Оглавление

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

Лабораторные работы

по дисциплине «Численные методы» для группы АК3

Лектор: доцент кафедры ФН-11, Кутыркин В.А.

Введение

Представляемые лабораторные работы ориентированы на практическое освоение методов, рассматриваемых в лекционном материале дисциплины «Численные методы». В отличие от семинарских занятий, лабораторные работы осуществляются в компьютерном классе, что позволяет студентам более наглядно познакомиться с проблемами, возникающими при решении прикладных математических задач численными методами.

Лабораторные работы требуют непосредственного исполнения в компьютерном классе. Поэтому в качестве основного рабочего инструмента выполнения заданий используется программа Excel, позволяющая в процессе занятия производить достаточно трудоёмкие вычисления, которые невозможно осуществить на обычных семинарских занятиях.

Перед каждым заданием лабораторной работы приводится необходимый теоретический материал, позволяющий грамотно выполнить задание.

Лабораторная работа №1 Погрешности при решении СЛАУ

Погрешности при решении приближённо заданных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Рассмотрим заданную без погрешностей СЛАУ с квадратной невырожденной матрицей:

$$\boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} = {}^{>}\boldsymbol{b} \quad \Big(\sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j = b^i,\ i=\overline{1,n}\Big), \tag{1}$$

где $\boldsymbol{A} = (a^i_j)^n_n \in GL(\mathbb{R};n)$ и ${}^{>}\boldsymbol{b} = [b^1,\dots,b^n\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ – матрица и вектор-столбец правой части СЛАУ, соответственно, и ${}^{>}\boldsymbol{x} = [x^1,\dots,x^n\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ – неизвестное решение этой СЛАУ в виде соответствующего вектора-столбца.

Понятия подчинённых норм матриц и векторов позволяют оценить погрешности, возникающие при численном решении СЛАУ. Здесь предполагается, что для векторов и матриц используются чебышевские нормы, т.е.

$$\|{}^{>}\boldsymbol{b}\| = \max\{|b^1|,\dots,|b^n|\},\ \|\boldsymbol{A}\| = \max\{\sum_{j=1}^{n}|a^i_j| : i=\overline{1,n}\}\,.$$

Определение 1.1 (числа обусловленности матрицы). Число $cond(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$ называется *числом обусловленности матрицы* $\boldsymbol{A} \in GL(\mathbb{R};n)$.►

Пусть матрица и правая часть системы заданы с некоторой погрешностью. Тогда наряду со СЛАУ (1) рассматривается приближённая СЛАУ:

$$(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})({}^{>}\boldsymbol{x} + {}^{>}\Delta\boldsymbol{x}) = {}^{>}\boldsymbol{b} + {}^{>}\Delta\boldsymbol{b}\,, \tag{2}$$

где $\Delta\boldsymbol{A} = (\Delta a^i_j)^n_n \in L(\mathbb{R};n)$ и ${}^{>}\Delta\boldsymbol{b} = [\Delta b^1,\dots,\Delta b^n\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ – погрешности в матрице и правой части СЛАУ (1), соответственно.

Теорема 1.1 (об относительной погрешности в решении приближённой СЛАУ). Пусть правая часть и невырожденная матрица СЛАУ (1) получили приращения ${}^{>}\Delta\boldsymbol{b}$ и $\Delta\boldsymbol{A}$, соответственно. Если $cond(\mathbf{A})\dfrac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}<1$, то оценка для относительной погрешности $\|{}^{>}\Delta\boldsymbol{x}\|/\|{}^{>}\boldsymbol{x}\|$ решения СЛАУ (2) удовлетворяет неравенству

$$\frac{\|\Delta\,{}^{>}\boldsymbol{x}\|}{\|{}^{>}\boldsymbol{x}\|}\le\frac{cond(\mathbf{A})}{1-cond(\mathbf{A})\dfrac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}}\left(\frac{\|\Delta\,{}^{>}\boldsymbol{b}\|}{\|{}^{>}\boldsymbol{b}\|}+\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}\right).\blacktriangleright \tag{3}$$

Замечание 1.1. Число обусловленности $cond(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ определяет, насколько погрешность входных данных может повлиять на решение СЛАУ (1).

Всегда $cond(A)\ge 1$. Действительно: $1=\|\mathbf{E}\|=\|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\|\le\|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|=cond(A)$.

Если $cond(A)\approx 1\div 10$, то ошибки входных данных слабо сказываются на приближённом решении и СЛАУ (2) считается *хорошо обусловленной*.

Если $cond(A)>10^2$, то СЛАУ (2) является *плохо обусловленной*.

Если погрешность в матрице СЛАУ (2) достаточно мала, то можно предполагать, что в СЛАУ (2) $\|\Delta A\|=0$. Тогда, согласно (3), для относительной погрешности $\|{}^{>}\Delta\boldsymbol{x}\|/\|{}^{>}\boldsymbol{x}\|$ решения СЛАУ (2) справедливо неравенство:

$$\frac{\|\Delta\,{}^{>}\boldsymbol{x}\|}{\|{}^{>}\boldsymbol{x}\|}\le cond(\mathbf{A})\frac{\|\Delta\,{}^{>}\boldsymbol{b}\|}{\|{}^{>}\boldsymbol{b}\|}. \tag{4}$$

Неравенство (4) ещё раз подчёркивает, что число обусловленности $cond(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ определяет, насколько относительная погрешность в правой части СЛАУ влияет на относительную погрешность в решении приближённой СЛАУ.►

ЗАДАНИЕ 1.1

Дана СЛАУ (N – номер студента в журнале):

$$\begin{cases}100(1+0{,}5N)x^1+100(1+0{,}5N)x^2+100(1+0{,}5N)x^3=100(3+1{,}5N);\\ 100{,}1\cdot(1+0{,}5N)x^1+99{,}9\cdot(1+0{,}5N)x^2+100(1+0{,}5N)x^3=100(3+1{,}5N);\\ 99{,}9\cdot(1+0{,}5N)x^1+100\cdot(1+0{,}5N)x^2+100{,}1\cdot(1+0{,}5N)x^3=100(3+1{,}5N).\end{cases}$$

Предполагается, что ошибка в матрице этой СЛАУ достаточно мала и относительная ошибка в её правой части равна 0,01. Приближённая СЛАУ имеет вид:

$$\begin{cases} 100(1+0{,}5N)x^1+100(1+0{,}5N)x^2+100(1+0{,}5N)x^3=100(3+1{,}5N)(1+0{,}01); \\ 100{,}1\cdot(1+0{,}5N)x^1+99{,}9\cdot(1+0{,}5N)x^2+100(1+0{,}5N)x^3=100(3+1{,}5N)(1-0{,}01); \\ 99{,}9\cdot(1+0{,}5N)x^1+100\cdot(1+0{,}5N)x^2+100{,}1\cdot(1+0{,}5N)x^3=100(3+1{,}5N)(1+0{,}01). \end{cases}$$

Требуется найти число обусловленности матрицы рассматриваемой СЛАУ и относительную погрешность в решении приближённой СЛАУ. Затем, прокомментировать получившиеся результаты.►

ЗАДАНИЕ 1.2

Исходные данные в настоящем задании определяются параметрами, приведёнными в *таблице 1*, где вариант N – номер фамилии студента в журнале.

Таблица 1

N	λ	F	a	b
1	0,7	sin	$\pi/4$	$3\pi/4$
2	-0,7	sin	$\pi/4$	$3\pi/4$
3	0,6	cos	$-\pi/4$	$\pi/4$
4	-0,6	cos	$-\pi/4$	$\pi/4$
5	0,5	sin	$\pi/4$	$3\pi/4$
6	-0,5	sin	$\pi/4$	$3\pi/4$
7	0,4	cos	$-\pi/4$	$\pi/4$
8	-0,4	cos	$-\pi/4$	$\pi/4$
9	0,7	arctg	0	1
10	-0,7	arctg	0	1
11	0,6	th	0	1
12	-0,6	th	0	1
13	0,5	arctg	0	1
14	-0,5	arctg	0	1
15	0,4	th	0	1
16	-0,4	th	0	1

Согласно этой таблице, на отрезке $[a;b]$ выбрана центрально равномерная сетка с десятью узлами $s_1=\tau_1,\ldots,s_{10}=\tau_{10}$, имеющая шаг $h=\dfrac{b-a}{10}$.

Требуется решить приближённую СЛАУ:

$$(\boldsymbol{E}+\lambda\boldsymbol{A})^{>}\boldsymbol{x}={}^{>}\boldsymbol{b}+{}^{>}\Delta\boldsymbol{b}, \tag{5}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$ – ненулевое число (см. *таблицу 1*), $\boldsymbol{E} \in GL(\mathbb{R};10)$ – единичная матрица, $\boldsymbol{A} = (a_j^i)_{10}^{10} \in GL(\mathbb{R};10)$ и $\vec{\boldsymbol{b}} = [b^1,\dots,b^{10}\rangle \in \vec{\mathbb{R}}^{10}$ – матрица и вектор, соответственно, которые с помощью *таблицы 1* определяются соотношениями:

$$a_j^i = F(s_i,\tau_j)\frac{b-a}{10}, \quad \vec{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}_* \text{ и } \vec{\boldsymbol{x}}_* = [1,1,\dots,1\rangle \in \vec{\mathbb{R}}^{10}.$$

Согласно СЛАУ (5), приближённая СЛАУ определяется только погрешностью $\vec{\Delta \boldsymbol{b}} = [\Delta b^1,\dots,\Delta b^{10}\rangle = 0,01 \cdot [b^1,-b^2,b^3,-b^4,b^5,-b^6,b^7,-b^8,b^9,-b^{10}\rangle \in \vec{\mathbb{R}}^{10}$ в правой части СЛАУ (5).

Требуется найти число обусловленности матрицы рассматриваемой СЛАУ и относительную погрешность в решении приближённой СЛАУ (5). Затем, прокомментировать получившиеся результаты. Коме того, найти решение СЛАУ, которая получается из СЛАУ (5) делением каждого её i-го уравнения ($i = \overline{1,10}$) на число $b^i + \Delta b^i$. После этого сравнить абсолютную погрешность в решении получившейся СЛАУ с абсолютной погрешностью в решении приближённой СЛАУ (5).►

Лабораторная работа №2 Метод наименьших квадратов и модели регрессии

Метод наименьших квадратов (МНК). Оценка параметров моделей линейной и полиномиальной регрессий

На практике часто встречается задача решения невырожденной «переопределённой» СЛАУ:

$$\boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} = {}^{>}\boldsymbol{b} \quad \Big(\sum_{j=1}^{n} a^i_j x^j = b^i,\ i=\overline{1,m}\Big), \tag{1}$$

где $m > n$, $\boldsymbol{A} = (a^i_j)^m_n \in L(\mathbb{R}; n, m)$ – матрица размера $m \times n$ (m строк, n столбцов) и ранга $rg(\boldsymbol{A}) = n$, ${}^{>}\boldsymbol{b} = [b^1,\dots,b^m\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^m$ – вектор-столбец правой части СЛАУ, являющийся вектором стандартного арифметического m-мерного евклидова пространства ${}^{>}\mathbb{E}^m$.

