Московский государственный
технический университет
имени Н.Э. Баумана

А.Н. Щетинин, Е.А. Губарева

Введение в тензорный анализ

Издательство МГТУ
им. Н.Э. Баумана

А.Н. Щетинин, Е.А. Губарева

ВВЕДЕНИЕ
В ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Рекомендовано Научно-методическим советом
МГТУ им. Н.Э. Баумана
в качестве учебного пособия

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2012

Щ70

Рецензенты: *А.М. Лукацкий, Н.Г. Хорькова*

Щетинин А. Н.

Щ70 Введение в тензорный анализ : учеб. пособие / А.Н. Щетинин, Е.А. Губарева. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. — 35, [5] с. : ил.

Рассмотрены векторные и конвекторные поля, тензорные поля, производная Ли, ковариантное дифференцирование, связность Леви-Чивита, тензоры кручения и кривизны. Дано строгое изложение аппарата римановой геометрии. Приведено домашнее задание, включающее 24 варианта типовых расчетных заданий.

Для студентов МГТУ им. Н.Э. Баумана, изучающих курс «Дифференциальная геометрия и тензорный анализ».

УДК 512.97(075.8)
ББК 22.151.5

ВВЕДЕНИЕ

В пособии введено и проанализировано понятие тензорного поля (тензора). В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассматриваются только линейная и дифференцируемая структуры. Используя понятие касательного пространства $T_x(\mathbb{R}^n)$ в точке x, можно ввести тензоры в таких пространствах. Задать тензорное поле — это значит выбрать в каждом из касательных пространств $T_x(\mathbb{R}^n)$ тензор одного и того же типа. Координаты тензора должны изменяться при переходе к другой точке дифференцируемым образом. Тензорные поля можно дифференцировать с помощью производной Ли. Для ее построения не требуется вводить никаких новых структур.

Дифференцировать тензорные поля можно также с помощью линейной связности. Если в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана метрика, то существует единственная линейная связность без кручения, согласованная с этой метрикой. Говоря о ковариантной производной, имеют в виду обычно эту линейную связность — связность Леви-Чивита.

Если рассматривать поверхности в трехмерном пространстве ($\mathbb{R}^3$), то для таких поверхностей однозначно определена первая квадратичная форма, задающая метрику. По метрике однозначно определяется линейная связность (символы Кристоффеля), что позволяет дифференцировать тензорные поля на таких поверхностях. Если задать параметризацию поверхности, все сводится к случаю обычного двумерного пространства $\mathbb{R}^2$, в котором фиксирована криволинейная система координат.

Для более глубокого изучения материала следует ознакомиться с работами [1—4].

Основная цель пособия — научить студента двум алгебраическим процедурам: правилу суммирования Эйнштейна и правилу дифференцирования тензоров.

1. ВЕКТОРНЫЕ И КОВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ

Пространство $\mathbb{R}^3$ рассмотрим как множество векторов (x^1, x^2, x^3). Числа x^1, x^2, x^3 суть координаты вектора в декартовой ортогональной системе координат, и никакие другие системы координат пока не вводим.

Пусть $x \in \mathbb{R}^3$. Множество $T_x(\mathbb{R}^3)$ всех векторов с началом в точке x наделяется естественной структурой векторного пространства, называемого *касательным пространством в точке* x. При этом каждому вектору v, выходящему из начала координат, отвечает равный ему вектор $v_x \in T_x(\mathbb{R}^3)$ с началом в точке x. Многие структуры, имеющиеся в пространстве $\mathbb{R}^3$, без труда переносятся в пространство $T_x(\mathbb{R}^3)$: скалярное произведение, ориентация и т. д. Пусть e_1, e_2, e_3 — стандартный базис в пространстве $\mathbb{R}^3$ (в курсе аналитической геометрии он обозначался $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$). Тогда векторы $(e_1)_x$, $(e_2)_x$, $(e_3)_x$ образуют базис касательного пространства в точке x (рис. 1.1*).

Зафиксируем в каждом касательном пространстве $T_x(\mathbb{R}^3)$ по вектору. Тогда получим *векторное поле*. Более точно: векторное поле — это функция X, относящая каждой точке $x \in \mathbb{R}^3$ вектор $X(x) \in T_x(\mathbb{R}^3)$. Для каждого x существуют такие числа $\xi^i(x)$, что

$$X(x) = \xi^i(x)(e_i)_x. \tag{1.1}$$

Функции $\xi^i(x)$ будем считать гладкими (класса C^∞).

При записи равенства (1.1) используется *правило Эйнштейна*: если в формуле индекс встречается два раза (вверху и внизу), то это означает суммирование. В случае пространства $T_x(\mathbb{R}^3)$ формула

*Все рисунки, приведенные в учебном пособии, относятся к случаю $n = 2$.

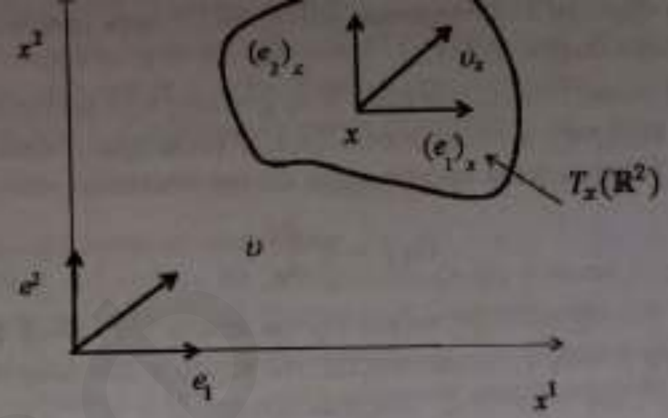


Рис. 1.1

(1.1) эквивалентна формуле

$$X(x) = \xi^1(x)(e_1)_x + \xi^2(x)(e_2)_x + \xi^3(x)(e_3)_x. \tag{1.2}$$

Далее мы пользуемся правилом Эйнштейна без всяких оговорок.

Аналогично определению векторного поля в $\mathbb{R}^3$ определим векторные поля на открытых подмножествах $U \subseteq \mathbb{R}^3$.

Операции над векторами порождают соответствующие операции над векторными полями, проводимые поточечно. Если X и Y — векторные поля и $\lambda \in \mathbb{R}$, то положим

$$(X+Y)(x) = X(x) + Y(x); \quad (\lambda X)(x) = \lambda X(x). \tag{1.3}$$

Множество векторных полей в области U обозначим $\mathfrak{B}(U)$. Это множество наделяется структурой векторного пространства согласно формулам (1.3). Проверка аксиом векторного пространства элементарна. Отметим, что это пространство *бесконечномерно*, несмотря на то что в каждой точке x мы имеем дело с конечномерным пространством.

Определим произведение fX, где f — функция; X — векторное поле:

$$(fX)(x) = f(x)X(x).$$

Функции f также считаем гладкими. Множество функций класса C^∞ в области U обозначим $\mathfrak{F}(U)$; $\mathfrak{B}(U)$ есть *конечномерный* модуль над кольцом $\mathfrak{F}(U)$.

