих от параметра t , пробегающего произвольное множество T . Параметр t называют *аргументом* СП, T -областью или множеством значений аргумента t . Понятие СП представляет собой обобщение понятия СВ ξ и обозначается ξ_t , чаще $\xi(t)$ или в более полном виде $\xi(t, \omega)$, где $\omega \in \Omega$ — элементарное событие из пространства элементарных событий Ω . Если зафиксировать ЭС $\omega = \omega_0$, то мы получим не**случайную**

функцию $x(t, \omega_0)$, которая называется *реализацией*, или *траекторией* СП (рис. 1).

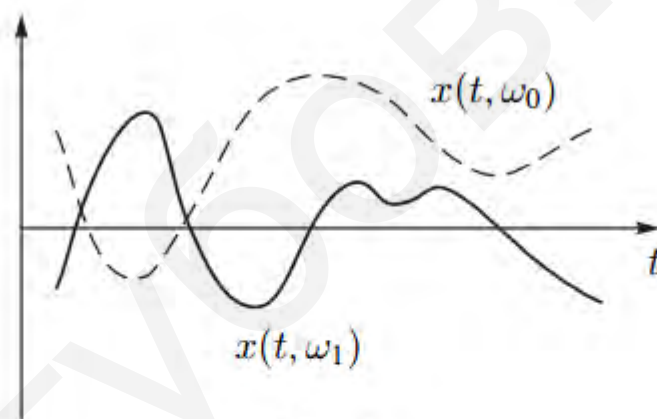


Рис. 1

При фиксированном значении аргумента $t = t_0 \in T$ получаем СВ $\xi(t_0) = \xi(t_0, \omega)$, называемую *сечением* СП. Множество возможных значений СП называется *пространством состояний* и обозначается S .

В прикладных исследованиях при анализе экономических, физических, технических и т.п. систем переходы из состояния $\xi(t_1)$ в состояние $\xi(t_2)$ обычно описываются в терминах СП, в частности, в терминах *элементарных случайных функций* (ЭСФ). Под ЭСФ понимают не**случайную** функцию от аргумента t , в которой параметры — это СВ, не зависящие от t .

2. Дискретный абсолютно непрерывный СП. Задание СП с помощью конечномерной (КМ) функции распределения (ФР) и КМ рядов.

Если S конечно или счетно, т. е. сечение СП есть дискретная СВ, то СП называют процессом с дискретными состояниями. Если любое сечение СП есть непрерывная СВ, то говорят о процессе с непрерывными состояниями. Если $T = \{t_0, t_1, \dots\}$ — дискретное множество, т. е. СП меняет свои состояния только в фиксированные моменты времени, то речь идет о процессе с дискретным временем. Моменты времени t_n в этом случае обозначают просто n и называют шагами, СП обозначают ξ_n , $n = 0, 1, \dots$. Если $T = [0, \infty)$, т. е. СП меняет свои состояния в любой момент времени $t > 0$, то говорят о СП с непрерывным временем.

3. Исчерпывающей характеристикой СП является совместный ЗР сечений

$$\begin{aligned} \xi(t_0), \xi(t_1), \dots, \xi(t_n) : F(t_0, t_1, \dots, t_n, x_0, x_1, \dots, x_n) = \\ = P\{\xi(t_i) < x_i, i = 0, 1, \dots, n\}, \quad (1.2) \end{aligned}$$

определенный для любых $n < \infty$ и любых t_i . Простейшим из них является одномерный ЗР в форме функции распределения (ФР)

$$F(t, x) = P\{\xi(t) < x\}$$

или в форме плотности распределения (распределения)

$$p(t, x), \quad x \in S.$$

На практике более чем двумерные ЗР, как правило, не используются. Знание одномерных ЗР позволяет определить математическое ожидание и дисперсию СП:

$$m(t) = \begin{cases} \int_S x(t) p(t, x) dx, \\ \sum_{x \in S} x(t) p(t, x), \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\sigma^2(t) = M[\dot{\xi}(t)]^2,$$

где $\dot{\xi}(t) = \xi(t) - m(t)$. Свойства этих характеристик полностью совпадают со свойствами их аналогов для СВ.