Поскольку СЛАУ (1) «переопределена» (число уравнений m больше числа переменных n), система (1), как правило, несовместна. Поэтому в качестве её МНК-решения выбирают вектор ${}^{>}\boldsymbol{u} = [u^1,\dots,u^n\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^n$, на котором достигается минимум функционала $F : {}^{>}\mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ вида:

$$F({}^{>}\boldsymbol{x}) = \left\|\boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} - {}^{>}\boldsymbol{b}\right\|^2_e = (\boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} - {}^{>}\boldsymbol{b})^T \cdot (\boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} - {}^{>}\boldsymbol{b}) = {}^{<}\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} - 2\,{}^{<}\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}^T\,{}^{>}\boldsymbol{b} + {}^{<}\boldsymbol{b}\cdot{}^{>}\boldsymbol{b}, \tag{2}$$

где ${}^{<}\boldsymbol{b} = \langle b^1,\dots,b^m] = ({}^{>}\boldsymbol{b})^T$ и ${}^{<}\boldsymbol{x} = \langle x^1,\dots,x^n] = ({}^{>}\boldsymbol{x})^T$ – векторы-строки, получающиеся транспонированием векторов-столбцов ${}^{>}\boldsymbol{b} = [b^1,\dots,b^m\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^m$ и ${}^{>}\boldsymbol{x} = [x^1,\dots,x^n\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^n$, соответственно.

Теорема 2.1 (об МНК-решении невырожденной СЛАУ). Если матрица $\boldsymbol{A}$ СЛАУ (1) является невырожденной, т.е. $rg(\boldsymbol{A}) = n$, то функционала $F : {}^{>}\mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$, определённый формулой (2), достигает своего минимума на единственном векторе ${}^{>}\boldsymbol{u} = argmin\{F({}^{>}\boldsymbol{x}) : {}^{>}\boldsymbol{x} \in {}^{>}\mathbb{E}^n\} \in {}^{>}\mathbb{E}^n$, который является решением *нормальной для СЛАУ (1) системой*:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\,{}^{>}\boldsymbol{b}\,.\blacktriangleright \tag{3}$$

Определение 2.1 (МНК-решения невырожденной СЛАУ). Если матрица $\boldsymbol{A}$ СЛАУ (1) является невырожденной, то вектор-решение нормальной для СЛАУ (1) системы (3) называется *МНК-решением СЛАУ* (1).►

Модель линейной регрессии

Модель линейной регрессии описывает зависимость регрессора $Y \in \mathbb{R}$ от значений некоторых k факторов $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{R}$. Согласно модели линейной регрессии, эта зависимость имеет вид:

$$Y = x_*^0 + z_1 x_*^1 + \dots + z_k x_*^k + \varepsilon, \tag{4}$$

где ${}^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1, \dots, x_*^k\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$ – неизвестный *вектор параметров тренда* $\breve{Y}$ *модели* (4), имеющего вид:

$$\breve{Y} = x_*^0 + z_1 x_*^1 + \dots + z_k x_*^k, \tag{5}$$

и $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0, \sigma)$ – *случайная составляющая модели* (4), являющаяся нормально распределённой случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и неизвестным среднеквадратичным отклонением σ.

Для оценки неизвестных вектора тренда ${}^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1, \dots, x_*^k\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$ и параметра σ случайной составляющей модели линейной регрессии (4) проводится эксперимент, в котором измеряются $m > k+1$ значений $y^1, \dots, y^m \in \mathbb{R}$ регрессора модели (4) для m различных наборов ${}^{<}\mathbf{z}^1 = \langle z_1^1, \dots, z_k^1], \dots, {}^{<}\mathbf{z}^m = \langle z_1^m, \dots, z_k^m] \in {}^{<}\mathbb{R}^k$ k факторов модели (4). После этого рассматривается СЛАУ:

$$\begin{cases} x^0 + z_1^1 \cdot x^1 + \dots + z_k^1 \cdot x^k = y^1 = \breve{y}^1 + \varepsilon^1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^0 + z_1^m x^1 + \dots + z_k^m x^k = y^m = \breve{y}^m + \varepsilon^m; \end{cases}, \tag{6}$$

где $\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^m$ – m независимых реализаций случайной величины $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0, \sigma)$ и $\breve{y}^i \in \mathbb{R}$ – значение неизвестного тренда модели для набора ${}^{<}\mathbf{z}^i = \langle z_1^i, \dots, z_k^i] \in {}^{<}\mathbb{R}^k$ k факторов модели (4) ($i = \overline{1, m}$). Введём обозначения:

$${}^{>}\boldsymbol{x} = [x^0, x^1, \dots, x^k\rangle = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^k \end{pmatrix} \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}, \quad {}^{>}\boldsymbol{y} = [y^1, \dots, y^m\rangle = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} \in {}^{>}\mathbb{E}^m, \tag{7'}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & z_1^1 & \cdots & z_k^1\\ 1 & z_1^2 & \cdots & z_k^2\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & z_1^m & \cdots & z_k^m\end{pmatrix}. \qquad (7”)$$

Согласно обозначениям (7), СЛАУ (6) запишется в виде:

$$\boldsymbol{A}{}^{>}\boldsymbol{x}={}^{>}\boldsymbol{y}, \qquad (8)$$

где $\boldsymbol{A}\in L(\mathbb{R};k+1,m)$ – матрица размера $m\times(k+1)$ (m строк, $k+1$ столбцов) и предполагается, что $m>k+1$ и $rg(\boldsymbol{A})=k+1$.

В качестве оценки неизвестного вектора ${}^{>}\boldsymbol{x}_*=[x_*^0,x_*^1,...,x_*^k\rangle\in{}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$ параметров модели линейной регрессии (4) выбирается вектор ${}^{>}\boldsymbol{u}=[u^0,u^1,...,u^k\rangle\in{}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$, являющийся МНК-решением СЛАУ (8), т.е. решение нормальной для СЛАУ (8) системы:

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}{}^{>}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^T{}^{>}\boldsymbol{y}. \qquad (9)$$

Кроме того, компонента $\breve{Y}^i$ ($i=\overline{1,m}$) вектора

$${}^{>}\breve{\boldsymbol{Y}}=[\breve{Y}^1,...,\breve{Y}^m\rangle=\begin{pmatrix}\breve{Y}^1\\ \vdots\\ \breve{Y}^m\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}{}^{>}\boldsymbol{u}\in{}^{>}\mathbb{E}^m \qquad (10)$$

представляет оценку значения тренда модели (4) на наборе ${}^{<}\mathbf{z}^i=\langle z_1^i,...,z_k^i]\in{}^{<}\mathbb{R}^k$ k факторов её факторов и величина $\hat{\sigma}^2$, для которой

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{m-k-1}\sum_{i=1}^{m}(y^i-\breve{Y}^i)^2, \qquad (11)$$

является несмещённой и состоятельной оценкой для дисперсии случайной составляющей $\varepsilon\sim\boldsymbol{N}(0,\sigma)$ этой модели.

Замечание 2.1. Подпрограмма «Регрессия», расположенная в разделе «Анализ данных» программы Excel, позволяет получить доверительные интервалы уровня значимости 5% для каждой компоненты вектора параметров тренда модели линейной регрессии (4), используя СЛАУ (8). Может возникнуть ситуация, когда некоторые компоненты этого вектора на заданном уровне значимости не отличаются от нуля. Тогда ту из этих компонент, которая наименее отличается от нуля, можно считать нулевой. В результате следует рассматривать новую редуцированную модель линейной регрессии, в которой регрессор зависит от меньшего количества факторов. Рекурсивно повторяя такое сокращение факторов модели, приходят к приведённой модели линейной регрессии, в которой регрессор зависит от минимального количества факторов.►

Модель полиномиальной регрессии

Модель полиномиальной регрессии описывает зависимость регрессора $Y \in \mathbb{R}$ от значений одного факторова $t \in \mathbb{R}$. Согласно модели полиномиальной регрессии, эта зависимость имеет вид:

$$Y = x_*^0 + t \cdot x_*^1 + \ldots + t^k \cdot x_*^k + \varepsilon\,, \qquad (12)$$

где ${}^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1, \ldots, x_*^k\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$ – неизвестный *вектор параметров тренда* $\breve{Y}$ *модели* (4), имеющего вид:

$$\breve{Y} = x_*^0 + t \cdot x_*^1 + \ldots + t^k \cdot x_*^k\,, \qquad (13)$$

и $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ – *случайная составляющая модели* (12), являющаяся нормально распределённой случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и неизвестным среднеквадратичным отклонением σ.

Для оценки неизвестных вектора тренда ${}^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1, \ldots, x_*^k\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$ и параметра σ случайной составляющей модели $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ линейной регрессии (12) проводится эксперимент, в котором измеряются $m > k+1$ значений $y^1, \ldots, y^m \in \mathbb{R}$ регрессора модели (12) для m попарно различных значений $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ единственного фактора модели (12). После этого рассматривается СЛАУ:

$$\begin{cases} x^0 + t_1^1 \cdot x^1 + \ldots + t_1^k \cdot x^k = y^1 = \breve{y}^1 + \varepsilon^1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^0 + t_m^1 \cdot x^1 + \ldots + t_m^k \cdot x^k = y^m = \breve{y}^m + \varepsilon^m; \end{cases}, \qquad (14)$$

где $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^m$ – m независимых реализаций случайной величины $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ и $\breve{y}^i \in \mathbb{R}$ – значение неизвестного тренда модели для значения $t_i \in \mathbb{R}$ фактора модели (12) ($i = \overline{1,m}$). Введём обозначения:

$$
{}^{>}\boldsymbol{x} = [x^0, x^1, \ldots, x^k\rangle = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^k \end{pmatrix} \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}, \ {}^{>}\boldsymbol{y} = [y^1, \ldots, y^m\rangle = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^m \end{pmatrix} \in {}^{>}\mathbb{E}^{m}, \tag{15'}
$$

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \cdots & t_1^k \\ 1 & t_2 & \cdots & t_2^k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & t_m & \cdots & t_m^k \end{pmatrix}. \tag{15''}
$$

Согласно обозначениям (15), СЛАУ (14) запишется в виде:

$$
\boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} = {}^{>}\boldsymbol{y}, \tag{16}
$$

где $\boldsymbol{A} \in L(\mathbb{R}; k+1, m)$ – матрица размера $m \times (k+1)$ (m строк, $k+1$ столбцов) и предполагается, что $m > k+1$. Поскольку значения $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ – попарно различны, $rg(\boldsymbol{A}) = k+1$ (в матрице $\boldsymbol{A}$ есть квадратная подматрица размера $(k+1)\times(k+1)$ с ненулевым определителем Ван-дер-Монда).