Пусть задано векторное поле $X = \xi^i e_i$ (где e_i — векторное поле, значение которого в точке x есть $(e_i)_x$). Тогда для любой гладкой функции f определена производная по направлению этого поля

$$\partial_X f = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Пусть $Y = \eta^j e_j$ — другое векторное поле и для любой функции f имеем $\partial_X f = \partial_Y f$. В частности, это верно и для координатной функции x^i. Но $\partial_X x^i = \xi^i$, следовательно, $\xi^i = \eta^i$, $i = 1, 2, 3$, т.е. $X = Y$. Значит, между векторными полями и операторами ∂_X существует биективное соответствие, причем линейное. Поэтому векторные поля отождествляют с операторами ∂_X. В частности, полю $X = e_i$ соответствует оператор $\dfrac{\partial}{\partial x^i}$. Далее вместо $\dfrac{\partial}{\partial x}$ будем использовать запись ∂_x. Векторное поле запишем в виде

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^i X_i. \tag{1.4}$$

Пусть $f_1, f_2 \in \mathfrak{F}(U)$, $X \in \mathfrak{B}(U)$. Очевидно, что имеют место свойства

$$\begin{aligned} &\partial_X (f_1 + f_2) = \partial_X f_1 + \partial_X f_2; \\ &\partial_X (f_1 \cdot f_2) = \partial_X f_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot \partial_X f_2. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Операцию, обладающую формальными свойствами (1.5), называют *дифференцированием*. Таким образом, векторное поле позволяет дифференцировать функции.

Определим *ковекторное поле*. Для точки x рассмотрим сопряженное к касательному пространству $T_x(\mathbb{R}^3)$ пространство $T_x^*(\mathbb{R}^3)$, т.е. пространство линейных функций с операциями сложения и умножения на число. Если зафиксировать базис $(e_1)_x$, $(e_2)_x$, $(e_3)_x$ касательного пространства $T_x(\mathbb{R}^3)$ и определить линейные функции $(e^i)_x$ формулами

$$(e^i)_x((e_j)_x) = \delta^i_j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

то построенные функции образуют базис сопряженного пространства $T_x^*(\mathbb{R}^3)$.

Ковекторное поле (в области $U \subseteq \mathbb{R}^3$) — это функция, относящая каждой точке $x \in U$ элемент сопряженного пространства $\omega(x) \in T_x^*(\mathbb{R}^3)$. Существуют такие функции $\omega_i(x)$, что

$$\omega(x) = \omega_i(x)(e^i)_x.$$

Эти функции считаем гладкими.

Пусть f — функция. Ее дифференциал df_x в точке x можно рассматривать как линейную функцию на касательном пространстве $T_x(\mathbb{R}^3)$. Очевидно, что дифференциал $(dx^i)_x$ координатной функции x^i совпадает с $(e^i)_x$. Таким образом, любое ковекторное поле можно записать в виде

$$\omega = \omega_i dx^i. \tag{1.6}$$

Множество ковекторных полей в области U обозначим $\mathfrak{B}^*(U)$.

Вычислим значение ковекторного поля (1.6) на векторном поле (1.4). Имеем

$$\omega(X) = \omega_i dx^i \left(\xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \omega_i \xi^j dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \omega_i \xi^j \delta^i_j = \omega_i \xi^i.$$

Пусть задана декартова система координат x^1, x^2, x^3 в $\mathbb{R}^3$. Можно рассматривать эту систему в произвольной области U пространства. Пусть задана какая-нибудь другая система функций z^1, z^2, z^3 в этой же области:

$$z^j = z^j(x^1, x^2, x^3), \quad j = 1, 2, 3.$$

Рассмотрим *матрицу Якоби*

$$\left(\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial z^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial z^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial z^1}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial z^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial z^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial z^2}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial z^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial z^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial z^3}{\partial x^3} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Если ее определитель (якобиан) в точке (x_0^1, x_0^2, x_0^3) отличен от нуля, то функции x^i можно в окрестности этой точки выразить через z^j, как утверждает теорема об обратной функции. Тогда в той же окрестности функции z^1, z^2, z^3 также образуют систему координат (уже криволинейных). Наконец, если изначально система криволинейная и якобиан замены отличен от нуля, имеем две криволинейные системы координат.

Отметим, что матрица Якоби обратного преобразования удовлетворяет следующему соотношению:

$$\frac{\partial z^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^k} = \delta^i_k. \tag{1.8}$$

Хорошо известны примеры полярных на плоскости, а также цилиндрических и сферических в пространстве систем координат.

Пусть z^1, z^2, z^3 — другая система координат в той же области (рис. 1.2). Рассмотрим векторные поля $\frac{\partial}{\partial z^1}$, $\frac{\partial}{\partial z^2}$, $\frac{\partial}{\partial z^3}$ и ковекторные поля dz^1, dz^2, dz^3. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad i = 1,\ 2,\ 3; \tag{1.9}$$

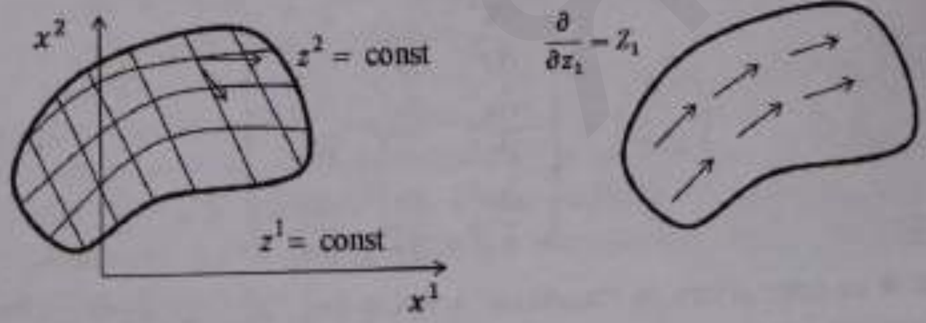
$$dz^i = \frac{\partial z^i}{\partial x^\alpha}dx^\alpha, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{1.10}$$

Определим, как изменяются координаты векторного и ковекторного полей при переходе к другой системе координат. Рассмотрим векторное поле

$$X = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} = \xi'^j\frac{\partial}{\partial z^j}.$$

Имеем

$$\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^i\frac{\partial z^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial z^j} = \xi'^j\frac{\partial}{\partial z^j},$$



откуда

$$\xi'^j = \frac{\partial z^j}{\partial x^\alpha}\xi^\alpha, \tag{1.11}$$

где индекс суммирования i мы заменили индексом α. Сделано это по следующим причинам: во-первых, с целью напомнить, что индекс суммирования вообще можно обозначать произвольно, и, во-вторых, для удобства запоминания формул.

