

ПРОГРАММА ЭКЗАМЕНА ПО КУРСУ

“ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ»

1. Координаты и локальные векторы базиса. Якобиевы матрицы. Векторы взаимного базиса. Правила расстановки индексов. Векторное поле. Операции с векторными полями.
2. Символы Леви-Чивиты, их основные свойства. Смешанное и двойное векторное произведения. Длина $|a \times b|$. Геометрический смысл векторов взаимного базиса. Вычисление объема.
3. Алгебраическое определение тензора. Геометрическое определение тензора (второго ранга) и алгебраические операции с тензорами: графическое изображение векторов и операций с ними; геометрическое определение тензора; операции с тензорами (сумма, скалярное умножение тензора на вектор, умножение тензора на скаляр); компоненты тензора второго ранга; базисные тензоры; разложение тензора по базисным тензорам; единичный тензор; скалярное умножение тензоров, двойное скалярное умножение тензоров; транспонированный тензор; симметричный тензор; обратный тензор; ортогональный тензор;
4. Диады. Теорема о порядке выполнения операций тензорного и скалярного умножения. Теорема о скалярном и двойном скалярном произведении диадных базисов. Теорема о разложении тензора второго ранга по диадному базису. Определение диады векторов.
5. Поле тензоров второго ранга. Ковариантные и контрвариантные компоненты тензора. Представление единичного тензора в локальном диадном базисе. Алгебраические операции с тензорными полями: скалярное произведение двух тензоров; двойное скалярное произведение двух тензоров; векторное произведение тензора на вектор и вектора на тензор; транспонированный тензор; n -я степень тензора. Детерминант тензора.
6. Тензорные признаки: прямой, обратный.
7. Определение собственных значений тензора. Свойства собственных векторов. Разложение тензора по собственному базису. Разложение обратного тензора по собственному базису. Разложение тензорных степеней по собственному базису.
8. Симметричные и положительно-определенные тензоры. Теорема о собственных значениях симметричного тензора. Теорема о собственных

значениях симметричного, положительно определенного тензора.
Определение тензорной поверхности.