В качестве оценки неизвестного вектора ${}^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1, \ldots, x_*^k\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$ параметров модели линейной регрессии (12) выбирается вектор ${}^{>}\boldsymbol{u} = [u^0, u^1, \ldots, u^k\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$, являющийся МНК-решением СЛАУ (16), т.е. решение нормальной для СЛАУ (8) системы:

$$
\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^T\,{}^{>}\boldsymbol{y}. \tag{17}
$$

Кроме того, компонента $\breve{Y}^i$ ($i = \overline{1,m}$) вектора

$$
{}^{>}\breve{\boldsymbol{Y}} = [\breve{Y}^1, \ldots, \breve{Y}^m\rangle = \begin{pmatrix} \breve{Y}^1 \\ \vdots \\ \breve{Y}^m \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\,{}^{>}\boldsymbol{u} \in {}^{>}\mathbb{E}^m \tag{18}
$$

представляет оценку значения тренда модели (12) для значения $t_i \in \mathbb{R}$ единственного её фактора и величина $\hat{\sigma}^2$, для которой:

$$
\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m-k-1} \sum_{i=1}^{m} (y^i - \breve{Y}^i)^2, \tag{19}
$$

является несмещённой и состоятельной оценкой для дисперсии случайной составляющей $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0, \sigma)$ этой модели.

ЗАДАНИЕ 2.1

Дана модель линейной регрессии:

$$Y = x_*^0 + z_1 x_*^1 + z_2 x_*^2 + z_3 x_*^3 + z_4 x_*^4 + z_5 x_*^5 + z_6 x_*^6 + \varepsilon\,. \tag{20}$$

Для оценки неизвестных вектора тренда ${}^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1, \ldots, x_*^k\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$ и параметра σ случайной составляющей $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ модели линейной регрессии (20) проводился эксперимент, в котором получены $m = 20$ значений $y^1, \ldots, y^m \in \mathbb{R}$ (см. *Таблицы 2* и *3*) регрессора модели (20) для m различных наборов ${}^{<}\mathbf{z}^1 = \langle z_1^1, \ldots, z_6^1], \ldots, {}^{<}\mathbf{z}^m = \langle z_1^m, \ldots, z_6^m] \in {}^{<}\mathbb{R}^6$ (см. *Таблицу 4*) шести факторов модели (20).

Требуется получить оценки вектора тренда ${}^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1, \ldots, x_*^k\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^{k+1}$ и параметра σ случайной составляющей $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ модели линейной регрессии (20). Если возможно, редуцировать модель регрессии (20) до приведённой модели. Результаты расчётов проиллюстрировать графически, сопроводив их необходимыми комментариями.▶

Таблица 2 (N – номер фамилии студента в журнале)

i	N=1 *y*	N=2 *y*	N=3 *y*	N=4 *y*	N=5 *y*	N=6 *y*	N=7 *y*	N=8 *y*
1	16,00	16,54	15,76	15,41	14,89	14,11	13,76	14,65
2	12,82	13,23	12,45	10,59	15,43	14,65	12,79	15,06
3	14,49	12,36	14,02	12,23	13,84	15,49	13,70	13,37
4	13,64	14,24	15,76	14,86	13,78	15,30	14,40	15,90
5	14,20	13,28	12,38	15,17	12,23	11,33	14,12	10,41
6	13,46	15,02	12,21	13,93	15,50	12,70	14,42	14,25
7	15,11	15,97	16,28	15,72	13,97	14,28	13,73	15,14
8	9,82	11,22	11,78	11,82	9,58	10,14	10,18	11,54
9	10,63	9,87	10,71	10,40	9,977	10,81	10,51	10,05
10	10,71	12,74	11,34	12,47	11,75	10,34	11,47	12,38
11	12,34	13,63	10,92	13,12	15,22	12,51	14,71	13,80
12	12,3	13,66	13,37	10,75	13,55	13,26	10,64	14,62
13	13,94	14,38	14,32	15,85	12,73	12,67	14,21	13,11
14	13,02	12,95	10,29	12,47	15,32	12,67	14,85	12,60
15	13,23	13,68	11,94	11,88	14,09	12,35	12,29	12,80
16	10,74	9,79	10,93	10,87	9,63	10,78	10,71	9,82
17	14,07	13,28	12,36	14,85	15,00	14,09	16,57	13,30
18	12,55	13,09	13,29	11,01	14,41	14,60	12,32	15,14
19	12,97	15,41	14,36	13,77	13,62	12,57	11,98	15,01
20	12,85	13,02	12,20	11,73	13,09	12,27	11,80	12,44

Таблица 3 (N – номер фамилии студента в журнале)

i	N=9 y	N=10 y	N=11 y	N=12 y	N=13 y	N=14 y	N=15 y	N=16 y
1	14,30	13,52	14,78	14,00	13,65	14,54	14,19	13,41
2	13,20	12,42	13,40	12,62	10,76	13,04	11,18	10,40
3	11,58	13,23	13,84	15,50	13,71	13,38	11,58	13,24
4	15,00	16,51	13,60	15,11	14,21	15,71	14,81	16,33
5	13,20	12,30	13,23	12,33	15,12	11,41	14,20	13,30
6	15,97	13,16	14,88	12,07	13,79	13,62	15,34	12,54
7	14,59	14,90	15,39	15,70	15,15	16,56	16,01	16,32
8	11,58	12,14	9,56	10,12	10,17	11,52	11,57	12,12
9	9,74	10,58	10,37	11,21	10,90	10,45	10,14	10,98
10	13,50	12,10	11,95	10,55	11,67	12,58	13,71	12,30
11	16,00	13,29	14,13	11,43	13,63	12,72	14,92	12,21
12	12,00	11,71	13,83	13,54	10,92	14,90	12,28	11,99
13	14,65	14,59	12,51	12,45	13,98	12,89	14,42	14,36
14	14,77	12,12	14,9	12,25	14,43	12,18	14,35	11,70
15	12,74	11,00	15,31	13,57	13,52	14,03	13,97	12,23
16	9,766	10,90	10,67	11,81	11,75	10,87	10,80	11,94
17	15,78	14,87	12,52	11,60	14,09	10,82	13,30	12,38
18	12,86	13,06	14,18	14,38	12,10	14,92	12,64	12,83
19	14,42	13,38	13,02	11,98	11,39	14,42	13,83	12,78
20	11,96	11,15	15,16	14,34	13,87	14,51	14,04	13,22

Таблица 4

i	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6
1	1,158574	1,194067	1,745872	1,566271	1,825556	1,942503
2	1,238868	1,913419	1,182653	1,044649	1,304209	1,924039
3	1,564043	1,561357	1,070589	1,778954	1,226447	1,824122
4	1,737266	1,798975	1,952239	1,752281	1,247871	1,54796
5	1,364544	1,03122	1,380596	1,688101	1,987396	1,058504
6	1,535295	1,742973	1,580401	1,063356	1,999237	1,425459
7	1,780725	1,306711	1,972594	1,68627	1,582629	1,767235
8	1,135044	1,139164	1,686178	1,220069	1,034577	1,019745
9	1,246498	1,114597	1,079653	1,333415	1,054445	1,156743
10	1,416456	1,349223	1,68038	1,003235	1,471908	1,095523
11	1,611866	1,972991	1,443953	1,014008	1,91699	1,182531
12	1,520585	1,427992	1,464156	1,011505	1,108341	1,981536
13	1,229896	1,304392	1,852107	1,705496	1,725639	1,21482
14	1,726829	1,866756	1,074984	1,09888	1,983154	1,256935
15	1,77279	1,363353	1,227454	1,076754	1,656758	1,675253
16	1,418256	1,072481	1,123447	1,438917	1,059481	1,080325
17	1,119724	1,947356	1,372631	1,635578	1,94058	1,112827
18	1,728446	1,802332	1,365001	1,184759	1,119633	1,880032
19	1,161107	1,359294	1,956206	1,143406	1,49144	1,688437
20	1,963561	1,271859	1,250008	1,19367	1,466262	1,624409

ЗАДАНИЕ 2.2

Дана модель полиномиальной регрессии:

$$Y = x_*^0 + t \cdot x_*^1 + t^2 \cdot x_*^2 + t^3 \cdot x_*^3 + \varepsilon. \tag{21}$$

Для оценки неизвестных вектора тренда ${}^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1, x_*^2, x_*^3\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^4$ и параметра σ случайной составляющей $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ модели полиномиальной регрессии (21) проводился эксперимент, в котором получены $m = 20$ значений $y^1, \ldots, y^m \in \mathbb{R}$ (см. *Таблицы 5* и *6*) регрессора модели (21) для m попарно различных значений $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ (см. *Таблицу 7*) единственного фактора модели (21).

Требуется получить оценки вектора тренда ${}^{>}\boldsymbol{x}_* = [x_*^0, x_*^1, x_*^2, x_*^3\rangle \in {}^{>}\mathbb{E}^4$ и параметра σ случайной составляющей $\varepsilon \sim \boldsymbol{N}(0,\sigma)$ модели полиномиальной регрессии (21). Результаты расчётов проиллюстрировать графически, сопроводив их необходимыми комментариями.►