Примечание. Латинскими буквами будем обозначать постоянные индексы, а греческими — индексы суммирования. Если в левой части формулы есть верхний индекс i, то он должен встретиться как верхний индекс и в правой части, и наоборот.

Аналогично случаю векторного поля рассуждаем и в случае ковекторного поля:

$$\omega = \omega_i dx^i = \omega'_j dz^j;$$

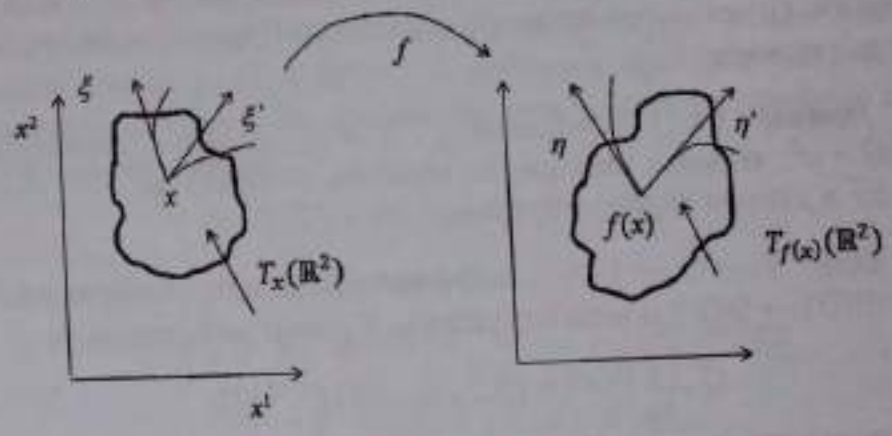
$$\omega_\alpha dx^\alpha = \omega_\alpha\frac{\partial x^\alpha}{\partial z^j}dz^j = \omega'_j dz^j,$$

откуда

$$\omega'_j = \frac{\partial x^\alpha}{\partial z^j}\omega_\alpha. \tag{1.12}$$

Рассмотрим действие отображений на векторные и ковекторные поля.

Пусть $f\colon U \to V$ (где $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$) — гладкое отображение. Ограничимся случаем $m = n = 2$ (рис. 1.3). Для каждой точ-



ки $x \in U$ имеем индуцированное отображение касательных пространств

$$(f_*)_x : T_x(\mathbb{R}^n) \to T_{f(x)}(\mathbb{R}^m).$$

Это линейное отображение, действующее следующим образом: касательный вектор

$$\xi = \left(\xi^1, \xi^2\right) \in T_x(\mathbb{R}^n)$$

переходит в вектор

$$\eta = (f_*)_x \xi = (\eta^1, \eta^2), \quad \eta \in T_{f(x)}(\mathbb{R}^m),$$

где

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix},$$

или

$$\eta^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^\alpha} \xi^\alpha \qquad (1.13)$$

(все производные берутся в точке x).

Отображение $f_* : \mathfrak{B}(U) \to \mathfrak{B}(V)$ определить, вообще говоря, нельзя, так как при $f(x) = f(y) = z$ и $(f_*)_x(X(x)) \neq (f_*)_y(X(y))$ значение поля $f_*(X)$ в точке z определить невозможно.

Напомним, что гладкое отображение f называют *диффеоморфизмом*, если оно обратимо, и обратное отображение f^{-1} также гладкое. Отметим, что гладкость обратного отображения не следует из гладкости f.

Пример 1.1. Отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданное формулой $f(x) = x^3$, является гладким, но обратное отображение $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ в нуле не дифференцируемо.

Если $f: U \to V$ — диффеоморфизм, то отображение $f_* : \mathfrak{B}(U) \to \mathfrak{B}(V)$ можно определить. В самом деле, положив

$$(f_*(X))(x) = (f_*)_{f^{-1}(x)}(X(f^{-1}(x))),$$

получим корректно определенное отображение.

В отличие от векторных полей отображение ковекторных полей всегда можно определить по формуле

$$(f^*(\omega))_x(\xi) = \omega_{f(x)}((f_*)_x \xi),$$

где ξ — вектор из $T_x(\mathbb{R}^2)$.

Если обозначить $\varphi = f^*\omega$, можно получить

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},$$

или

$$\omega_i = \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \varphi_\alpha.$$

Если отображение f обратимо и $g = f^{-1}$, то последнюю формулу можно переписать в виде

$$\varphi_i = \frac{\partial g^\alpha}{\partial x^i} \omega_\alpha. \qquad (1.14)$$

2. ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ

2.1. Определение тензора

Введем определение тензорного поля. Для упрощения обозначений ограничимся случаем поля типа (2, 1), общий случай ничем не отличается. Пусть $\mathfrak{B}(U)$ — векторное пространство векторных полей в области U, а $\mathfrak{B}^*(U)$ — векторное пространство ковекторных полей в той же области. Зададим функцию, линейную по каждому аргументу:

$$T: \mathfrak{B}(U) \times \mathfrak{B}(U) \times \mathfrak{B}^*(U) \to \mathfrak{F}(U). \qquad (2.1)$$

Определим линейность функции T:

$$T(X + Y, W; \varphi) = T(X, W; \varphi) + T(Y, W; \varphi);$$

$$T(fX, W; \varphi) = fT(X, W; \varphi),$$

где X, Y, W — векторные поля; φ — ковекторное поле; f — функция; то же верно для остальных аргументов функции T.

Пусть в области пространства, в которой рассматривается поле T, задана система координат x^1, x^2, x^3. Положим

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, dx^k\right) = T^k_{ij}.$$

Функции T^k_{ij} называют *координатами тензорного поля T* в данной системе координат.

Пусть z^1, z^2, z^3 — другая система координат в той же области пространства. Обозначим

$$T\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}, dz^k\right) = T'^k_{ij}.$$

Согласно формулам (1.9) и (1.10) имеем

$$T'^k_{ij} = T\left(\frac{\partial}{\partial z^i}, \frac{\partial}{\partial z^j}, dz^k\right) = T\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial z^i}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial x^\beta}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial x^\beta}, \frac{\partial z^k}{\partial x^\gamma}\, dx^\gamma\right) =$$

$$= \frac{\partial x^\alpha}{\partial z^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial z^j}\frac{\partial z^k}{\partial x^\gamma} T\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial}{\partial x^\beta}, dx^\gamma\right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial z^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial z^j}\frac{\partial z^k}{\partial x^\gamma} T^\gamma_{\alpha\beta},$$

т. е. формулу для преобразования координат тензорного поля типа (2, 1):

$$T'^k_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial z^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial z^j}\frac{\partial z^k}{\partial x^\gamma} T^\gamma_{\alpha\beta}. \qquad (2.2)$$

Таким образом, каждому тензорному полю типа (2, 1) и системе координат x^1, x^2, x^3 ставится в соответствие набор из $3^{2+1} = 27$ функций $T^k_{ij}(x)$, преобразующихся при переходе к системе координат z^1, z^2, z^3 по формуле (2.2). Можно показать, что задание такого соответствия определяет тензорное поле в смысле данного выше определения.

