Ягубов АКЗ-41

Вариант №10

Задача 4

Кривая $Y = \frac{1}{ax+b}$ вращается около оси OX

1)Параметрическое и общее уравнение поверхности:

$$\begin{cases} x = f(u)\cos v \\ y = f(u)\sin v \\ z = g(u) \end{cases} = \begin{cases} x = \dfrac{\cos v}{au+b} \\ y = \dfrac{\sin v}{au+b} \\ z = u \end{cases}$$

$$r(u,v) = (x,y,z) = \left(\frac{\cos v}{au+b}; \frac{\sin v}{au+b}; u\right)$$

$$\begin{cases} r_u(u,v) = \left(-\dfrac{a\cos v}{(au+b)^2}; -\dfrac{a\sin v}{(au+b)^2}; 1\right) \\ r_v(u,v) = \left(-\dfrac{\sin v}{au+b}; \dfrac{\cos v}{au+b}; 0\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{E} = (r_u, r_u) = \left(-\dfrac{a\cos v}{(au+b)^2}\right)^2 + \left(-\dfrac{a\sin v}{(au+b)^2}\right)^2 + 1^2 = 1 + \dfrac{a^2}{(au+b)^4} \\ \mathrm{F} = (r_u, r_v) = \dfrac{a\cos v}{(au+b)^2}\dfrac{\sin v}{au+b} - \dfrac{a\sin v}{(au+b)^2}\dfrac{\cos v}{au+b} + 0\cdot 1 = 0 \\ \mathrm{G} = (r_v, r_v) = \left(-\dfrac{\sin v}{au+b}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos v}{au+b}\right)^2 + 0\cdot 0 = \dfrac{1}{(au+b)^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{uu}(u,v) = \left(\dfrac{2a^2\cos v}{(au+b)^3}; \dfrac{2a^2\sin v}{(au+b)^3}; 0\right) \\ r_{uv}(u,v) = \left(\dfrac{a\sin v}{(au+b)^2}; -\dfrac{a\cos v}{(au+b)^2}; 0\right) \\ r_{vv}(u,v) = \left(-\dfrac{\cos v}{au+b}; -\dfrac{\sin v}{au+b}; 0\right) \end{cases}$$

$$\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{\frac{1}{(au+b)^2}\left(1+\frac{a^2}{(au+b)^4}\right)} = \frac{1}{au+b}\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{(au+b)^4}\right)}$$

$$\begin{cases} L = \dfrac{(r_u, r_v, r_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}} = \dfrac{-2a^2}{(au+b)\sqrt{a^2 + (au+b)^4}} \\ M = \dfrac{(r_u, r_v, r_{uv})}{\sqrt{EG - F^2}} = 0 \\ N = \dfrac{(r_u, r_v, r_{vv})}{\sqrt{EG - F^2}} = \dfrac{au+b}{\sqrt{a^2 + (au+b)^4}} \end{cases}$$

2)Асимптотические линии

$$L(du)^2 + N(dv)^2 = 0$$

$$\frac{-2a^2}{(au+b)\sqrt{a^2 + (au+b)^4}}(du)^2 + \frac{au+b}{\sqrt{a^2 + (au+b)^4}}(dv)^2 = 0$$

$$dv = \pm \frac{a\sqrt{2}}{au+b} du$$

$$\begin{cases} v + \sqrt{2}\ln(au+b) = C_1 \\ v - \sqrt{2}\ln(au+b) = C_2 \end{cases}$$

3)Кривизна

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\dfrac{-2a^2}{(au+b)\sqrt{a^2 + (au+b)^4}} \cdot \dfrac{au+b}{\sqrt{a^2 + (au+b)^4}}}{\dfrac{1}{au+b}\sqrt{\left(1 + \dfrac{a^2}{(au+b)^4}\right)}}$$
$$= \frac{-2a^2(au+b)^6}{(a^2 + (au+b)^4)^2}$$

$$H = \frac{EN + GL - 2MF}{2(EG - F^2)} = \frac{EN + GL}{2(EG)}$$
$$= \frac{\left(1 + \dfrac{a^2}{(au+b)^4}\right)\left(\dfrac{au+b}{\sqrt{a^2 + (au+b)^4}}\right) + \dfrac{-2a^2}{(au+b)^3\sqrt{a^2 + (au+b)^4}}}{\dfrac{2}{au+b}\sqrt{\left(1 + \dfrac{a^2}{(au+b)^4}\right)}}$$
$$= \frac{(au+b)^4 - a^2}{2(a^2 + (au+b)^4)^{\frac{3}{2}}}$$