Таблица 5 (N – номер фамилии студента в журнале)

i	N=1 *y*	N=2 *y*	N=3 *y*	N=4 *y*	N=5 *y*	N=6 *y*	N=7 *y*	N=8 *y*
1	1,053	-0,95	-1,9	0,952	2,857	-2,86	3,81	-3,81
2	1,111	-0,91	-1,82	0,909	2,727	-2,73	3,636	-3,64
3	1,176	-0,87	-1,74	0,869	2,607	-2,61	3,477	-3,48
4	1,248	-0,83	-1,66	0,832	2,496	-2,5	3,328	-3,33
5	1,328	-0,8	-1,59	0,797	2,391	-2,39	3,188	-3,19
6	1,417	-0,76	-1,53	0,763	2,289	-2,29	3,052	-3,05
7	1,515	-0,73	-1,46	0,73	2,189	-2,19	2,919	-2,92
8	1,624	-0,7	-1,39	0,696	2,088	-2,09	2,784	-2,78
9	1,744	-0,66	-1,32	0,661	1,984	-1,98	2,646	-2,65
10	1,875	-0,63	-1,25	0,625	1,875	-1,88	2,5	-2,5
11	2,019	-0,59	-1,17	0,586	1,758	-1,76	2,345	-2,34
12	2,176	-0,54	-1,09	0,544	1,632	-1,63	2,176	-2,18
13	2,347	-0,5	-1	0,498	1,494	-1,49	1,992	-1,99
14	2,533	-0,45	-0,89	0,447	1,341	-1,34	1,788	-1,79
15	2,734	-0,39	-0,78	0,391	1,172	-1,17	1,563	-1,56
16	2,952	-0,33	-0,66	0,328	0,984	-0,98	1,312	-1,31
17	3,187	-0,26	-0,52	0,258	0,775	-0,78	1,034	-1,03
18	3,439	-0,18	-0,36	0,181	0,543	-0,54	0,724	-0,72
19	3,71	-0,1	-0,19	0,095	0,285	-0,29	0,381	-0,38
20	4	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 6 (N – номер фамилии студента в журнале)

i	N=9 *y*	N=10 *y*	N=11 *y*	N=12 *y*	N=13 *y*	N=14 *y*	N=15 *y*	N=16 *y*
1	4,76	-4,76	5,71	-5,71	6,67	-6,67	7,62	8,42
2	4,55	-4,55	5,45	-5,45	6,36	-6,36	7,27	8,89
3	4,35	-4,35	5,21	-5,21	6,08	-6,08	6,95	9,41
4	4,16	-4,16	4,99	-4,99	5,82	-5,82	6,66	9,98
5	3,98	-3,98	4,78	-4,78	5,58	-5,58	6,38	10,63
6	3,82	-3,82	4,58	-4,58	5,34	-5,34	6,10	11,34
7	3,65	-3,65	4,38	-4,38	5,11	-5,11	5,84	12,12
8	3,48	-3,48	4,18	-4,18	4,87	-4,87	5,57	12,99
9	3,31	-3,31	3,97	-3,97	4,63	-4,63	5,29	13,95
10	3,13	-3,13	3,75	-3,75	4,38	-4,38	5,00	15,00
11	2,93	-2,93	3,52	-3,52	4,10	-4,10	4,69	16,15
12	2,72	-2,72	3,26	-3,26	3,81	-3,81	4,35	17,41
13	2,49	-2,49	2,99	-2,99	3,49	-3,49	3,98	18,78
14	2,24	-2,24	2,68	-2,68	3,13	-3,13	3,58	20,26
15	1,95	-1,95	2,34	-2,34	2,73	-2,73	3,13	21,88
16	1,64	-1,64	1,97	-1,97	2,30	-2,30	2,62	23,62
17	1,29	-1,29	1,55	-1,55	1,81	-1,81	2,07	25,49
18	0,91	-0,91	1,09	-1,09	1,27	-1,27	1,45	27,51
19	0,48	-0,48	0,57	-0,57	0,67	-0,67	0,76	29,68
20	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	32,00

Таблица 7

i	*t*
1	0,05
2	0,1
3	0,15
4	0,2
5	0,25
6	0,3
7	0,35
8	0,4
9	0,45
10	0,5
11	0,55
12	0,6
13	0,65
14	0,7
15	0,75
16	0,8
17	0,85
18	0,9
19	0,95
20	1

Лабораторная работа №3 Методы простой итерации и Зейделя

Методы простой итерации и Зейделя для решения СЛАУ.

Теорема 3.1. Пусть ${}^{>}\boldsymbol{g} \in {}^{>}\mathbb{R}^{n}$ – вектор-стобец высоты n, $\boldsymbol{F} \in L(\mathbb{R};n)$ – квадратная матрица размера $n \times n$, чебышевская норма $\|\boldsymbol{F}\| = \max\{\sum_{j=1}^{n}\left|f_j^i\right| : i = \overline{1,n}\}$ которой удовлетворяет условию: $\|\boldsymbol{F}\| < 1$. Тогда СЛАУ:

$$ {}^{>}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot {}^{>}\boldsymbol{x} + {}^{>}\boldsymbol{g} \; - \qquad (1) $$

совместна и имеет единственное решение ${}^{>}\boldsymbol{x}_{*} \in {}^{>}\mathbb{R}^{n}$.►

<u>Метод простой итерации</u>

Для решения СЛАУ (1) используется метод простой итерации, в котором:

1) выбирается произвольный вектор ${}^{>}\boldsymbol{x}_{0} \in {}^{>}\mathbb{R}^{n}$ (начальный вектор итераций);

2) если вектор ${}^{>}\boldsymbol{x}_{(k)} \in {}^{>}\mathbb{R}^{n}$, где $k \in \mathbb{Z}_{+} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 0\}$, – уже задан, то вычисляется вектор ${}^{>}\boldsymbol{x}_{(k+1)} \in {}^{>}\mathbb{R}^{n}$, для которого

$$ {}^{>}\boldsymbol{x}_{(k+1)} = \boldsymbol{F} \cdot {}^{>}\boldsymbol{x}_{(k)} + {}^{>}\boldsymbol{g}\,; \qquad (2) $$

3) при достаточно большом $k \in \mathbb{N}$ вектор ${}^{>}\boldsymbol{x}_{(k)} \in {}^{>}\mathbb{R}^{n}$ считается приближённым решением СЛАУ (1).

Определение 3.1 (рабочей формулы метода простой итерации и его последовательности). Формула (2) называется *рабочей формулой метода простой итерации для решения СЛАУ* (1) и последовательность ${}^{>}\boldsymbol{x}_{(\bullet)} = ({}^{>}\boldsymbol{x}_{(k+1)})_{\mathbb{N}}$, индуцированная рабочей формулой (2) из фиксированного вектора ${}^{>}\boldsymbol{x}_{(0)} \in {}^{>}\mathbb{R}^{n}$, - *последовательностью* приближённых решений СЛАУ (1) *метода простой итерации*, для которого, в этом случае, используется обозначение: $\mathrm{Itr}_1(\boldsymbol{F}, {}^{>}\boldsymbol{g}; {}^{>}\boldsymbol{x}_{(0)})$.►

Теорема 3.2 (об оценке погрешности метода простой итерации). Пусть ${}^{>}\boldsymbol{x}_{(\bullet)} = {}^{>}\boldsymbol{x}_{(k)}\,{}_{\mathbb{N}}$ – последовательность приближённых решений метода простой итерации $\mathrm{Itr}_1(\boldsymbol{F}, {}^{>}\boldsymbol{g}; {}^{>}\boldsymbol{x}_{(0)})$ для СЛАУ (1). Тогда, если $\|\boldsymbol{F}\| < 1$, эта последовательность ${}^{>}\boldsymbol{x}_{(\bullet)}$ сходится к решению

${}^{>}\boldsymbol{x}_* = \left(\boldsymbol{E} + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \boldsymbol{F}^k \right) \cdot {}^{>}\boldsymbol{g} = \ \boldsymbol{E} - \boldsymbol{F} \ ^{-1} \cdot {}^{>}\boldsymbol{g}$ СЛАУ (1). Кроме того, в этом случае при любом $k \in \mathbb{N}$ справедливы оценки:

$$\left\| {}^{>}\boldsymbol{x}_{(k)} - {}^{>}x_* \right\| \le \frac{\|\boldsymbol{F}\|^k}{1 - \|\boldsymbol{F}\|} \cdot \left\| {}^{>}\boldsymbol{g} \right\| + \|\boldsymbol{F}\|^k \cdot \left\| {}^{>}\boldsymbol{x}_{(0)} \right\| \tag{3}$$

и

$$\left\| {}^{>}\boldsymbol{x}_{(k+1)} - {}^{>}\boldsymbol{x}_* \right\| \le \left\| {}^{>}\boldsymbol{x}_{(k)} - {}^{>}\boldsymbol{x}_* \right\| \cdot \|\boldsymbol{F}\|, \tag{4}$$

где $\left\| {}^{>}\boldsymbol{x} \right\| = \max\{|x^1|, ..., |x^n|\}$ – чебышевская норма вектора ${}^{>}\boldsymbol{x} = [x^1, ..., x^n\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^n$, которой подчинена норма алгебры $L \ \mathbb{R}; n \ $.►

Замечание 3.1 (о СЛАУ с диагональным преобладанием). Для любой матрицы $\boldsymbol{A} = (a^i_j)^n_n \in GL(\mathbb{R}; n)$ существует такая диагональная матрица $\boldsymbol{D} \in GL(\mathbb{R}; n)$, что $\|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A}\| < 1$. Поэтому любая СЛАУ вида:

$$\boldsymbol{A} \cdot {}^{>}\boldsymbol{x} = {}^{>}\boldsymbol{b} \quad (\ \boldsymbol{A} = (a^i_j)^n_n \in GL(\mathbb{R}; n) \text{ и } {}^{>}\boldsymbol{b} \in {}^{>}\mathbb{R}^n \ ) - \tag{5}$$

может быть сведена к равносильной СЛАУ вида:

$${}^{>}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot {}^{>}\boldsymbol{x} + {}^{>}\boldsymbol{g},$$

где $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{A}$, $\|\boldsymbol{F}\| < 1$ и ${}^{>}\boldsymbol{g} = \boldsymbol{D} \cdot {}^{>}\boldsymbol{b}$, для решения которой можно уже использовать метод простой итерации. В частности, если в СЛАУ (5) матрица $\boldsymbol{A}$ имеет *диагональное преобладание*, т.е. $|a^i_i| > |a^i_1| + \ldots + |a^i_{i-1}| + |a^i_{i+1}| + \ldots + |a^i_n|, \ i = \overline{1, n},$ то указанную выше диагональную матрицу $\boldsymbol{D}$ можно выбрать в виде:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}, \text{ где } \alpha_i = \frac{1}{a^i_i} \text{ для } i = \overline{1, n}.►$$

Теорема 3.3 (об устойчивости метода простой итерации). Пусть ${}^{>}\boldsymbol{x}_{(\bullet)} = ({}^{>}\boldsymbol{x}_{(k)})_{\mathbb{N}}$ – последовательность приближённых решений метода простой итерации $\mathrm{Itr}_1(\boldsymbol{F}, {}^{>}\boldsymbol{g}; {}^{>}\boldsymbol{x}_{(0)})$ решения СЛАУ (1), где $\|\boldsymbol{F}\| < 1$, ${}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(0)} \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ и последовательность $({}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)})_{\mathbb{N}} \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ такова, что $\left\| {}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)} \right\| \le \left\| {}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(0)} \right\| = \varepsilon > 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда, положив ${}^{>}\underline{\boldsymbol{x}}_{(0)} = {}^{>}\boldsymbol{x}_{(0)} + {}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(0)}$ и ${}^{>}\underline{\boldsymbol{x}}_{(k)} = \boldsymbol{F} \cdot {}^{>}\underline{\boldsymbol{x}}_{(k-1)} + {}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)}$, для любого $k \in \mathbb{N}$ получим:

$$\left\| {}^{>}\underline{x}_{(k)} - {}^{>}x_{(k)} \right\| = \left\| \boldsymbol{F}^k \cdot {}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(0)} + \ldots + \boldsymbol{F} \cdot {}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(k-1)} + {}^{>}\boldsymbol{\varepsilon}_{(k)} \right\| \le \ 1 + \|\boldsymbol{F}\| + \ldots + \|\boldsymbol{F}\|^k \ \cdot \varepsilon \le \frac{1}{1 - \|\boldsymbol{F}\|} \cdot \varepsilon .$$

Таким образом, метод простой итерации $\mathrm{Itr}_1(\boldsymbol{F}, {}^{>}\boldsymbol{g}; {}^{>}\boldsymbol{x}_{(0)})$ решения СЛАУ (1) устойчив к вычислительным погрешностям.►

<u>Метод Зейделя</u>

Метод Зейделя для решения СЛАУ (1) является модификацией метода простой итерации и, как правило, он сходится быстрее метода простой итерации.