Итак, имеем два определения тензорного поля: 1) как линейного отображения (см. формулу (2.1)), 2) с помощью сопоставления каждой системе координат функций $T^k_{ij}(x)$ координат тензорного поля, которые преобразуются при замене системы координат по формуле (2.2).

Изложенное выше верно для тензоров любого типа (p, q). Тензорное поле в этом случае называют p раз ковариантным и q раз контравариантным. Число $p + q$ называют *рангом* тензорного поля.

Упражнение 2.1. Дайте определение тензоров типа (2, 0), (1, 1) и (0, 2). Напишите для них аналоги формулы (2.2).

Тензорные поля возникают при решении многих физических задач.

Пример 2.1. Пусть в точке x проводника приложен вектор $\boldsymbol{E}(x)$ напряженности электрического поля. Тогда в этой же точке возникает вектор $\boldsymbol{j}(x)$ плотности тока. Зависимость $\boldsymbol{j}(x)$ от $\boldsymbol{E}(x)$ линейна (этот факт доказан экспериментально). Если система координат фиксирована, имеем

$$\boldsymbol{j}^l(x) = c^l_s(x)\boldsymbol{E}^s(x), \quad l = 1,\ 2,\ 3.$$

Поскольку зависимость $j(x)$ от $\boldsymbol{E}(x)$ линейна, числа $c^l_s(x)$ при изменении системы координат изменяются по формуле (2.2), т. е. являются координатами тензора — *тензора теплопроводности*. В нашей терминологии имеем тензорное поле типа (1, 1). Отметим, что если среда однородна и изотропна, то матрица (c^l_s) скалярная, т. е. $\boldsymbol{j} = c\boldsymbol{E}$; в общем случае это не так.

2.2. Операции над тензорными полями

Рассмотрим $\mathfrak{T}^q_p(U)$ — множество тензорных полей типа (p, q). Тензорные поля одного типа можно складывать, умножать на числа, используя формулы, аналогичные формулам (1.3) для векторных полей. Легко проверить, что множество $\mathfrak{T}^q_p(U)$ с этими операциями является векторным пространством (бесконечномерным). Пусть, например, $T, S \in \mathfrak{T}^1_2(U)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Рассмотрим тензорные поля $R = T + S$ и $V = \lambda T$. Ясно, что для координат этих тензорных полей справедливы следующие равенства:

$$R^i_{jk}(x) = T^i_{jk}(x) + S^i_{jk}(x); \quad V^i_{jk}(x) = \lambda T^i_{jk}(x).$$

Отметим, что тензорные поля можно умножать не только на числа, но и на функции. Если, например, $T \in \mathfrak{T}^1_2(U)$, а f — функция и $W = fT$, $(W \in \mathfrak{T}^1_2(U))$, то

$$W^i_{jk}(x) = f(x)T^i_{jk}(x).$$

Положим

$$\mathfrak{T}(U)=\bigoplus_{p,q}\mathfrak{T}^q_p(U)$$

(прямая сумма пространств). В множестве $\mathfrak{T}(U)$ также есть структура линейного пространства, порожденная структурами векторных пространств в каждом множестве из множеств $\mathfrak{T}^q_p(U)$.

Введем в $\mathfrak{T}(U)$ одну важную операцию — тензорное произведение. Пусть $T\in\mathfrak{T}^q_p(U)$, а $S\in\mathfrak{T}^s_r(U)$. Определим *тензорное произведение* полей T и S как тензорное поле $R=T\otimes S\in\mathfrak{T}^{q+s}_{p+r}(U)$. Объясним эту конструкцию на примере: $p=2$, $q=0$, $r=s=1$, общий случай будет очевиден. Положим

$$R(X,Y,Z;\ \varphi)=T(X,Y)\cdot S(Z;\ \varphi).$$

Можно легко проверить, что построенный объект есть линейная функция своих аргументов и, следовательно, является тензорным полем.

Упражнение 2.2. Докажите следующие свойства тензорного умножения:

1) $(T_1+T_2)\otimes S=T_1\otimes S+T_2\otimes S$, где $T_1,T_2\in\mathfrak{T}^q_p(U)$, $S\in\mathfrak{T}^s_r(U)$;

2) $T\otimes(S_1+S_2)=T\otimes S_1+T\otimes S_2$, где $T\in\mathfrak{T}^q_p(U)$, $S_1,S_2\in\mathfrak{T}^s_r(U)$;

3) $(\lambda T)\otimes S=T\otimes(\lambda S)=\lambda(T\otimes S)$, где $T\in\mathfrak{T}^q_p(U)$, $S\in\mathfrak{T}^s_r(U)$, $\lambda\in\mathbb{R}$;

4) $(T\otimes S)\otimes R=T\otimes(S\otimes R)$, где $T\in\mathfrak{T}^q_p(U)$, $S\in\mathfrak{T}^s_r(U)$, $R\in\mathfrak{T}^k_m(U)$.

Свойства 1–4 показывают, что множество $\mathfrak{T}(U)$ является кольцом относительно операций сложения и тензорного умножения. Линейные операции и тензорное умножение удовлетворяют обычным аксиомам кольца и векторного пространства, а также обладают свойством

$$(\lambda T)\otimes S=T\otimes(\lambda S)=\lambda(T\otimes S),$$

где $T,S\in\mathfrak{T}(U)$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Такие алгебраические структуры называют *алгебрами*. Таким образом, построили *алгебру тензорных полей* в области U, т. е. тензорную алгебру.

Пусть $U\subseteq\mathbb{R}^3$ — область и x^1, x^2, x^3 — произвольная система координат в этой области. Как объяснялось выше (см. разд. 1), определены векторные поля $\frac{\partial}{\partial x^1}$, $\frac{\partial}{\partial x^2}$, $\frac{\partial}{\partial x^3}$ и ковекторные поля dx^1, dx^2, dx^3, причем для каждой точки $x\in U$ векторы $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_x$, $\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_x$, $\left(\frac{\partial}{\partial x^3}\right)_x$ образуют базис касательного пространства $T_x(\mathbb{R}^3)$, линейные функции $(dx^1)_x$, $(dx^2)_x$, $(dx^3)_x$ — базис соответствующего сопряженного пространства.

Теорема 2.1. Любое тензорное поле $T\in\mathfrak{T}^1_2(U)$ может быть записано в виде

$$T=T^k_{ij}dx^i\otimes dx^j\otimes\frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Доказательство. Обе части данной формулы являются тензорными полями. Их значения на наборе $\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha},\frac{\partial}{\partial x^\beta},dx^\gamma\right)$ равны значениям функции $T^\gamma_{\alpha\beta}$, т. е. координаты тензоров совпадают, тогда совпадают и сами тензорные поля.

Теорема справедлива и для тензоров произвольного типа (p,q).

Упражнение 2.3. Напишите формулы для тензоров второго ранга, аналогичные формуле, приведенной в теореме 2.1.