Знание двумерных ЗР $p_{\xi}(t, t', x, x')$ позволяет найти характеристики стохастической связи двух сечений одного СП:

$$K_{\xi}(t, t') = M\dot{\xi}(t)\dot{\xi}(t'); \quad r_{\xi}(t, t') = \frac{K_{\xi}(t, t')}{\sqrt{\sigma_{\xi}^2(t)\sigma_{\xi}^2(t')}}, \quad (1.4)$$

которые по аналогии с ковариацией и коэффициентом корреляции называются *ковариационной* (КВФ) и *корреляционной* (КРФ) *функциями* соответственно. Наряду со скалярными рассматриваются и векторные СП. Знание двумерного ЗР двух СП $\xi(t)$ и $\eta(t')$ в точках t и t' позволяет найти характеристики стохастической связи сечений двух СП:

$$K_{\xi\eta}(t, t') = M\dot{\xi}(t)\dot{\eta}(t'); \quad r_{\xi\eta}(t, t') = \frac{K_{\xi\eta}(t, t')}{\sqrt{\sigma_{\xi}^2(t)\sigma_{\eta}^2(t')}}, \quad (1.5)$$

которые называются *взаимной ковариационной* (ВКВФ) и *взаимной корреляционной* (ВКРФ) *функциями* соответственно.

4. Задание СП с помощью системы конечных характеристических функций (ХФ).

5. Вычисление основных ЧХ с помощью основных ХФ.

6. Элементарный СП. Линейная комбинация. Вычисление основных числовых характеристик.

Определение 2.1. *Случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in T = [a, b]$, называют стационарным в узком смысле, если для любых $N \geq 1$, $t_k \in T$, $k = \overline{1, N}$, и $h \in \mathbb{R}$, такого, что $t_k + h \in T$, $k = \overline{1, N}$, имеет место тождество*

$$F_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)} | t_1, \dots, t_N) \equiv F_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)} | t_1 + h, \dots, t_N + h),$$

или, что то же самое,

$$f_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)} | t_1, \dots, t_N) \equiv f_{\xi}(x_{(1)}, \dots, x_{(N)} | t_1 + h, \dots, t_N + h).$$

Если стационарный в узком смысле случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in T = [a, b]$, имеет моменты первого и второго порядков, то его математическое ожидание $M[\xi(t, \omega)] \equiv m_{\xi}$ — постоянный вектор, а ковариационная функция зависит лишь от разности аргументов, т.е.

$$\text{cov}[\xi(t_1, \omega); \xi(t_2, \omega)] \equiv K_{\xi}(t_2 - t_1).$$

Действительно, полагая $h = a - t$, получаем

$$M[\xi(t, \omega)] = \int_{\mathbb{R}^n} x f_{\xi}(x | t) dx = \int_{\mathbb{R}^n} x f_{\xi}(x | a) dx = m_{\xi}(a) \triangleq m_{\xi}.$$

7. Гауссовский СП. ХФ.

Важнейшей характеристикой СП является характер взаимной зависимости сечений $\xi(t_0), \xi(t_1), \dots, \xi(t_n), \dots$, который определяется заданием совместных законов распределения для любых моментов $0 \leq t_0 < t_1 < \dots$. Приведем несколько примеров. Если совместный ЗР для любых t_i является нормальным, то СП называют **гауссовским**. Если СВ $\xi(t_0), \xi(t_i) - \xi(t_{i-1}), i = 1, 2, \dots, n$,

8. Процесс с непрерывными приращениями (НП), вычисление корреляционной функции (КФ) и дисперсии.

Если СВ $\xi(t_0), \xi(t_i) - \xi(t_{i-1}), i = 1, 2, \dots, n$, независимы, то говорят о СП с независимыми приращениями.

9. Процесс с независимыми приращениями. Вывод формул (ВФ) для n -мерных ХФ.

Определение 2.4. Случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in T \subset \mathbb{R}$, называют процессом с независимыми приращениями, если для любых $N > 1$ и $t_k \in T$, $k = \overline{1, N}$, таких, что $t_1 < t_2 < \dots < t_N$, случайные величины

$$\xi(t_1, \omega), \quad \xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega), \quad \dots, \quad \xi(t_N, \omega) - \xi(t_{N-1}, \omega)$$

являются независимыми.