Пусть ${}^{>}\boldsymbol{y}_{(0)} \in {}^{>}\mathbb{R}^n$ – фиксированный вектор. Тогда для получения последовательности ${}^{>}\boldsymbol{y}_{(\bullet)} = ({}^{>}\boldsymbol{y}_{(k)})_{\mathbb{N}}$ приближённых решений СЛАУ (1) метод Зейделя предлагает следующую рабочую формулу:

$$ {}^{>}\boldsymbol{y}_{(k)} = \boldsymbol{P} \cdot {}^{>}\boldsymbol{y}_{(k-1)} + \boldsymbol{Q} \cdot {}^{>}\boldsymbol{y}_{(k)} + {}^{>}\boldsymbol{g}, \; k \in \mathbb{N}, \tag{6} $$

где

$$ \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{D}, \; \boldsymbol{P} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{Q}, \; \boldsymbol{F} = (f_j^i)_n^n, \; \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} f_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ f_1^2 & f_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ f_1^n & f_2^n & \cdots & f_n^n \end{pmatrix} \text{ и } \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} f_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f_n^n \end{pmatrix}. \tag{7} $$

При фиксированном $k \in \mathbb{N}$ из (6) и (7) получаем:

$$ \begin{cases} y_{(k)}^1 = f_1^1 \cdot y_{(k-1)}^1 + f_2^1 \cdot y_{(k-1)}^2 + f_3^1 \cdot y_{(k-1)}^3 + \ldots + f_{n-1}^1 \cdot y_{(k-1)}^{n-1} + f_n^1 \cdot y_{(k-1)}^n + g^1; \\ y_{(k)}^2 = f_1^2 \cdot y_{(k)}^1 + f_2^2 \cdot y_{(k-1)}^2 + f_3^2 \cdot y_{(k-1)}^3 + \ldots + f_{n-1}^2 \cdot y_{(k-1)}^{n-1} + f_n^2 \cdot y_{(k-1)}^n + g^2; \\ y_{(k)}^3 = f_1^3 \cdot y_{(k)}^1 + f_2^3 \cdot y_{(k)}^2 + f_3^3 \cdot y_{(k-1)}^3 + \ldots + f_{n-1}^3 \cdot y_{(k-1)}^{n-1} + f_n^3 \cdot y_{(k-1)}^n + g^3; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{(k)}^n = f_1^n \cdot y_{(k)}^1 + f_2^n \cdot y_{(k)}^2 + f_3^n \cdot y_{(k)}^3 + \ldots + f_{n-1}^n \cdot y_{(k)}^{n-1} + f_n^n \cdot y_{(k-1)}^n + g^n; \end{cases}, \tag{8} $$

где ${}^{>}\boldsymbol{y}_{(k)} = \left[y_{(k)}^1, \ldots, y_{(k)}^n \right\rangle, {}^{>}\boldsymbol{y}_{(k-1)} = \left[y_{(k-1)}^1, \ldots, y_{(k-1)}^n \right\rangle, {}^{>}\boldsymbol{g} = \left[g^1, \ldots, g^n \right\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^n$.

Таким образом, при любом $k \in \mathbb{N}$ каждая последующая компонента вектора ${}^{>}\boldsymbol{y}_{(k)}$ в рабочей формуле (8) метода Зейделя вычисляется с учётом уже найденных в этой формуле предыдущих компонент вектора ${}^{>}\boldsymbol{y}_{(k)}$. Поэтому, если для СЛАУ (1) методы простой итерации и Зейделя сходятся к решению СЛАУ (1), то метод Зейделя предпочтительнее, т.к. он сходится «быстрее».

Теорема 3.4 (о признаке сходимости метода Зейделя). Пусть для матрицы $\boldsymbol{F}$ СЛАУ (1) выполняется условие: $\|\boldsymbol{F}\| < 1$. Тогда метод Зейделя сходится к решению СЛАУ (1).►

ЗАДАНИЕ 3.1

Используя метод простой итерации с нулевым начальным вектором, найти приближённое решение СЛАУ: $\boldsymbol{A}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$, с матрицей, имеющей диагональное преобладание. Абсолютная погрешность приближённого решения не должна превышать величины 0,1. Предполагается, что все компоненты решения заданной СЛАУ равны единице. Матрица $\boldsymbol{A}$ этой СЛАУ приведена ниже в зависимости от варианта задания (см. *Таблицы 8а,б*). Кроме того, используя неравенство (3), найти в методе простой итерации число шагов, необходимое для того чтобы гарантировать абсолютную погрешность приближённого решения не более 0,1. Сравнить это расчётное количество шагов с реальным количеством шагов, обеспечившим заданную погрешность.►

Таблица 8а (N – номер фамилии студента в журнале)

N	$\boldsymbol{A}$	*N*	$\boldsymbol{A}$
1	$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$	**5**	$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 10 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$	**6**	$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 10 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$	**7**	$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 10 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$	**8**	$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

Таблица 8б (N – номер фамилии студента в журнале)

N	$\boldsymbol{A}$	*N*	$\boldsymbol{A}$

9	$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 10 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$	**13**	$\begin{pmatrix} 10 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 10 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 10 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$	**14**	$\begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 10 \end{pmatrix}$	**15**	$\begin{pmatrix} 10 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$	**16**	$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 10 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$

ЗАДАНИЕ 3.2

Используя метод Зейделя с нулевым начальным вектором, найти приближённое решение СЛАУ: $\boldsymbol{A}\cdot\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$, с матрицей, имеющей диагональное преобладание. Абсолютная погрешность приближённого решения не должна превышать величины 0,1. Предполагается, что все компоненты решения заданной СЛАУ равны единице. Матрица $\boldsymbol{A}$ этой СЛАУ приведена в *Таблицах 8а,б*. Сравнить в методах простой итерации и Зейделя количество шагов для достижения абсолютной погрешности, не превышающей величины 0,1.►

Лабораторная работа № 4 Интерполяция Лагранжа

Вычисление интерполяционного полинома Лагранжа

Определение 4.1 (интерполяционного полинома Лагранжа и сеточного полинома). Пусть на отрезке $[a;b]$ задана сетка $A=\langle \tau_0,\tau_1,...,\tau_k\rangle$, где $\tau_0,\tau_1,...,\tau_k\in[a;b]$ – её узлы, т.е $a\le\tau_0<\tau_1<...<\tau_k\le b$. Кроме того, зафиксирована A-сеточная функция $f_A:A\to\mathbb{R}$, обозначаемая далее вектором ${}^{>}\boldsymbol{y}=[y_0,y_1,...,y_k\rangle\in{}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$, где $y_0=f_A(\tau_0),y_1=f_A(\tau_1),...,y_k=f_A(\tau_k)$ и ${}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$ – нормированное пространство A-сеточных функций с чебышеской нормой $\|\bullet\|$, для которой $\|{}^{>}\boldsymbol{y}\|=\max\{|y_0|,|y_1|,...,|y_k|\}$).

Полином $L_k\ \tau$, определённый на отрезке $a;b$, для которого выполняются равенства: $L_k(\tau_0)=y_0=f_A(\tau_0),L_k(\tau_1)=y_1=f_A(\tau_1),...,L_k(\tau_k)=y_k=f_A(\tau_k)$, – называется *интерполяционным полиномом Лагранжа для A-сеточной функции ${}^{>}\boldsymbol{y}\in{}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$*.

Полином $\Pi_A(\tau)=(\tau-\tau_0)\cdot(\tau-\tau_1)\cdot...\cdot(\tau-\tau_k)$, определённый на отрезке $a;b$, называется *A-сеточным полиномом*.▶

Теорема 4.1 (об аналитическом виде интерполяционного полинома Лагранжа). Интерполяционный полином Лагранжа $L_k(\tau)=L_A^{{}^{>}y}(\tau)$ для A-сеточной функции ${}^{>}\boldsymbol{y}\in{}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$ – единственен и имеет аналитический вид:

$$L_k(\tau)=\sum_{i=0}^{k}\frac{(\tau-\tau_0)\cdot...\cdot(\tau-\tau_{i-1})\cdot(\tau-\tau_{i-1})\cdot...\cdot(\tau-\tau_k)}{(\tau_i-\tau_0)\cdot...\cdot(\tau_i-\tau_{i-1})\cdot(\tau_i-\tau_{i-1})\cdot...\cdot(\tau_i-\tau_k)}y_i\,.\blacktriangleright$$

Определение 4.2 (сеточного отображения и остатка интерполяции Лагранжа). Сетка $A=\langle\tau_0,\tau_1,...,\tau_k\rangle$ отрезка $[a;b]$ определяет *A-сеточное отображение* $\hat{A}:C([a;b],\mathbb{R})\to{}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$, для которого $\hat{A}(f)=[f(\tau_0),f(\tau_1),...,f(\tau_k)\rangle\in{}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$, если $f\in C([a;b],\mathbb{R})$. Кроме того, функция $Rest_A(\tau)=f(\tau)-L_k(\tau)$, где $L_k(\tau)$ – интерполяционным полиномом Лагранжа для A-сеточной функции $\hat{A}(f)\in{}^{>}\underline{\mathbb{R}}^{k+1}(A)$, называется *остатком* A*-интерполяции Лагранжа для функции* $f \in C([a;b],\mathbb{R})$ на отрезке $[a;b]$.►

Теорема 4.2 (об остатке интерполяции Лагранжа в форме Коши). Если $f \in \underline{C}^{k+1}([a;b],\mathbb{R})$, то в обозначениях *определения 4.2* для любой точки $\tau_* \in [a;b]$ остаток A-интерполяции Лагранжа $Rest_A(\tau) = f(\tau) - L_k(\tau)$ представим *в форме Коши*:

$$Rest_A(\tau_*) = f^{(k+1)}(\xi(\tau_*)) \cdot \frac{\Pi_A(\tau_*)}{(k+1)!},$$

где $\xi(\tau_*) \in (a;b)$ – некоторая точка, зависящая от точки $\tau_* \in \; a;b$. Поэтому для чебышевской нормы $\|Rest_A\|$ в пространстве $\underline{C}^{k+1}([a;b],\mathbb{R})$ справедливо неравенство:

$$\|Rest_A\| \le \frac{\|f^{(k+1)}\|}{k+1\ !} \cdot \|\Pi_A\| . \blacktriangleright \qquad (1)$$