9. Кососимметричные тензоры. Аксиальный вектор. Теорема о связи кососимметричного тензора и аксиального вектора. Собственные значения кососимметричного тензора.
10. Ортогональные тензоры. Определитель ортогонального тензора. Теорема о собственных значениях ортогонального тензора.
11. Ортонормированный базис, коэффициенты Ламе. Компоненты тензоров в ортонормированном базисе, физические компоненты.
12. Символы Кристоффеля (первого и второго рода). Связь символов Кристоффеля с метрической матрицей.
13. Градиент скаляра. Ковариантные производные компонент вектора.
14. Набла –оператор и градиент вектора.
15. Ротор, дивергенция вектора.
16. Ковариантные производные тензора второго ранга.
17. Дифференциал тензора. Теорема о градиенте тензора n-го ранга.
18. Ротор и дивергенция тензора.
19. Ковариантные производные метрической матрицы. Теорема Риччи.
20. Ковариантное дифференцирование сумм (векторов, тензоров(второго ранга)).
21. Дифференцирование произведений вектора и тензора на скаляр: $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{a} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{a}$, $\nabla \cdot (\varphi \mathbf{T}) = \nabla \varphi \cdot \mathbf{T} + \varphi \nabla \cdot \mathbf{T}$, $\nabla \times (\varphi \mathbf{a}) = \nabla \varphi \times \mathbf{a} + \varphi \nabla \times \mathbf{a}$, $\nabla \times (\varphi \mathbf{T}) = \nabla \varphi \times \mathbf{T} + \varphi \nabla \times \mathbf{T}$, $\nabla \otimes (\varphi \mathbf{a}) = \nabla \varphi \otimes \mathbf{a} + \varphi \nabla \otimes \mathbf{a}$, $\nabla \otimes (\varphi \mathbf{T}) = \nabla \varphi \otimes \mathbf{T} + \varphi \nabla \otimes \mathbf{T}$.
22. Дифференцирование произведений двух векторов: $\nabla(a \cdot b) = (\nabla \otimes a) \cdot b + (\nabla \otimes b) \cdot a$, $\nabla \otimes (a \times b) = (\nabla \otimes a) \times b - (\nabla \otimes b) \times a$, $\nabla \cdot (a \times b) = (\nabla \times a) \cdot b - (\nabla \times b) \cdot a$, $\nabla \cdot (a \otimes b) = (\nabla \cdot a) \otimes b + a \cdot \nabla \otimes b$, $\nabla \times (a \times b) = b \cdot \nabla \otimes a + a(\nabla \cdot b) - b(\nabla \cdot a) - a \cdot \nabla \otimes b$, $\nabla \times (a \otimes b) = (\nabla \times a) \otimes b - a \times (\nabla \otimes b)$
23. Дифференцирования произведений вектора на тензор: $\nabla \otimes (T \cdot a) = (\nabla \otimes T) \cdot a + (\nabla \otimes a) \cdot T^t$, $\nabla \otimes (a \cdot T) = (\nabla \otimes a) \cdot T + (\nabla \otimes T^t) \cdot a$, $\nabla \cdot (T \cdot a) = (\nabla \cdot T) \cdot a + T \cdot (\nabla \otimes a)^t$, $\nabla \cdot (a \cdot T) = (\nabla \cdot T^t) \cdot a + T \cdot \nabla \otimes a$, $\nabla \cdot (T \times a) = (\nabla \cdot T) \times a + (T^t \cdot \nabla) \times a$, $\nabla \times (a \cdot T) = (\nabla \times a) \cdot T - a \cdot (\nabla \times T)$, $\nabla \times (T \cdot a) = (\nabla \times T) \cdot a - (T \times \nabla)^t \cdot a$, $\nabla \times (a \cdot T) = (\nabla \times T^t) \cdot a - (T^t \times \nabla) \cdot a$, $\nabla \times (T \times a) = (\nabla \times T) \times a - (T^t \times \nabla) \times a$, $\nabla \times (a \times T) = -(\nabla \cdot a)T + (\nabla \otimes a) \cdot T - a \cdot \nabla \otimes T + a \otimes \nabla \cdot T$

24. Дифференцирование произведения тензоров: $\nabla \cdot (T \cdot B) = (\nabla \cdot T) \cdot B + T^t \cdot \nabla \otimes B$
25. Ковариантные производные второго порядка. Двукратное дифференцирование скаляров. Двукратное дифференцирование векторов. Теорема о перестановке ковариантных производных при двукратном дифференцировании векторов (тензоров).
26. Вывод формул: дивергенция от градиента вектора (лапласиан вектора), градиент от дивергенции вектора, ротор от ротора вектора, дивергенция от ротора вектора, ротор от градиента вектора, градиент от ротора вектора.
27. Двукратное дифференцирование тензоров второго ранга.
28. Кривые в трехмерном евклидовом пространстве. Способы задания кривых. Длина дуги кривой. Векторные характеристики кривой: касательный вектор, нормальный вектор, бинормаль, кривизна, радиус кривизны.
29. Сопровождающий трехгранник.
30. Кручение кривой.
31. Формулы Френе. Механический смысл формул Френе.
32. Уравнение касательной, нормали, бинормали.
33. Способы задания поверхности. Регулярная точка изображения. Гладкая параметризованная поверхность. Определение особой точки поверхности. Координатная сеть поверхности.
34. Первая квадратичная форма поверхности. Условие при котором квадратичная форма является линейным элементом поверхности. Вычисление угла между кривыми на поверхности. Вычисление площади поверхности.
35. Ортогональные траектории для заданного семейства кривых на поверхности.

36. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна. Асимптотическая линия. Главные направления и главные кривизны. Средняя и Гауссова кривизны. Типы точек поверхности.

37. Поверхности вращения.

38. Деривационные формулы(с выводом)

39. Формулы Гаусса-Петерсона-Кодацци.

ЯГубов.РФ