В практике научных исследований встречаются случайные процессы, родственные (в определенном смысле) случайным процессам с независимыми приращениями. Отметим некоторые из них.

1. Если n -мерные случайные векторы $\xi(t_1, \omega)$, $\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega)$, $\dots$, $\xi(t_N, \omega) - \xi(t_{N-1}, \omega)$ являются, вообще говоря, зависимыми, но некоррелированными, то n -мерный случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, называют процессом с некоррелированными (ортогональными) приращениями.

2. Если для любых $N > 1$ и $t_k \in T$, $k = \overline{1, N}$, закон распределения приращения $\xi(t_{k+1}, \omega) - \xi(t_k, \omega)$ зависит лишь от $t_{k+1} - t_k$, $k = \overline{1, N-1}$, то случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in T$, с независимыми приращениями называют процессом со стационарными независимыми приращениями.

Случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in T \subset \mathbb{R}$, с независимыми приращениями полностью определен одномерным законом распределения $f_\xi(x|t)$, характеризующим случайный вектор $\xi(t_1, \omega)$, и двумерным законом распределения $f_\xi(x_{(1)}, x_{(2)}|t_1, t_2)$, характеризующим приращения $\xi(t_{k+1}, \omega) - \xi(t_k, \omega)$, $k = \overline{1, N-1}$.

10. Простейший поток событий (ПС). ВФ для вероятности в заданный промежуток времени.

Потоком событий называется последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, где $T_n = t_{n+1} - t_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (рис. 27), например, поток клиентов в парикмахерскую, поток автомашин в ремонтную мастерскую и т. п. Предположим, что **поток событий** обладает тремя свойствами: стационарности, ординарности и отсутствия памяти.

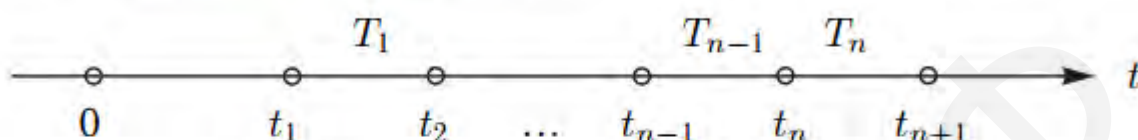


Рис. 27

Стационарность означает, что вероятность появления того или иного числа событий в интервале $(t, t + \Delta t)$ зависит от Δt , но не зависит от t .

Ординарность означает, что события появляются поодиночке, а не группами. Точнее, вероятность появления одного события в интервале длительностью Δt равна $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$, где $\lambda > 0$ — *интенсивность* потока, а вероятность появления в этом интервале двух и более событий равна $o(\Delta t)$.

Отсутствие памяти означает независимость появления того или иного числа **событий** на **непересекающихся интервалах** времени.

Поток событий, обладающий этими свойствами, называется **простейшим** (ПП). Введем в рассмотрение так называемый **пуассоновский СП** $\xi(t)$, равный количеству событий ПП, появившихся в интервале времени длительностью t . В силу стационарности ПП всегда можно считать, что этот интервал имеет вид $(0, t)$.

11. Винеровский СП. ВФ для n-мерных ХФ, для стационарного процесса.

В частности, если для любых i приращение $\xi(t_i) - \xi(t_{i-1}) \in N(0, a(t_i - t_{i-1}))$, $a > 0$ — константа, то СП называют **винеровским**, если же $\xi(t_i) - \xi(t_{i-1}) \in \text{Пуас}(\lambda(t_i - t_{i-1}))$, $\lambda > 0$ — константа, то СП называют **пуассоновским**. Особое практиче-

Пример 1.3. Покажем, что СП с независимыми приращениями является марковским.