Определение 4.3 (уклонения функции от нуля). Если $h \in C([a;b],\mathbb{R})$, то значение чебышевской нормы $\|h\| = \max\{|h(\tau)| : \tau \in [a;b]\}$ называется *уклонением функции* h *от нуля на отрезке* $[a;b]$.►

Замечание 4.1 (об остатке интерполяции Лагранжа). Согласно форме Коши (1) остатка интерполяции Лагранжа абсолютная погрешность такой интерполяции для произвольной $(k+1)$-гладкой на отрезке $[a;b]$ функции лимитируется только абсолютной погрешностью сеточного полинома Π_A. Поэтому естественно возникает проблема оптимального расположения узлов сетки $A = \langle \tau_0, \tau_1, ..., \tau_k \rangle$, которое обеспечивало бы минимальное уклонение от нуля на отрезке $[a;b]$ A-сеточного полинома Π_A.►

Теорема 4.3 (об оптимальном выборе схемы сеток для задачи интерполяции Лагранжа). Для задачи интерполяции Лагранжа на сетке $A = \langle \tau_0, \tau_1, ..., \tau_k \rangle \subset [a;b]$ в классе всех гладких на отрезке $[a;b]$ функций минимальное уклонение от нуля сеточного полинома Π_A будет минимальным, если использовать чебышевскую схему сеток:

$$A = \left\langle \tau_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos\frac{(2j+1)\pi}{2(k+1)} : j = \overline{1,k} \right\rangle.$$

Если $f \in \underline{C}^{k+1}([a;b],\mathbb{R})$, то для остатка $Rest_A(\tau) = f(\tau) - L_k(\tau)$ такой интерполяции Лагранжа функции справедлива оценка:

$$\|Rest_A\| \leq \|f^{(k+1)}\| \cdot \frac{1}{(k+1)!2^k}.$$ ►

ЗАДАНИЕ 4.1

Для заданной на отрезке $[-1;1]$ гладкой функции $f = \dfrac{a+b}{b+ax^2}$ (см. *Таблицу 9*), используя равномерную сетку с 21 узлом, вычислить интерполяционный полином Лагранжа. Используя равномерную сетку с 41 узлом, представить графики функции f и вычисленного (с 21 равномерными узлами) интерполяционного полинома Лагранжа. Прокомментировать результаты интерполяции.►

Таблица 9 (N – номер фамилии студента в журнале)

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
a	5	11	17	13	27	31	39	47	50	53	59	67	71	73	87	99
b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

ЗАДАНИЕ 4.2

Для заданной на отрезке $[-1;1]$ гладкой функции $f = \dfrac{a+b}{b+ax^2}$ (см. *Таблицу 9*), используя чебышевскую сетку с 21 узлом, вычислить интерполяционный полином Лагранжа. Используя равномерную сетку с 41 узлом, представить графики функции f и вычисленного (с 21 чебышевскими узлами) интерполяционного полинома Лагранжа. Прокомментировать результаты интерполяций с равномерными и чебышевскими узлами.►

Лабораторная работа № 5 Квадратурные формулы для вычисления интегралов

Вычисление интегралов Римана с помощью квадратурных формул

Пусть $f \in \underline{C}^m([a;b],\mathbb{R})$ – достаточно гладкая на отрезке $[a;b]$ функция и $A = \langle \tau_0, \tau_1, ..., \tau_k \rangle$ – равномерная сетка отрезка $[a;b]$. Ниже, для задачи приближённого вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(\tau)d\tau$ приведены различные квадратурные формулы, использующие равномерную сетку $A = \langle \tau_0, \tau_1, ..., \tau_k \rangle$ с шагом $h = \dfrac{b-a}{k}$.

<u>Квадратурная формула прямоугольников</u>

$$\int\limits_a^b f(\tau)d\tau = h \cdot (f(\theta_1) + ... + f(\theta_k)) + O(h) \text{ } \textit{при } h \to 0,$$

где $\left\langle \theta_1 = \dfrac{\tau_0 + \tau_1}{2}, ..., \theta_k = \dfrac{\tau_{k-1} + \tau_k}{2} \right\rangle$ – центрально-равномерная сетка отрезка $a;b$.

<u>Квадратурная формула трапеций</u>

$$\int\limits_a^b f(\tau)d\tau = h \cdot (\frac{1}{2} f(\tau_0) + f(\tau_1) + ... + f(\tau_{k-1}) + \frac{1}{2} f(\tau_k)) + O(h^2) \text{ } \textit{при } h \to 0.$$

<u>Квадратурная формула парабол (Симпсона)</u>

Если число k – чётное, то

$$\int\limits_a^b f(\tau)d\tau = \frac{h}{3} \cdot (f(\tau_0) + 4f(\tau_1) + 2f(\tau_2) + 4f(\tau_3) + ... + 2f(\tau_{k-1}) + 4f(\tau_{k-1}) + f(\tau_k)) + O(h^4) \text{ } \textit{при } h \to 0.$$

<u>ЗАДАНИЕ 5</u>

Для заданной на отрезке $[0;2]$ гладкой функции $f(x) = \dfrac{ax^4 + bx^2 + c}{(x+1)(x^2+1)}$ (см. *Таблицу10*) и равномерной сетки с 21 узлом, используя квадратурные формулы прямоугольников, трапеций и парабол, приближённо вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(\tau)d\tau$. Прокомментировать результаты интерполяции.►

Таблица 10 (N – номер фамилии студента в журнале)

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
a	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5
b	1	3	4	2	5	6	7	8	2	1	5	3	1	4	5	6
c	5	1	3	7	2	1	3	1	5	8	3	5	3	2	3	1

Лабораторная работа № 6 Разностные операторы

Вычисление дифференциальных операторов с помощью разностных формул

Пусть $f \in \underline{C}^m([a;b],\mathbb{R})$ – достаточно гладкая на отрезке $[a;b]$ функция и $A = \langle \tau_0, \tau_1, ..., \tau_k \rangle$ – равномерная сетка отрезка $[a;b]$. Ниже, для задачи приближённого вычисления производных функции f приведены различные разностные формулы, использующие равномерную сетку $A = \langle \tau_0, \tau_1, ..., \tau_k \rangle$ с шагом $h = \dfrac{b-a}{k}$.

Разностные производные первого порядка

$\dfrac{df(\tau)}{d\tau} = \dfrac{f(\tau+h)-f(\tau)}{h} + O(h)$ *при* $h \to 0$ – правая разностная производная.

$\dfrac{df(\tau)}{d\tau} = \dfrac{f(\tau-h)-f(\tau)}{(-h)} + O(h)$ *при* $h \to 0$ – левая разностная производная.

$\dfrac{df(\tau)}{d\tau} = \dfrac{f(\tau+h)-f(\tau-h)}{2h} + O(h^2)$ *при* $h \to 0$ – центральная разностная производная.

Центральная разностная производная второго порядка

$$\frac{df(\tau)}{d\tau} = \frac{f(\tau+h)-2f(\tau)+f(\tau-h)}{h^2} + O(h^2) \text{ при } h \to 0.$$

ЗАДАНИЕ 6.1

Для заданной на отрезке $[0;2]$ гладкой функции $f(x) = \dfrac{ax^4+bx^2+c}{(x+1)(x^2+1)}$ (см. *Таблицу10*) и равномерной сетки с 11-ю узлами, используя разностные формулы, приближённо вычислить на отрезке $[0;2]$ значение дифференциального оператора $3\frac{d^2 f(\tau)}{d\tau^2}-2\frac{df(\tau)}{d\tau}+f(\tau)$. График этого значения представить в виде соответствующей ломаной линии, сравнив её с графиком истинного значения на отрезке $[0;2]$ данного дифференциального оператора. Прокомментировать получившиеся результаты.►

ЗАДАНИЕ 6.2

Для заданной сетки $A=\langle \tau-\alpha\cdot h, h, \tau+\beta\cdot h\rangle$ (значения α и β даны в. *Таблице11*) найти разностные формулы для первых и вторых производных гладкой функции в узлах этой сетки, указав порядок аппроксимации для этих формул при $h\to 0$.►

Таблица 11 (N – номер фамилии студента в журнале)

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
α	2	1	2	3	3	1	1	3	4	4	1	4	2	5	5	1
β	1	2	3	2	1	3	1	4	3	1	4	3	5	2	1	5

Лабораторная работа № 7 Краевая задача для ОДУ

Численное решение краевой задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка

Замечание 7.1 (об используемых нормах). Далее для векторов и матриц используются только чебышевские нормы.▶

Рассмотрим СЛАУ:

$$\boldsymbol{F} \cdot {}^{>}\varphi = {}^{>}\boldsymbol{v} = [v_0, v_1, ..., v_k\rangle \tag{1}$$

где ${}^{>}\boldsymbol{v} \in {}^{>}\mathbb{R}^{k+1}$, матрица $\boldsymbol{F} \in GL(\mathbb{R}; k+1)$ имеет диагональное преобладание и представлена в виде:

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} b_0 & c_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_k & b_k \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где

$$a_0 = c_k = 0 \text{ и } |b_j| - |a_j| - |c_j| \geq \gamma > 0 \text{ для } j = \overline{0, k}. \tag{3}$$

Теорема 7.1 (о норме обратной матрицы). Для матрицы $\boldsymbol{F} \in GL(\mathbb{R}; k+1)$ вида (2), удовлетворяющей неравенствам (3), следует, что $\left\|\boldsymbol{F}^{-1}\right\| \leq \dfrac{1}{\gamma}$.▶

Рассмотрим следующую краевую задачу решения обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2} + p(\tau)\dfrac{d\varphi(\tau)}{d\tau} - q(\tau)\varphi(\tau) = v(\tau), \qquad \tau \in (a; b); \\ \varphi(a) = \beta_0 \text{ и } \varphi(b) = \beta_1 \text{ (краевые условия),} \end{cases} \tag{4}$$

где $p, q, v \in C^2([a;b], \mathbb{R})$ - непрерывные на отрезке $[a;b]$ функции, $q > 0$ на отрезке $[a;b]$, $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$ - заданные числа и φ - неизвестная функция. Кроме того, предполагается, что уравнение (4) имеет единственное решение.

Для построения конечной разностной схемы задачи (4) зададим на отрезке $[a;b]$ равномерную сетку $A=\langle a=\tau_0,\tau_1,...,\tau_k=b\rangle$ шага $h=\dfrac{b-a}{k}$.