Еще одна важная операция в тензорной алгебре — операция *свертки*.

Пусть задано тензорное поле T типа (2, 1). Его сверткой по первому верхнему и первому нижнему индексам называют тензорное поле $R=C^1_1T$ (C^1_1 — операция свертки), координаты которого вычисляют по формуле

$$R_i(x)=T^\alpha_{\alpha i}(x).$$

Докажем, что мы действительно получили координаты тензорного поля R типа (1, 0). С помощью формулы (2.2) проверим справедливость формулы

$$R'_i(x)=\frac{\partial x^\beta}{\partial z^i}R_\beta(x).$$

Используя формулу (1.8), получим

$$R'_i(x) = T'^{\alpha}_{\alpha i}(x) = \frac{\partial x^s}{\partial z^\alpha}\frac{\partial x^t}{\partial z^i}\frac{\partial z^\alpha}{\partial x^r}T^r_{st}(x) = \delta^s_r\frac{\partial x^t}{\partial z^i}T^r_{st}(x) =$$

$$= \frac{\partial x^t}{\partial z^i}T^s_{st}(x) = \frac{\partial x^\beta}{\partial z^i}R_\beta(x),$$

что и требовалось доказать.

Можно брать свертку тензорного поля T типа (2, 1) и по другой паре индексов, т. е. можно построить тензор $R' = C^1_2 T$. В этом случае проводят свертку по первому верхнему и второму нижнему индексам.

Упражнение 2.4. Найдите координаты тензора R'.

Пусть задано тензорное поле T типа (p, q). Его сверткой по первому верхнему и первому нижнему индексам будет тензорное поле $R = C^1_1 T$ типа $(p-1, q-1)$.

Пример 2.2. Пусть $\omega = \omega_i dx^i$ — ковекторное поле, $X = \xi^j X_j$ — векторное поле. Возьмем тензор $\omega \otimes X$ и применим операцию свертки. Получим тензор $C^1_1(\omega \otimes X)$ типа (0, 0), т. е. функцию, и эта функция равна $\omega_i \xi^i$. С учетом формулы (1.6) получим $\omega(X) = C^1_1(\omega \otimes X)$.

Геометрическое определение тензора второго ранга приведено в работе [2].

2.3. Тензоры в пространствах с метрикой

Пусть в каждом касательном пространстве $T_x(\mathbb{R}^3)$ задано скалярное произведение. Положим

$$g_{ij}(x) = ((X_i)_x, (X_j)_x).$$

Тогда функции $g_{ij}(x)$ представляют собой координаты так называемого *метрического тензора*. Его можно записать в виде

$$g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j.$$

Очевидно, что матрица (g_{ij}) симметрическая и квадратичная форма

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

положительно определена.

Пример 2.3. Евклидова метрика в пространстве $\mathbb{R}^3$ есть $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Если в пространстве задана метрика (метрический тензор), то определены операции *поднимания* и *опускания индексов*.

Пусть, например, T — тензорное поле типа (1, 1). Возьмем тензорное произведение $g \otimes T$, а затем применим операцию свертки. В результате получим тензор типа (2, 0): $S = C^1_1(g \otimes T)$. Его координаты вычисляют по формуле

$$S_{ij} = g_{\alpha i}T^\alpha_j.$$

Говорят, что тензор S получен из тензора T *опусканием* индекса. Тензор R с координатами

$$R^{ij} = g^{i\alpha}T^j_\alpha,$$

где (g^{ij}) — матрица, обратная к матрице (g_{ij}):

$$g_{i\alpha}g^{\alpha j} = \delta^j_i,$$

получим из тензора T *поднятием* индекса. Если сначала опустить индекс, а затем поднять (или наоборот), то получится первоначально заданный тензор. В самом деле,

$$g^{\beta i}S_{\beta j} = g^{\beta i}g_{\beta\alpha}T^\alpha_j = g^{i\beta}g_{\beta\alpha}T^\alpha_j = \delta^i_\alpha T^\alpha_j = T^i_j.$$

Пример 2.4. Пусть задана евклидова метрика, т. е. $g_{ij} = \delta_{ij}$. Тогда

$$S_{ij} = g_{\alpha i}T^\alpha_j = \delta_{\alpha i}T^\alpha_j = T^i_j.$$

Таким образом, в случае евклидовой метрики верхние и нижние индексы не различаются.

2.4. Действие отображений на тензорные поля

В разд. 1 было показано, как действуют отображения на векторные и ковекторные поля, т. е. на тензорные поля типов (0, 1) и (1, 0) соответственно. Рассмотрим общий случай. Пусть $f\colon U \to V$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение. Поскольку невозможно определить отображение векторных полей $f_*\colon \mathfrak{T}^1(U) \to \mathfrak{T}^1(V)$, это нельзя сделать и для полей типа $\mathfrak{T}^q(U)$ при $q > 1$. В то же время отображение $f^*\colon \mathfrak{T}_p(V) \to \mathfrak{T}_p(U)$ определить можно. Положим

$$(f^*(T))_x(\xi_1, \ldots, \xi_p) = T_{f(x)}((f_*)_x\xi_1, \ldots, (f_*)_x\xi_p), \qquad (2.3)$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_p \in T_x(\mathbb{R}^n)$.

Пример 2.5. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ евклидову метрику, приведенную в примере 2.3. Пусть задана поверхность $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, $(u, v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$, где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y, z)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. Имеем, таким образом, отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^3$, которое индуцирует тензор $h = f^*g$ типа (2, 0) в области U, где g – евклидова метрика в пространстве $\mathbb{R}^3$. Обозначив $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x^3$, $u = z^1$, $v = z^2$, с помощью формулы (2.3) получим

$$h_{ij} = g\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial z^i}X_\alpha, \frac{\partial x^\beta}{\partial z^j}X_\beta\right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial z^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial z^j}g\left(X_\alpha, X_\beta\right) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial z^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial z^j}\delta_{\alpha\beta}.$$

В классических обозначениях имеем

$$h_{11} = (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_u); \quad h_{12} = (\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v), \quad h_{22} = (\boldsymbol{r}_v, \boldsymbol{r}_v),$$

где $\boldsymbol{r}_u = (x_u,\ y_u,\ z_u)$, $\boldsymbol{r}_v = (x_v,\ y_v,\ z_v)$. Мы получили *первую квадратичную форму* поверхности:

$$ds^2 = h_{ij}dx^i dx^j.$$

Пример 2.6. Вычислим первую квадратичную форму сферы единичного радиуса. Зададим

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u.$$

Значит,

$$\boldsymbol{r}_u = (-\sin u \cos v,\ \ -\sin u \sin v;\ \ \cos u);$$

$$\boldsymbol{r}_v = (-\sin v \cos u,\ \ \cos v \cos u;\ \ 0),$$

откуда

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u\ dv^2.$$

Упражнение 2.5. Пусть поверхность задана как график функции

$$z = f(x, y).$$

Докажите, что

$$ds^2 = \left(1 + f_x^2\right)dx^2 + 2f_x f_y dx dy + \left(1 + f_y^2\right)dy^2.$$

