Московский государственный технический

университет им. Н. Э. Баумана.

Домашнее задание №2

по дисциплине:

«МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

ВАРИАНТ 15 (14)

Выполнил:

студент **3**-го курса, гр. **АК3-51**

Ягубов Роман Борисович

Проверил:

Бушуев Александр Юрьевич

г. Москва

Задача 1.

Найти экстремаль функционала Φ, удовлетворяющую указанным граничным условиям:

$$\Phi = \int_0^1 [(y')^2 + 3yy' + 24x^2y]dx\,, \qquad y(0) = 1, \qquad y(1) = 0$$

Решение.

Уравнение Эйлера для данной задачи имеет вид:

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0 \to \begin{cases} F'_y = 3y' + 24x^2 \\ F'_{y'} = 2y' + 3y \end{cases} \to 24x^2 - 2y'' = 0$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y'' = 12x^2 \to y' = 4x^3 + C_1 \to y = x^4 + C_1x + C_2$$

Константы определим исходя из начальных условий:

$$\begin{cases} y(0) = C_2 = 1 \\ y(1) = 1 + C_1 + C_2 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -2 \end{cases}$$

Ответ.

Тогда экстремаль функционала Φ, имеет вид:

$$y(x) = x^4 - 2x + 1$$

Задача 2.

Найти экстремаль функционала Φ, зависящего от нескольких функций:

$$\Phi = \int_1^2 [(y_1')^2 + (y_2')^2 + {y_2}^2]dx\,, \qquad y_1(1) = y_2(2) = 1, \qquad y_1(2) = 2, \qquad y_2(1) = 0$$

Решение.

Уравнение Эйлера для данной задачи имеет вид:

$$F'_{y_i} - \frac{d}{dx}F'_{y_i'} = 0 \to \begin{cases} 2y_2 - 2y_2'' = 0 \\ 0 - y_1'' = 0 \end{cases}$$

Общие решения дифференциальных уравнений имеют вид:

$$\begin{cases} y_2'' = y_2 \\ y_1'' = 0 \end{cases} \to \begin{cases} y_1(x) = C_1 + C_2x \\ y_2(x) = C_3e^x + C_4e^{-x} \end{cases}$$

Константы определим исходя из начальных условий:

$$\begin{cases} y_1(1) = C_1 + C_2 = 1 \\ y_1(2) = C_1 + 2C_2 = 2 \end{cases} \to \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2(1) = C_3e + C_4e^{-1} = 0 \\ y_2(2) = C_3e^2 + C_4e^{-2} = 1 \end{cases} \to \begin{cases} C_3 = 1/(e^2 - 1) \\ C_4 = -e^2/(e^2 - 1) \end{cases}$$

Ответ.

Тогда экстремали функционала Φ, имеют вид:

$$y_1(x) = x, \qquad y_2(x) = \frac{e^{2-x} - e^x}{1 - e^2}$$

Задача 3.

Найти экстремаль функционала Φ, зависящего от производной высшего порядка одной функции:

$$\Phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(y'')^2 - y^2 + x^2]dx\,, \qquad y'(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Решение.

Уравнение Эйлера для данной задачи имеет вид:

$$F'_{y_i} - (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F'_{y_i^{(n)}} = 0 \rightarrow \begin{cases} F'_y = -2y \\ F'_{y''} = 2y'' \end{cases} \rightarrow y^{(4)} - y = 0$$

Общее решение дифференциального уравнения и его производная имеют вид:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 \cos(x) + C_3 e^{-x} + C_4 \sin(x)$$
$$y'(x) = C_1 e^x - C_2 \sin(x) - C_3 e^{-x} + C_4 \cos(x)$$

Константы определим исходя из начальных условий:

$$\begin{cases} y(0){=}C_1{+}C_2{+}C_3{=}1 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right){=}C_1 e^{\frac{\pi}{2}}{+}C_3 e^{-\frac{\pi}{2}}{+}C_4{=}0 \\ y'(0){=}C_1{-}C_3{+}C_4{=}0 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right){=}C_1 e^{\frac{\pi}{2}}{-}C_3 e^{-\frac{\pi}{2}}{-}C_2{=}{-}1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1{=}0 \\ C_2{=}1 \\ C_3{=}0 \\ C_4{=}0 \end{cases}$$

Ответ.