Тогда задача (4) индуцирует следующую конечную разностную схему:

$$\begin{cases} \varphi_0=\beta_0=v_0; \\ \dfrac{\varphi_{j+1}-2\varphi_j+\varphi_{j-1}}{h^2}+p_j\cdot\dfrac{\varphi_{j+1}-\varphi_{j-1}}{2h}-q_j\cdot\varphi_j=v_j+O(h^2), \quad j=\overline{1,k-1}; \\ \varphi_k=\beta_1=v_k; \end{cases} \tag{5}$$

где при любом $\tau_i\in A=\langle\tau_0,\tau_1,...,\tau_k\rangle$ для функций φ,p,q и v задачи (4) приняты обозначения: $\varphi_i=\varphi(\tau_i),p_i=p(\tau_i),q_i=q(\tau_i)$ и $v_i=v(\tau_i)$.

Из схемы (5) следует, что она аппроксимирует уравнение-задачу (4) с порядком аппроксимации $\alpha=2$.

Схему (5) можно представить в виде СЛАУ:

$$\begin{cases} \varphi_0=v_0; \\ (\dfrac{1}{h^2}-\dfrac{p_j}{2h})\varphi_{j-1}+(-\dfrac{2}{h^2}-q_j)\varphi_j+(\dfrac{1}{h^2}+\dfrac{p_j}{2h})\varphi_{j-1}=v_j, \quad j=\overline{1,k-1};, \\ \varphi_k=v_k; \end{cases} \tag{6}$$

матрица которая при достаточно малом шаге $h=\dfrac{b-a}{k}$ сетки $A=\langle a=\tau_0,\tau_1,...,\tau_k=b\rangle$ удовлетворяет всем условиям *теоремы 7.1*, если в неравенствах (3) положить: $\gamma=\min\{1,\inf\{q(\tau):\tau\in(a;b)\}\}$ ($\gamma>0$, поскольку $q>0$ на отрезке $[a;b]$) и учитывать, что при достаточно малом шаге h выполняются неравенства: $\left|\dfrac{p_j}{2}\right|\cdot h<1$ для $j=\overline{0,k}$, поскольку функция p непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Таким образом, схема (6) аппроксимирует уравнение (4) и устойчива. Поэтому схема (6) будет корректно сходящейся при $h\to 0$, что позволяет получить сходящуюся к решению задачи (4) последовательность приближённых решений задачи.

Замечание 7.2 (о методе прогонки). При численном решении задачи (4) для выбранного достаточно малого шага h конечно-разностную схему из схему (6) заменяют на равносильную СЛАУ вида:

$$\begin{cases} \varphi_0 = \beta_0 \\ (1 - \frac{p_j}{2} h)\varphi_{j-1} + (-2 - q_j h^2)\varphi_j + (1 + \frac{p_j}{2} h)\varphi_{j+1} = h^2 \nu_j, \quad j = \overline{1, k-1}; \\ \varphi_k = \beta_1 \end{cases} \tag{7}$$

СЛАУ (7) с трехдиагональной матрицей вида (2), имеющей диагональное преобладание, решают методом «прогонки». Метод «прогонки» позволяет значительно сократить погрешность и количество арифметических операций при решении СЛАУ с трёхдиагональной матрицей, уменьшив тем самым время работы программы по поиску приближенного решения задачи (4).►

ЗАДАНИЕ 7

Используя равномерную сетку шага $h = 0{,}1$ отрезка $[0;1]$, составить конечную разностную схему для решения краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\varphi(\tau)}{d\tau^2} + \ a\tau + b \ \dfrac{d\varphi(\tau)}{d\tau} - a\varphi(\tau) = b \cdot c, \qquad \tau \in (0;1); \\ \varphi(0) = b \cdot c \text{ и } \varphi(1) = b \cdot c \text{ (краевые условия),} \end{cases} \tag{8}$$

где параметры $a, b, c \in \mathbb{R}$ приведены в *Таблице 12*. С помощью построенной конечной разностной схемы и метода «прогонки» найти приближённое решение задачи (8). Графически сравнить приближённое решение и аналитическое решения задачи (8), указав абсолютную погрешность приближённого решения.►

Таблица 12 (N – номер фамилии студента в журнале)

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
b	– 9	– 8	– 7	– 6	– 5	– 4	– 3	– 2	– 1	7	1	2	3	4	5	6
c	– 9	– 8	– 7	– 6	– 5	– 4	– 3	– 2	– 1	7	1	2	3	4	5	6

Лабораторная работа № 8 Уравнение теплопроводности

Численное решение задачи Коши для простейшего параболического уравнения в частных производных с помощью явной и неявной конечных разностных схем

Рассмотрим на прямоугольнике $[a;b]\times[0;T]$ задачу Коши для одномерного уравнения теплопроводности с заданным коэффициентом диффузии $D>0$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi(s,t)}{\partial t} - D\cdot\dfrac{\partial^2\varphi(s,t)}{\partial s^2} = v(s,t),\ (s,t)\in(a;b)\times(0,T); \\ \varphi(s,0)=\mu(s), s\in[a;b] \text{ (начальное условие)}; \\ \varphi(a,t)=\beta_0(t) \text{ и } \varphi(b,t)=\beta_1,\ t\in[0;T] \text{ (граничные условия)}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\varphi\in C^4([a;b]\times[0;T],\mathbb{R})$ – неизвестная гладкая функция, $\mu\in C([a;b],\mathbb{R})$, $\beta_0,\beta_1\in C([0;T],\mathbb{R})$ – заданные функции и $\mu(a)=\beta_0(0), \mu(b)=\beta_1(0)$.

Предполагается, что задача (1) имеет единственное решение.

Для построения конечной разностной схемы, аппроксимирующей задачу (1), зададим на прямоугольнике $[a;b]\times[0;T]$ двумерную равномерную сетку $B\times A=\langle(s_i,\tau_j): s_i\in B, \tau_j\in A\rangle$ типа $(m+1)\times(n+1)$ шага (h,τ). Следовательно, $B=\langle s_0,s_1,...,s_m\rangle$ и $A=\langle t_0,t_1,...,t_n\rangle$ равномерные сетки отрезков $[a;b]$ и $[0;T]$ с шагами $h=\dfrac{b-a}{m}$ и $\tau=\dfrac{T}{n}$, соответственно.

Для любого узла $(s_i,\tau_j)\in B\times A$ и функций φ, v, μ, β_0 и β_1 из задачи (1) приняты обозначения: $\varphi_i^j=\varphi(s_i;\tau_j)$, $v_i^j=v(s_i;\tau_j)$, $\mu_i=\mu(s_i)$, $\beta_0^j=\beta_0(\tau_j)$ и $\beta_1^j=\beta_1(\tau_j)$.

<u>Явная конечная разностная схема</u>

Конечная и явная разностная схема задачи для (1), индуцированная сеткой $B\times A=\langle(s_i,\tau_j): s_i\in B, \tau_j\in A\rangle$, имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_i^0=\mu_i, i=\overline{0,m} \text{ (сеточное начальное условие)}; \\ \varphi_0^j=\beta_0^j \text{ и } \varphi_{m_k-1}^j=\beta_1^j, j=\overline{0,n} \text{ (сеточные граничные условия)}; \\ \dfrac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau} - D\cdot\dfrac{\varphi_{i+1}^j-2\varphi_i^j+\varphi_{i-1}^j}{h^2} = v_i^j\ (+O(h^2+\tau)\,npu\,h,\tau\to 0), i=\overline{1,m-1}, j=\overline{0,n-1}. \end{cases} \tag{2}$$

Отсюда следует, что при $h,\tau \to 0$ схема (2) аппроксимирует задачу (1) и $O(h^2+\tau)$ – оценка порядка такой аппроксимации.

Введём обозначения:

$$
\begin{cases}
a = \dfrac{D\tau}{h^2}, b = 1 - \dfrac{2D\tau}{h^2}, c = \dfrac{D\tau}{h^2};\\
\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & c & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & b & c \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}; m+1), \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in L(\mathbb{R}; m+1);\\
{}^{>}\boldsymbol{v}^{(0)} = \ \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m \Big\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{m+1};\\
{}^{>}\boldsymbol{v}^{(j)} = \left[\dfrac{1}{\tau}\beta_0^j, v_1^j, \dots, v_{m-1}^j, \dfrac{1}{\tau}\beta_1^j \right\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{m+1}, j = \overline{1,n};\\
{}^{>}\boldsymbol{v} = \left[{}^{>}\boldsymbol{v}^{(0)}, {}^{>}\boldsymbol{v}^{(1)}, \dots, {}^{>}\boldsymbol{v}^{(n)} \right\rangle \in {}^{>}({}^{>}\mathbb{R}^{m+1})^n;\\
{}^{>}\boldsymbol{\varphi}^{(j)} = \left[\varphi_0^j, \varphi_1^j, \dots, \varphi_m^j \right\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^{m+1}, j = \overline{0,n};\\
{}^{>}\boldsymbol{\varphi} = \left[{}^{<}\boldsymbol{\varphi}^{(0)}, {}^{<}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}, \dots, {}^{<}\boldsymbol{\varphi}^{(n)} \right\rangle \in {}^{>}({}^{<}\mathbb{R}^{m+1})^n,
\end{cases}
\tag{3}
$$

где $\|\boldsymbol{G}\| = 1$, если $\dfrac{2D\tau}{h^2} \le 1$, что вытекает из вида матрицы $\boldsymbol{G}$, приведенного в (3).