4)Нормальная кривизны координатных линий

$$\begin{cases} K_{n1} = \dfrac{N}{G} = \dfrac{\dfrac{au+b}{\sqrt{a^2+(au+b)^4}}}{\dfrac{1}{(au+b)^2}} = \dfrac{(au+b)^3}{\sqrt{a^2+(au+b)^4}} \\ K_{n1} = \dfrac{L}{E} = \dfrac{\dfrac{-2a^2}{(au+b)\sqrt{a^2+(au+b)^4}}}{1+\dfrac{a^2}{(au+b)^4}} = \dfrac{-2a^2(au+b)^3}{\sqrt{a^2+(au+b)^4}^3} \end{cases}$$

5) Нормальная кривизны координатных линий u=v

$$K_n = \frac{L(du)^2+N(dv)^2}{E(du)^2+G(dv)^2} = \frac{L+N}{E+G} = \frac{\dfrac{-2a^2}{(au+b)\sqrt{a^2+(au+b)^4}} + \dfrac{au+b}{\sqrt{a^2+(au+b)^4}}}{1+\dfrac{a^2}{(au+b)^4}+\dfrac{1}{(au+b)^2}} = \frac{-2a^2+(au+b)^2}{\sqrt{a^2+(au+b)^4}} \cdot \frac{(au+b)^3}{a^2+(au+b)^4+(au+b)^2}$$

6)Главные кривизны поверхности в произвольной точке

$$\begin{cases} K = k_1k_2 \\ H = \dfrac{k_1+k_2}{2} \end{cases}$$

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

$$\begin{cases} H = \dfrac{N}{2G} + \dfrac{L}{2E} \\ K = \dfrac{LN}{EG} \end{cases}$$

$$D = \left(\frac{N}{G}+\frac{L}{E}\right)^2 - 4\frac{LN}{EG} = \left(\frac{N}{G}-\frac{L}{E}\right)^2$$

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{N}{G}+\dfrac{L}{E}+\left(\dfrac{N}{G}-\dfrac{L}{E}\right)\right) = \dfrac{N}{G} = \dfrac{(au+b)^3}{\sqrt{a^2+(au+b)^4}} \\ k_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{N}{G}+\dfrac{L}{E}-\left(\dfrac{N}{G}-\dfrac{L}{E}\right)\right) = \dfrac{L}{E} = \dfrac{-2a^2(au+b)^3}{\sqrt{a^2+(au+b)^4}^3} \end{cases}$$

7)Тип точек поверхности

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}==\frac{-2a^2(au+b)^6}{(a^2+(au+b)^4)^2}$$

$$K=0,\qquad u=-\frac{b}{a},\qquad \text{точки параболические типа}$$

$$K<0,\ \ \text{точки эллиптического типа}$$

8)Уравнение поверхности, взяв асимптотические за координатные линии

$$\begin{cases} v+\sqrt{2}\ln(au+b)=C_1 \\ v-\sqrt{2}\ln(au+b)=C_2 \end{cases}$$

$$v=\frac{C_1+C_2}{2},\qquad F(u)=\frac{C_1-C_2}{2}$$

$$\exists F^{-1}(u);u=F^{-1}\frac{C_1-C_2}{2}$$

$$\begin{cases} x=f(u)\cos v \\ y=f(u)\sin v \\ z=g(u) \end{cases}=\begin{cases} x=\dfrac{\cos v}{au+b} \\ y=\dfrac{\sin v}{au+b} \\ z=u \end{cases}=\begin{cases} x=\dfrac{\cos\left(\frac{C_1+C_2}{2}\right)}{aF^{-1}\left(\frac{C_1-C_2}{2}\right)+b} \\ y=\dfrac{\sin\left(\frac{C_1+C_2}{2}\right)}{aF^{-1}\left(\frac{C_1-C_2}{2}\right)+b} \\ z=F^{-1}\left(\dfrac{C_1-C_2}{2}\right). \end{cases}$$