Пусть теперь отображение $f\colon U \to V$ – диффеоморфизм. Тогда отображение $\tilde{f}\colon \mathfrak{T}_p^q(U) \to \mathfrak{T}_p^q(V)$ можно построить. Покажем, как это можно выполнить. Следует обратить внимание на то, что отображения f_* и f^* действуют в *разные стороны*. Поэтому векторное поле сносится с помощью отображения f_*, а ковекторное – с помощью отображения $\left(f^{-1}\right)^*$. Если (x^1, x^2), (z^1, z^2) – системы координат соответственно в областях U и V и отображение f задается формулами

$$z^1 = z^1\left(x^1, x^2\right); \qquad z^2 = z^2\left(x^1, x^2\right),$$

то координаты тензора $\tilde{f}T$ типа (1,1) вычисляются по формуле, аналогичной формулам (1.13), (1.14):

$$\left(\tilde{f}T\right)_j^i = \frac{\partial z^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial z^j}T_\beta^\alpha. \qquad (2.4)$$

Такие же формулы имеют место и для тензорного поля произвольного типа (p, q).

3. ПРОИЗВОДНАЯ ЛИ

Рассмотрим дифференцирование тензорных полей. Назовем отображение $D\colon \mathfrak{T}(U) \to \mathfrak{T}(U)$ *дифференцированием*, если оно аддитивно, сохраняет тип тензора и обладает свойством

$$D(T \otimes S) = DT \otimes S + T \otimes DS \qquad (3.1)$$

для всех $T, S \in \mathfrak{T}(U)$.

Дифференцирование полностью определяется своим действием на функции, векторные и ковекторные поля. Это следует из формулы (3.1) и теоремы 2.1.

3.1. Фазовый поток

Для упрощения обозначений считаем, что $n = 2$. Пусть в области U задано векторное поле $X = \xi^i X_i$. С этим полем связана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} = \xi^1\left(x^1(t),\ x^2(t)\right); \\ \dfrac{dx^2}{dt} = \xi^2\left(x^1(t),\ x^2(t)\right). \end{cases}$$

Линии $x^i = x^i(t)$, $i = 1, 2$, называют *фазовыми кривыми* векторного поля X. Обозначим

$$F_t^i\left(x_0^1, x_0^2\right) = x^i = x^i\left(t, x_0^1, x_0^2\right), \quad i = 1,\ 2, \tag{3.2}$$

фазовые кривые поля X с начальными условиями

$$x^i|_{t=0} = x_0^i, \quad i = 1,\ 2.$$

Формула (3.2) задает отображение

$$F_t\colon \left(x_0^1,\ x_0^2\right) \to \left(x^1\left(t, x_0^1,\ x_0^2\right),\ x^2\left(t, x_0^1,\ x_0^2\right)\right)$$

области U, зависящее от параметра t (сдвиг за время t вдоль фазовой кривой). Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что отображение F_t, определенное при малых t в окрестности данной точки $\left(x_0^1,\ x_0^2\right)$, является диффеоморфизмом. При малых t явный вид отображения F_t таков:

$$x^i\left(t, x_0^1,\ x_0^2\right) = x_0^i + t\xi^i\left(x_0^1,\ x_0^2\right) + o(t), \quad i = 1, 2.$$

С той же точностью $o(t)$ матрица Якоби отображения F_t имеет вид

$$\frac{\partial x^i}{\partial x_0^j} = \delta_j^i + t\frac{\partial \xi^i}{\partial x_0^j} + o(t). \tag{3.3}$$

Матрица Якоби обратного отображения выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial x_0^i}{\partial x^j} = \delta_j^i - t\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + o(t). \tag{3.4}$$

3.2. Производная Ли тензорного поля

Приведем основное определение производной Ли тензорного поля. Ограничимся частным случаем тензоров типа (2, 1).

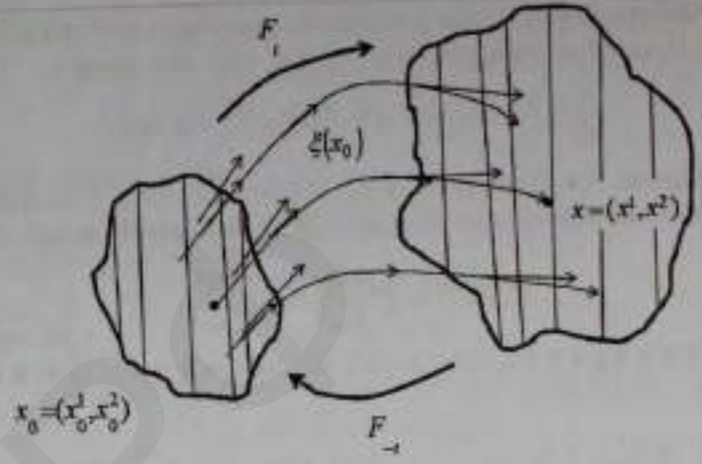


Рис. 3.1

Перенесем тензор из точки $x = \left(x^1(t),\ x^2(t)\right)$ в точку $x_0 = \left(x_0^1, x_0^2\right)$ с помощью отображения $\tilde{F}_{-t}$ (рис. 3.1). Согласно формуле (2.4) имеем

$$\left(\tilde{F}_{-t}T\right)_{jk}^i = \frac{\partial x_0^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x_0^j}\frac{\partial x^\gamma}{\partial x_0^k}T_{\beta\gamma}^\alpha. \tag{3.5}$$

Производной Ли тензорного поля типа (2, 1) в направлении векторного поля X назовем тензорное поле $L_X T$ типа (2, 1), координаты которого вычисляют по формуле

$$\left(L_X T\right)_{jk}^i(x) = \left[\frac{d}{dt}\left(\tilde{F}_{-t}T\right)_{jk}^i\right]\bigg|_{t=0}. \tag{3.6}$$

Пусть $T = S \otimes R$, где $S \in \mathfrak{T}_1^1(U)$, $R \in \mathfrak{T}_0^1(U)$, тогда в соответствии с обычным свойством производной функции имеем

$$\left(L_X T\right)_{jk}^i(x_0) = \left[\frac{d}{dt}\left(\tilde{F}_{-t}T\right)_{jk}^i(x_0)\right]\bigg|_{t=0} = \left(L_X S\right)_j^i(x_0) \otimes R_k(x_0) +$$

$$+ S_j^i(x_0) \otimes \left(L_X R\right)_k(x_0),$$

аддитивность очевидна. Таким образом, производная Ли является дифференцированием алгебры тензорных полей $\mathfrak{T}(U)$.