Пусть $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ и СВ $\xi(t_0), \xi(t_1) - \xi(t_0), \xi(t_2) - \xi(t_1), \dots$ попарно независимы. Это означает, что любое приращение $\xi(t_{n+1}) - \xi(t_n)$ не зависит от прошлого, если известно $\xi(t_n) = x_n$, т.е. для всех $t > t_n$ выполняется свойство

$$P\{\xi(t) \leq x \mid \xi(t_i) = x_i, i = 0, 1, \dots, n\} = P\{\xi(t) \leq x \mid \xi(t_0) = x_0\},$$

эквивалентное марковскому свойству. В частности, **винеровский** СП является марковским, при этом $\xi(t_{n+1}) - \xi(t_n) \in N(0, a(t_{n+1} - t_n))$ и СВ $\xi(t)$ при условии $\xi(t_0) = x_0$ также имеет нормальный закон распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной сумме

$$a(t_1 - t_0) + a(t_2 - t_1) + \dots + a(t_n - t_{n-1}) + a(t - t_0) = a(t - t_0).$$

12. Простейший Пуассоновский процесс (ПП). Вывод формул (ВФ) для n -мерных ХФ.

В частности, если для любых i приращение $\xi(t_i) - \xi(t_{i-1}) \in N(0, a(t_i - t_{i-1}))$, $a > 0$ — константа, то СП называют *винеровским*, если же $\xi(t_i) - \xi(t_{i-1}) \in \text{Пуас}(\lambda(t_i - t_{i-1}))$, $\lambda > 0$ — константа, то СП называют **пуассоновским**. Особое практическое значение имеют *марковские* СП (МСП), называемые так по имени нашего выдающегося соотечественника академика Андрея Андреевича Маркова (1856–1922).

Пуассоновский процесс в теории СП играет примерно такую же роль, как нормальный закон в теории СВ. Так, сумма n независимых СП при некоторых не очень жестких предположениях сходится к **пуассоновскому** при $n \rightarrow \infty$.

Определение 2.7. Пуассоновским процессом с параметром $\lambda > 0$ называют скалярный случайный процесс $\xi(t, \omega)$, $t \in T = [0, \infty)$, обладающий следующими свойствами:

1) $\xi(0, \omega) \equiv 0$;

2) для любых $N > 1$ и $t_k \in T$, $k = \overline{1, N}$, таких, что $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N$ случайные величины $\xi(t_k, \omega) - \xi(t_{k-1}, \omega)$, $k = \overline{1, N}$, являются независимыми;

3) для любых $t_1, t_2 \in T$, таких, что $0 \leq t_1 < t_2$, случайная величина $\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega)$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda(t_2 - t_1)$, т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[\xi(t_2, \omega) - \xi(t_1, \omega) = k] &= \\ &= \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

Замечание 2.3. Пуассоновский процесс играет важную роль в различных приложениях теории случайных процессов, в частности, в теории массового обслуживания.

14. Марковский процесс. Доказательства равенства Винеровский СП к Марковскому СП.

Марковским называют СП, для которого выполняется так называемое **марковское** свойство (свойство марковости):

$$\begin{aligned} P\{a < \xi(t) < b \mid \xi(t_0) = x_0, \xi(t_1) = x_1, \dots, \xi(s) = x\} = \\ = P\{a < \xi(t) < b \mid \xi(s) = x\}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

для любых $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < s < t$ и любых $a < b$.

Если считать:

- состояния $\xi(t)$ в момент $t > s$ «будущим» СП,
- состояния $\xi(t)$ в момент $t = s$ «настоящим» СП,
- состояния $\xi(t)$ в момент $t < s$ «прошлым» СП,

где s — фиксированный момент времени, то **марковское** свойство означает, что будущее МСП зависит от прошлого через настоящее. МСП с дискретным временем и дискретными состояниями называют *дискретной цепью Маркова* (ДЦМ). МСП с непрерывным временем и дискретными состояниями называют *непрерывной цепью Маркова* (НЦМ).

15. Марковские цепи (МЦ). Стационарные.

Для формализованного описания цепи Маркова удобно использовать понятия вероятностей состояний и переходных вероятностей. Поэтому введем следующие обозначения.