Согласно обозначениям (3), из схемы (2) получаем сеточное приближённое решение ${}^{>}\boldsymbol{\varphi} = \left[{}^{<}\boldsymbol{\varphi}^{(0)}, {}^{<}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}, \dots, {}^{<}\boldsymbol{\varphi}^{(n)} \right\rangle \in {}^{>}({}^{<}\mathbb{R}^{m+1})^n$ задачи (1) в виде послойного вычисления сеточных функций-решений ${}^{<}\boldsymbol{\varphi}^{(0)}, {}^{<}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}, \dots, {}^{<}\boldsymbol{\varphi}^{(n)} \in {}^{>}({}^{<}\mathbb{R}^{m+1})^n$ для моментов «времени» $t_0, t_1, \dots, t_n \in A$, соответственно:

$$
\begin{cases}
{}^{>}\boldsymbol{\varphi}^{(0)} = {}^{>}\boldsymbol{v}^{(0)};\\
{}^{>}\boldsymbol{\varphi}^{(1)} = \boldsymbol{G} \cdot {}^{>}\boldsymbol{\varphi}^{(0)} + \tau \cdot {}^{>}\boldsymbol{v}^{(1)};\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
{}^{>}\boldsymbol{\varphi}^{(n)} = \boldsymbol{G} \cdot {}^{>}\boldsymbol{\varphi}^{(n-1)} + \tau \cdot {}^{>}\boldsymbol{v}^{(n)}.
\end{cases}
\tag{4}
$$

Теорема 8.1 (достаточный признак устойчивости явных схем). Если при стремлении $h,\tau \to 0$ выполняется условие: $\dfrac{2A\tau}{h^2} \le 1$, то явная схема (2), представляемая видом (4), – устойчива.►

Замечание 8.1 (о явной схеме). Вид (4) служит объяснением того, что конечная разностная схема (2) получила название явной схемы, поскольку вид (2) для поиска сеточного приближённого решения задачи (1) не требует решения дополнительных задач, но только явно определённых вычислений по заданным параметрам задачи.►

Неявная конечная разностная схема

Конечная и неявная разностная схема задачи для (1), индуцированная сеткой $B\times A=\left\langle (s_i,\tau_j): s_i\in B, \tau_j\in A\right\rangle$, имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_i^0=\mu_i, i=\overline{0,m} \text{ (сеточное начальное условие);} \\ \varphi_0^j=\beta_0^j \text{ и } \varphi_{m_k-1}^j=\beta_1^j, j=\overline{0,n} \text{ (сеточные граничные условия);} \\ \dfrac{\varphi_i^{j+1}-\varphi_i^j}{\tau}-D\cdot\dfrac{\varphi_{i+1}^{j+1}-2\varphi_i^{j+1}+\varphi_{i-1}^{j+1}}{h^2}=v_i^{j+1} \quad (+O(h^2+\tau)), i=\overline{1,m-1}, j=\overline{0,n-1}, \end{cases} \tag{5}$$

Отсюда следует, что при $h,\tau\to 0$ схема (5) аппроксимирует задачу (1) и $O(h^2+\tau)$ – оценка порядка такой аппроксимации.

Далее используем обозначения (3), где матрица $\boldsymbol{G}$ меняет свой вид на представление:

$$\begin{cases} a=-\dfrac{D\tau}{h^2}, b=1+\dfrac{2D\tau}{h^2}, c=-\dfrac{D\tau}{h^2}; \\ \boldsymbol{G}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & c & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & b & c \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in L(\mathbb{R};m+1), \overline{\boldsymbol{E}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\in L(\mathbb{R};m+1), \end{cases} \tag{6}$$

Согласно обозначениям (6), из схемы (5) получаем сеточное приближённое решение ${}^{>}\boldsymbol{\varphi}=\left[{}^{<}\boldsymbol{\varphi}^{(0)}, {}^{<}\boldsymbol{\varphi}^{(1)},\ldots, {}^{<}\boldsymbol{\varphi}^{(n)}\right\rangle\in {}^{>}({}^{<}\mathbb{R}^{m+1})^n$ задачи (1) в виде послойного вычисления сеточных функций-решений ${}^{<}\boldsymbol{\varphi}^{(0)}, {}^{<}\boldsymbol{\varphi}^{(1)},\ldots, {}^{<}\boldsymbol{\varphi}^{(n)}\in {}^{>}({}^{<}\mathbb{R}^{m+1})^n$ для моментов «времени» $t_0,t_1,\ldots,t_n\in A$, соответственно:

$$\begin{cases} {}^{>}\boldsymbol{\varphi}^{(0)}={}^{>}\boldsymbol{v}^{(0)}; \\ \boldsymbol{G}\cdot{}^{>}\boldsymbol{\varphi}^{(1)}=\overline{\boldsymbol{E}}\cdot{}^{>}\boldsymbol{\varphi}^{(0)}+\tau\cdot{}^{>}\boldsymbol{v}^{(1)}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \boldsymbol{G}\cdot{}^{>}\boldsymbol{\varphi}^{(n)}=\overline{\boldsymbol{E}}\cdot{}^{>}\boldsymbol{\varphi}^{(n-1)}+\tau\cdot{}^{>}\boldsymbol{v}^{(n)}, \end{cases} \tag{7}$$

где, согласно *теореме 7.1*, $\left\|\boldsymbol{G}^{-1}\right\|\le 1$.

Теорема 8.2 (об устойчивости неявных схем). При стремлении $h,\tau\to 0$ неявная схема (5), представляемая видом (7), – устойчива.►

Замечание 8.2 (о методе «прогонки» для неявной схемы). В силу вида (6) для матрицы $\boldsymbol{G}$ неявной схемы (7), при поэтапном решении конечной разностной неявной схемы из (5) можно использовать метод «прогонки» для ускорения процесса вычислений и уменьшения вычислительной погрешности.►

Замечание 8.3 (о переменном коэффициенте диффузии). В задаче (1) коэффициент диффузии D может зависеть от точки отрезка $[a;b]$. В этом случае, при использовании явной схемы с равномерной сеткой отрезка $[a;b]$ необходимо соблюдать условие: $\frac{2D_{\max}\cdot\tau}{h^2}\le 1$, где $D_{\max}$ - максимальное значение коэффициента диффузии на отрезке $[a;b]$. Это может привести к значительному увеличению трудоемкости определения решения соответствующей конечной разностной явной схемы (шаг τ - станет «слишком малым» и количество этапов $n=\frac{T}{\tau}$ - «слишком большим»).

Неявные схемы для задачи (1) лишены такого недостатка и, поэтому, – более предпочтительны (при условии использования метода «прогонки»).►

<u>ЗАДАНИЕ 8</u>

Используя конечные разностные явную и неявную схемы, индуцированные двумерной равномерной сеткой на квадрате $[0;1]\times[0;1]$ с шагом $h=\tau=0{,}1$, найти численное решение задачи Коши для одномерного параболического уравнения (N – номер фамилии студента в журнале):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi(s,t)}{\partial t}-\dfrac{\partial^2\varphi(s,t)}{\partial s^2}=\dfrac{N}{N+3}+\dfrac{(N+2)s\pi}{2N}cos(\dfrac{\pi}{2}t),\ (s,t)\in(0;1)\times(0,1);\\ \varphi(s,0)=-\dfrac{N}{N+3},s\in[0;1]\ \text{(начальное условие)};\\ \varphi(0,t)=\dfrac{N}{N+3}(t-1)\ \text{и}\ \varphi(1,t)=\dfrac{N}{N+3}(t-1)+\dfrac{N+2}{N}sin(\dfrac{\pi}{2}t),\ t\in[0;1]\ \text{(граничные условия)}.\end{cases}$$

При решении СЛАУ в неявной схеме использовать метод «прогонки». Оценить абсолютные погрешности численных решений. В выводах прокомментировать получившиеся результаты.►

Лабораторная работа № 9 Интегральное уравнение 2-го рода

Метод конечных сумм для решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным аналитически заданным ядром

Рассмотрим на квадрате $[a;b]\times[a;b]$ интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с симметричным аналитически заданным ядром:

$$x(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)x(t)dt = y(s),\ s\in[a;b], \tag{1}$$

где $\lambda\in\mathbb{R}$ – фиксированное ненулевое число, не являющееся характеристическим числом интегрального оператора Гильберта-Шмидта, $K\in C([a;b]\times[a;b],\mathbb{R})$ – заданное симметричное ядро этого оператора и $y\in C([a;b],\mathbb{R})$ – известная функция.

Для построения дискретного аналога, аппроксимирующего уравнение (1), зададим на квадрате $[a;b]\times[a;b]$ двумерную центрально-равномерную сетку $B\times A=\langle(s_i,\tau_j): s_i\in B, \tau_j\in A\rangle$ типа $(n+1)\times(n+1)$ шага h,τ . Следовательно, $B=\langle s_0,s_1,...,s_n\rangle$ и $A=\langle t_0,t_1,...,t_n\rangle$ центрально-равномерные сетки отрезка $[a;b]$ с шагами $h=\dfrac{b-a}{n}$ и $\tau=\dfrac{b-a}{n}$, соответственно.

Для любого узла $(s_i,\tau_j)\in B\times A$ и функций K, x и y из уравнения (1) приняты обозначения: $K_j^i=K(s_i;\tau_j)$, $x^j=x(\tau_j)$ и $y^j=y(\tau_j)$. Используя эти обозначения и квадратурную формулу прямоугольников, из уравнения (1) получаем его дискретный аналог, аппроксимирующий уравнение (1) при $h,\tau\to 0$, в виде СЛАУ:

$$x^i-\lambda\sum_{j=1}^{n}K_j^i h\cdot x^j = y^i,\ i=\overline{1,n}. \tag{2}$$

Введём обозначения:

$${}^{>}\boldsymbol{x}=\left[x^1,...,x^n\right\rangle,\ {}^{>}\boldsymbol{y}=\left[y^1,...,y^n\right\rangle,\ \boldsymbol{F}=(1-K_j^i h)_n^n=(f_j^i)_n^n. \tag{3}$$

Используя эти обозначения (3), СЛАУ (2) перепишем в виде:

$$\boldsymbol{F}\cdot{}^{>}\boldsymbol{x}={}^{>}\boldsymbol{y}. \tag{4}$$

Решая СЛАУ (4) получаем сеточную функцию $^{>}\boldsymbol{x} = \left[x^1, \ldots, x^n \right\rangle \in {}^{>}\mathbb{R}^n$, индуцирующую с помощью интерполяции в виде ломаной приближённое решение уравнения (1). При $h, \tau \to 0$ такое приближённое решение равномерно сходится к решению уравнения (1).

ЗАДАНИЕ 9

Используя дискретный аналог уравнения (1), индуцированный методом конечных сумм с квадратурными формулами прямоугольников (количество узлов в квадратурной формуле не менее 10), найти приближённое решение уравнения (1), которое имеет конкретный вид:

$$x(s) - 0{,}25 \int_0^{\frac{N+2}{N}} K(s,t)x(t)dt = \frac{N+2}{N} s,\ s \in [0; \frac{N+2}{N}],,$$

где N номер фамилии студента в журнале и

$$K(s,t) = \begin{cases} \dfrac{s(2\frac{N+2}{N} - t)}{2\frac{N+2}{N}},\ 0 < s < t\ , \\[2ex] \dfrac{t(2\frac{N+2}{N} - s)}{2\frac{N+2}{N}},\ t < s < 2\dfrac{N+2}{N}. \end{cases}$$

где которого, в зависимости от, приведён в приложении. Оценить абсолютную погрешность приближённого решения, сравнив его с аналитическим решением, полученным сведением уравнения (1) к краевой задаче для обыкновенного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.►

Литература

1. Пирумов У.Г.	Численные методы: Учебное пособие. – М.: ДРОФА, 2007, – 224 сс.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков М.В.	Численные методы: Учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009, – 636 с.
3. Киреев В.И., Пантелеев А.В.	Численные методы в примерах и задачах: Учеб. Пособие. – М.: Высшая школа, 2006. – 480 с.
4. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И.	Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. – М.: Едиториал УРСС, 2009.– 190 сс.