Выведем формулы для вычисления координат тензорного поля $L_X T$. Пусть T — тензор типа (0, 0), т. е. функция. Имеем

$$\frac{d}{dt}[(f(F_t(x))]|_{t=0} = \partial_X f(x) = L_X f(x). \qquad (3.7)$$

Теорема 3.1. Производная Ли векторного поля $Y = \eta^i X_i$ по направлению векторного поля $X = \xi^j X_j$ выражается формулой

$$(L_X Y)^j = \xi^\alpha \frac{\partial \eta^j}{\partial x^\alpha} - \eta^\alpha \frac{\partial \xi^j}{\partial x^\alpha}. \qquad (3.8)$$

Доказательство. На основании формул (2.4) и (3.4) имеем

$$\left(\hat{F}_{-t} Y\right)^j = \left(\delta^j_\alpha - t\frac{\partial \xi^j}{\partial x^\alpha} + o(t)\right)\eta^\alpha = \eta^j - t\frac{\partial \xi^j}{\partial x^\alpha}\eta^\alpha + o(t).$$

Взяв производную по t и устремляя t к нулю, получим

$$(L_X Y)^j = \frac{d\eta^j}{dt} - \eta^\alpha \frac{\partial \xi^j}{\partial x^\alpha}. \qquad (3.9)$$

Тогда

$$\frac{d\eta^j}{dt} = \frac{\partial \eta^j}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{dt} = \xi^\alpha \frac{\partial \eta^j}{\partial x^\alpha}.$$

Подставив это выражение в (3.9), получим формулу (3.8), что и требовалось доказать.

Теорема 3.2. Производная Ли ковекторного поля $\omega = \omega_i dx^i$ по направлению векторного поля $X = \xi^j X_j$ выражается формулой

$$(L_X \omega)_i = \xi^\alpha \frac{\partial \omega_i}{\partial x^\alpha} + \omega_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i}. \qquad (3.10)$$

Доказательство. Используя формулы (2.4) и (3.3), имеем

$$\left(\hat{F}_{-t}\omega\right)_i = \left(\delta^\alpha_i + t\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i_0} + o(t)\right)\omega_\alpha = \omega_i + t\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i_0}\omega_\alpha + o(t).$$

Взяв производную по t и устремив t к нулю, получим

$$(L_X \omega)_i = \frac{d\omega_i}{dt} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i}\omega_\alpha = \xi^\alpha \frac{\partial \omega_i}{\partial x^\alpha} + \omega_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i},$$

что и требовалось доказать.

Из формул (3.7), (3.8) и (3.10) легко вывести, что

$$L_X C^1_1(\omega \otimes Y) = C^1_1 L_X(\omega \otimes Y). \qquad (3.11)$$

С одной стороны, имеем

$$L_X C^1_1(\omega \otimes Y) = L_X(\omega(Y)) = L_X(\omega_i \eta^i) =$$
$$= (\partial_X \omega_i)\eta^i + \omega_i(\partial_X \eta_i),$$

а с другой —

$$C^1_1 L_X(\omega \otimes Y) = C^1_1(L_X \omega \otimes Y + \omega \otimes L_X Y) =$$
$$= (L_X \omega)(Y) + \omega(L_X Y) =$$
$$= \left(\xi^\alpha \frac{\partial \omega_i}{\partial x^\alpha} + \omega_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i}\right)\eta^i + \omega_i\left(\xi^\alpha \frac{\partial \eta^i}{\partial x^\alpha} - \eta^\alpha \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha}\right) =$$
$$= (\partial_X \omega_i)\eta^i + \omega_i(\partial_X \eta^i).$$

Поле $L_X Y$ обозначается $[X, Y]$ и называется *коммутатором* полей X и Y. Из формулы (3.8) следует, что $[Y, X] = -[X, Y]$.

Пример 3.1. Коммутатор базисных полей равен нулю:

$$[X_i, X_j] = 0.$$

Пример 3.2. Вычислим $[fX, Y]$ и $[X, fY]$. Получим

$$[fX, Y] = -[Y, fX] = -L_Y(fX) = -(L_Y f)X - fL_Y X =$$
$$= -(\partial_Y f)X + f[X, Y];$$
$$[X, fY] = (\partial_X f)Y + f[X, Y].$$

Теорема 3.3. Пусть X и Y — векторные поля. Тогда

$$\partial_{[X,Y]} = \partial_X \partial_Y - \partial_Y \partial_X.$$

Доказательство. Вычислим коммутатор $[\partial_X, \partial_Y] = \partial_X \partial_Y - \partial_Y \partial_X$. Имеем

$$[\partial_X, \partial_Y]f = \partial_X(\partial_Y f) - \partial_Y(\partial_X f) = \partial_X\left(\eta^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) - \partial_Y\left(\xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) =$$

$$= \xi^j \eta^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \eta^j \xi^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} =$$

$$= \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial f}{\partial x^i} = \partial_{[X,Y]} f.$$

Пример 3.3. Вычислим коммутатор векторных полей $X = x\dfrac{\partial}{\partial y}$ и $Y = y\dfrac{\partial}{\partial x}$. Имеем

$$\partial_X(\partial_Y f) - \partial_Y(\partial_X f) = x\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}\right) - y\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= x\underset{x}{\frac{\partial f}{\partial \cancel{y}}} - y\underset{y}{\frac{\partial f}{\partial \cancel{x}}}.$$

Итак,

$$[X,Y] = x\underset{x}{\frac{\partial}{\partial \cancel{y}}} - y\underset{y}{\frac{\partial}{\partial \cancel{x}}}.$$

Теорема 3.4. Производная Ли тензоров второго ранга выражается формулами

$$(L_X T)^{ij} = \xi^\alpha \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^\alpha} - T^{\alpha j}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha} - T^{i\alpha}\frac{\partial \xi^j}{\partial x^\alpha}; \qquad (3.12)$$

$$(L_X T)^i_j = \xi^\alpha \frac{\partial T^i_j}{\partial x^\alpha} - T^\alpha_j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^\alpha} + T^i_\alpha \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j}; \qquad (3.13)$$

$$(L_X T)_{ij} = \xi^\alpha \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^\alpha} + T_{\alpha j}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} + T_{i\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j}. \qquad (3.14)$$

Для тензоров произвольного ранга производная Ли определяется аналогично.