Пусть $\{S_k\}_{k=1}^n$ — множество возможных состояний системы S . Вероятность реализации случайного события s_k^j , состоящего в том, что после j этапов система находится в состоянии S_k , обозначают $p_k(j) \triangleq P[s_k^j]$ и называют **вероятностью состояния**. Вектор вероятностей состояний системы S после j этапов обозначим

$$p(j) \triangleq (p_1(j) \ p_2(j) \ \dots \ p_n(j))^T,$$

а вектор вероятностей начальных состояний —

$$p(0) \triangleq (p_1(0) \ p_2(0) \ \dots \ p_n(0))^T.$$

Если ввести матрицу-строку

$$I \triangleq (1 \ 1 \ \dots \ 1) \in M_{1n}(\mathbb{R}),$$

то равенство

$$\sum_{k=1}^n P[s_k^j] = \sum_{k=1}^n p_k(j) = 1, \quad j \geq 0,$$

можно представить в виде

$$Ip(j) = 1, \quad j \geq 0.$$

Если $\{S_k\}_{k=1}^n$ — множество возможных состояний системы S , а s_k^j — случайное событие, состоящее в том, что после j этапов система находится в состоянии S_k , то **условную вероятность** события s_k^j при условии s_m^{j-1} обозначают

$$p_{mk}^j \triangleq P[s_k^j | s_m^{j-1}]$$

и называют **переходной вероятностью**.

16. Марковские цепи с непрерывным временем.

Марковский случайный процесс называется **цепью Маркова с непрерывным временем**, если переходы системы из состояния в состояние происходят не в **фиксированные**, а в **случайные** моменты времени.

Время наступления событий часто предсказать заранее невозможно. Например, любая деталь устройства или агрегат могут выйти из строя в любой, непредсказуемый момент времени. Описание таких, и гораздо более сложных ситуаций возможно при использовании формализма непрерывных цепей Маркова.

Пусть система характеризуется $n+1$ состояниями $S_0, S_1, \dots, S_n$, и переход из состояния в состояние может происходить в любой момент времени. Обозначим через $P_i(t)$ вероятность того, что в момент времени t система будет находиться в состоянии S_i ($i=0, 1, \dots, n$). Требуется определить для любого момента времени вероятности состояний $P_0(t), P_1(t), \dots, P_n(t)$. При этом, очевидно, должно выполняться условие нормировки:

$$\sum_{i=0}^n P_i(t) = 1$$

Для процесса с непрерывным временем вместо **переходных вероятностей**

P_{ij} рассматриваются **плотности вероятностей перехода**

λ_{ij} , представляющие собой предел отношения вероятности перехода системы за время Δt из состояния S_i в состояние S_j к величине Δt :

$$\lambda_{ij}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(t; \Delta t)}{\Delta t}$$

где $P_{ij}(t; \Delta t)$ – вероятность того, что система, пребывавшая в момент t в состоянии S_i , за время Δt перейдет из него в состояние S_j ; при этом всегда $i \neq j$.

Если $\lambda_{ij} = \text{const}$, то процесс называется **однородным**, если же $\lambda = \lambda_{ij}(t)$, то – **неоднородным**.

17. Уравнение Колмогорова-Чепмена. Решение с помощью матричной экспоненты.

Уравнение Колмогорова — Чепмена для однопараметрического семейства непрерывных линейных операторов $\mathbf{P}(t)$, $t > 0$ в топологическом векторном пространстве выражает **полугрупповое свойство**:

$$\mathbf{P}(t + s) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(s).$$

Чаще всего этот термин используется в теории *однородных марковских случайных процессов*, где $\mathbf{P}(t)$, $t \geq 0$ — оператор, преобразующий распределение вероятностей в начальный момент времени в распределение вероятности в момент времени t ($\mathbf{P}(0) = \mathbf{1}$).

Для неоднородных процессов рассматриваются двухпараметрические семейства операторов $\mathbf{P}(t, h)$, $h > t > 0$, преобразующих распределение вероятностей в момент времени $t > 0$ в распределение вероятности в момент времени $h > t > 0$. Для них уравнение Колмогорова—Чепмена имеет вид

$$\mathbf{P}(t, s) = \mathbf{P}(t, h)\mathbf{P}(h, s), \quad s > h > t > 0.$$

Для систем с дискретным временем параметры t, h, s принимают **натуральные значения**.

Формально дифференцируя уравнение Колмогорова—Чепмена по s при $s = 0$ получаем **прямое уравнение Колмогорова**:

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q},$$

где

$$\mathbf{Q} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(h) - \mathbf{1}}{h}.$$

Формально дифференцируя уравнение Колмогорова — Чепмена по t при $t = 0$ получаем **обратное уравнение Колмогорова**

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t).$$

Необходимо подчеркнуть, что для бесконечномерных пространств оператор $\mathbf{Q}$ уже не обязательно непрерывен, и может быть определен не всюду, например, быть дифференциальным оператором в пространстве распределений.