Тогда экстремали функционала Φ, имеют вид:

$$y(x) = \cos(x)$$

Задача 4.

Найти экстремаль функционала Φ с подвижными границами:

$$\Phi = \int_0^b \sqrt{1 + (y')^2}dx\,, \qquad y(0) = 0, \qquad y(b) = \frac{1}{b^2}$$

Решение.

Уравнение Эйлера для данной задачи имеет вид:

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0 \rightarrow \begin{cases} F'_y = 0 \\ F'_{y'} = \dfrac{y'}{\left(\sqrt{1 + (y')^2}\right)} \end{cases} \rightarrow \frac{y''}{\left(\sqrt{1 + (y')^2}\right)^3} = 0$$

Общее решение дифференциального уравнения и его производная имеют вид:

$$y(x) = C_1 x + C_2\,, \qquad y'(x) = C_1$$

Используя начальные условия и условие трансверсальности , получим:

$$\begin{cases} y(0) = C_2 = 0 \\ y(b) = C_1 b + C_2 = \dfrac{1}{b^2} \\ \left[F + F'_{y'}(\varphi'_1 - y')\right]_{x=b} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = \dfrac{1}{b^3} = y'(x) \\ \sqrt{1 + {C_1}^2} - \dfrac{y'(2C_1 + C_1)}{\left(\sqrt{1 + (y')^2}\right)} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2} \\ C_2 = 0 \\ b = \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

Ответ.

Тогда экстремаль функционала , имеют вид:

$$y(x) = \frac{1}{2}x$$

Задача 5.

Найти экстремаль функционала Φ в задаче на условный экстремум:

$$\Phi = \int_0^1 [(y_1')^2 + (y_2')^2]dx\,, \int_0^1 y_1 y_2 dx = -2\,, \qquad y_1(0) = y_2(0) = y_1(1) = y_2(1) = 0$$

Решение.

Составим функцию Лагранжа:

$$L = (y_1')^2 + (y_2')^2 + \lambda y_1 y_2$$

Уравнение Эйлера для данной задачи имеет вид:

$$L'_{y_i} - (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} L'_{y_i^{(n)}} = 0 \to \begin{cases} \lambda y_2 - 2y_1'' = 0 \\ \lambda y_1 - 2y_2'' = 0 \end{cases} \to \lambda y_1 - \frac{4y_1^{(4)}}{\lambda} = 0$$

Общие решения дифференциальных уравнений имеют вид:

$$y_1(x) = C_1 \cos\left(x\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right) + C_2 \sin\left(x\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right) + C_3 e^{-x\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} + C_4 e^{x\sqrt{\frac{\lambda}{2}}}$$

$$y_2(x) = \frac{2y_1''(x)}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{2}\left(-C_1 \cos\left(x\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right) - C_2 \sin\left(x\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right) + C_3 e^{-x\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} + C_4 e^{x\sqrt{\frac{\lambda}{2}}}\right)$$

Константы определим исходя из начальных условий:

$$\begin{cases} y_1(0) = C_1 + C_3 + C_4 = 0 \\ y_2(0) = -C_1 + C_3 + C_4 = 0 \\ y_1(1) = C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right) + C_3 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} + C_4 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} = 0 \\ y_2(1) = -C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right) + C_3 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} + C_4 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right) = 0 \\ C_3 sh\sqrt{\frac{\lambda}{2}} = 0 \\ C_3 + C_4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \\ \sqrt{\frac{\lambda}{2}} = \pi n, n \in N^* \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1(x) = C_2 \sin(x\pi n) \\ y_2(x) = -C_2 \sin(x\pi n) \end{cases} \to \int_0^1 y_1 y_2 dx = C_2^2 \int_0^1 sin^2(x\pi n)dx = -2 \to C_2 = \pm 2$$

Ответ.

Тогда экстремали функционала Φ, имеют вид:

$$y_1(x) = \pm 2\sin(x\pi n)\,, \qquad y_2(x) = \mp 2\sin(x\pi n)\,, \qquad n \in N^*$$