18. Уравнение размножения гибели. Решение уравнения размножения и гибели методом операционного исчисления.

В предыдущем параграфе мы убедились, что зная размеченный граф состояний системы, можно сразу написать алгебраические уравнения для предельных вероятностей состояний. Таким образом, если две непрерывные цепи Маркова имеют одинаковые графы состояний и различаются только значениями интенсивностей λ_{ij} , то нет надобности на-



Рис. 4.38

ходить предельные вероятности состояний для каждого из графов в отдельности: достаточно составить и решить в буквенном виде уравнения для одного из них, а затем подставить вместо λ_{ij} соответствующие значения. Для многих часто встречающихся форм графов линейные уравнения легко решаются в буквенном виде.

В данном параграфе мы познакомимся с одной очень типичной схемой непрерывных марковских цепей — так называемой «схемой гибели и размножения»).

Марковская непрерывная цепь называется «процессом гибели и размножения», если ее граф состояний имеет вид, представленный на рис. 4.38, т. е. все состояния можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из средних состояний ($S_2, \dots, S_{n-1}$) связано прямой и обратной связью с каждым из соседних состояний, а крайние состояния (S_1, S_n) — только с одним соседним состоянием.

19. Нахождение стационарных решений уравнения размножения гибели.

Часто в системах самого различного назначения протекают процессы, которые можно представить в виде модели "гибели и размножения".

Граф состояний такого процесса показан на рис. 2.5.

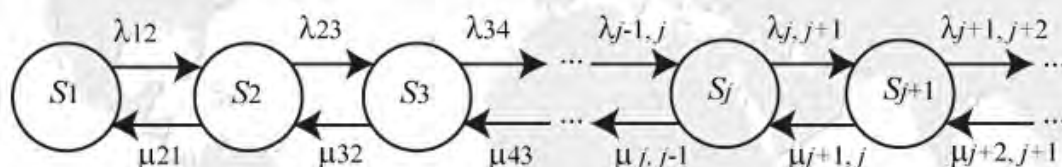


Рис. 2.5. Схема "гибели и размножения"

Особенностью модели является наличие прямой и обратной связей с каждым соседним состоянием для всех средних состояний; первое и последнее (крайние) состояния связаны только с одним "соседом" (с последующим и предыдущим состояниями соответственно).

Название модели - "гибель и размножение" - связано с представлением, что стрелки вправо означают переход к состояниям, связанным с ростом номера состояния ("рождение"), а стрелки влево - с убыванием номера состояний ("гибель").

Очевидно, стационарное состояние в этом процессе существует. Составлять уравнения Колмогорова нет необходимости, так как структура регулярна, необходимые формулы приводятся в справочниках, а также в рекомендованной литературе.

Для приведенных на рис. 2.5 обозначений формулы имеют вид:

$$P_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\mu_{21}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\mu_{21}\mu_{32}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}}{\mu_{21}\mu_{32}\mu_{43}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}\lambda_{34}}{\mu_{21}\mu_{32}\mu_{43}} + \dots + \frac{\lambda_{12}\lambda_{23} \dots \lambda_{n-1,n}}{\mu_{21}\mu_{32} \dots \mu_{n,n-1}}}$$

$$P_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23}}{\mu_{21}\mu_{32}} \cdot P_1; \dots P_n = \frac{\lambda_{12}\lambda_{23} \dots \lambda_{n-1,n}}{\mu_{21}\mu_{32} \dots \mu_{n,n-1}} \cdot P_1.$$

Непрерывный марковский процесс полностью определяется значениями плотностей вероятностей переходов λ_{ij} , μ_{ji} . Ранее был установлен их физический смысл как интенсивности потоков событий, переводящих систему из одного состояния в другое. Поток событий в однородных непрерывных марковских процессах характеризуется экспоненциальным законом распределения случайных интервалов времени между событиями. Такой поток называют простейшим или стационарным пуассоновским.

Простейший поток обладает свойствами:

- стационарности, что означает независимость характеристик потока от времени;
- ординарности, что означает практическую невозможность появления двух и более событий одновременно;
- отсутствия последействия, об этом говорилось в начале темы.