Доказательство. Ограничимся доказательством формулы (3.14). Согласно свойствам производной Ли имеем

$$L_X\left(T_{ij}dx^i \otimes dx^j\right) =$$

$$= (L_X T_{ij})\, dx^i \otimes dx^j + T_{ij}\left(L_X\left(dx^i\right) \otimes dx^j + dx^i \otimes L_X\left(dx^j\right)\right) =$$

$$= \xi^\alpha \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^\alpha} dx^i \otimes dx^j + T_{\alpha j}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} dx^i \otimes dx^j + T_{i\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j}\, dx^i \otimes dx^j =$$

$$= \left(\xi^\alpha \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^\alpha} + T_{\alpha j}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} + T_{i\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j}\right) dx^i \otimes dx^j.$$

Пример 3.4. Пусть g_{ij} — метрический тензор и X — векторное поле. На основании формулы (3.14) получаем

$$(L_X g)_{ij} = \xi^\alpha \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} + g_{\alpha j}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^i} + g_{i\alpha}\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^j} = u_{ij} \qquad (3.15)$$

— *тензор малой деформации.*

Пример 3.5. Рассмотрим поверхность

$$z = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

Первая квадратичная форма поверхности имеет вид

$$ds^2 = \left(1 + x^2\right) dx^2 + 2xy\, dxdy + \left(1 + y^2\right) dy^2.$$

Вычислим тензор малой деформации $u = L_X g$, где $X = x\partial_x$. Для этого используем формулу (3.15), в которой $x^1 = x$, $x^2 = y$, $\xi^1 = x$, $\xi^2 = 0$. Получим

$$u_{11} = \xi^1 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial g_{11}}{\partial x^2} + g_{11}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + g_{21}\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} + g_{11}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + g_{12}\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} =$$

$$= 4x^2 + 2.$$

Аналогично получим u_{12}:

$$u_{12} = \xi^1 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^1} + \xi^2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + g_{12}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^1} + g_{22}\frac{\partial \xi^2}{\partial x^1} + g_{11}\frac{\partial \xi^1}{\partial x^2} + g_{12}\frac{\partial \xi^2}{\partial x^2} =$$

$$= 2xy.$$

Вычислим координаты u_{21}, u_{22}:

$$u_{21} = 2xy; \quad u_{22} = 0;$$

$$(u_{ij}) = \left((L_X g)_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 4x^2 + 2 & 2xy \\ 2xy & 0 \end{pmatrix}.$$

4. КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

4.1. Ковариантная производная векторных полей

Ковариантной производной в направлении векторного поля X называется правило, сопоставляющее векторному полю Y векторное поле $\nabla_X Y$, если выполнены следующие условия:

$$\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z;$$

$$\nabla_X (fY) = (\partial_X f) Y + f \nabla_X Y;$$

$$\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z;$$

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y,$$

где Z — также векторное поле.

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^3$ и x^1, x^2, x^3 — система координат в области U. Тогда

$$\nabla_{X_i}(X_j) = \Gamma^k_{ij} X_k, \quad i, j = 1,\ 2,\ 3. \tag{4.1}$$

Помимо термина «*ковариантная производная*» используют также термин «*линейная связность*». Функции Γ^k_{ij} называют *коэффициентами линейной связности*.

Пусть z^1, z^2, z^3 — другая система координат в области U. Тогда

$$\nabla_{Z_i}(Z_j) = \Gamma'^k_{ij} Z_k, \quad i, j = 1,\ 2,\ 3.$$

Выразим поля Z_i через X_j и подставим в эту формулу. Получим

$$\nabla_{\frac{\partial x^m}{\partial z^i} X_m} \left(\frac{\partial x^l}{\partial z^j} X_l \right) = \frac{\partial x^m}{\partial z^i} \nabla_{X_m} \left(\frac{\partial x^l}{\partial z^j} X_l \right) =$$

$$= \frac{\partial x^m}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j} \nabla_{X_m} X_l + \frac{\partial x^m}{\partial z^i} \frac{\partial^2 x^l}{\partial x^m \partial z^j} X_l =$$

$$= \frac{\partial x^m}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j} \Gamma^k_{ml} X_k + \frac{\partial^2 x^l}{\partial z^i \partial z^j} X_l =$$

$$= \left(\frac{\partial x^m}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j} \Gamma^k_{ml} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial z^i \partial z^j} \right) X_k = \Gamma'^s_{ij} \frac{\partial x^k}{\partial z^s} X_k.$$

Тогда

$$\Gamma'^s_{ij} = \frac{\partial z^s}{\partial x^k} \left(\frac{\partial x^m}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j} \Gamma^k_{ml} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial z^i \partial z^j} \right).$$

Очевидно, что функции Γ'^s_{ij} не являются координатами тензора (так как при переходе к другой системе координат не изменяются по тензорному закону). Однако нетрудно вычислить разность функций $\Gamma'^s_{ij} - \Gamma'^s_{ji}$:

$$\Gamma'^s_{ij} - \Gamma'^s_{ji} = \frac{\partial z^s}{\partial x^k} \frac{\partial x^m}{\partial z^i} \frac{\partial x^l}{\partial z^j} \left(\Gamma^k_{ml} - \Gamma^k_{lm} \right).$$

Таким образом, функции $T^k_{ml} = \Gamma^k_{ml} - \Gamma^k_{lm}$ являются координатами тензора, называемого *тензором кручения*. При $T = 0$ связность называется *симметричной* или *связностью без кручения*, т. е. $\Gamma^k_{ml} = \Gamma^k_{lm}$ для всех k, l, m.

Если система координат фиксирована, будем использовать обозначение $\nabla_k = \nabla_{X_k}$.

Пример 4.1. Пусть $X_i = e_i$, $i = 1,\ 2,\ 3,$ — стандартный базис в пространстве $\mathbb{R}^3$. Положим $\nabla_X Y = \partial_X(\eta^i) X_i$, где $Y = \eta^i X_i$. Легко увидеть, что мы получили линейную связность, для которой все функции Γ^k_{ml} равны нулю. Она называется *канонической линейной связностью* в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Упражнение 4.1. Рассмотрите пространство $\mathbb{R}^3$ и положите

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2} X \times Y,$$

где ∇ — каноническая связность. Проверьте, что мы получили линейную связность, для которой коэффициенты линейной связности равны

$$\Gamma^3_{12} = \Gamma^1_{23} = \Gamma^2_{31} = \frac{1}{2}; \quad \Gamma^2_{13} = \Gamma^1_{32} = \Gamma^3_{21} = -\frac{1}{2},$$

а остальные коэффициенты — нулю.

4.2. Ковариантная производная тензорных полей

Пусть X — векторное поле. Рассмотрим дифференцирование ∇_X алгебры $\mathfrak{T}(U)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_X f = \partial_X f$ для $f \in \mathfrak{F}(U)$;

2) $\nabla_X C^1_1(\omega \otimes Y) = C^1_1 \nabla_X (\omega \otimes Y)$ для $\omega \in \mathfrak{T}_1(U)$, $Y \in \mathfrak{T}^1(U)$;

3) $\nabla_X Y$ для векторных полей определяется формулой (4.1).

Покажем, что этими условиями операция дифференцирования ∇_X определена однозначно. С одной стороны,

$$\nabla_k C_1^1(\omega\otimes X_j) = \nabla_k\omega_j = \frac{\partial\omega_j}{\partial x^k},$$

где $\omega=\omega_i dx^i$, а с другой —

$$C_1^1\nabla_k(\omega\otimes X_j) = C_1^1(\nabla_k\omega\otimes X_j + \omega\otimes\nabla_k X_j) = (\nabla_k\omega)_j + \omega_i\Gamma^i_{kj},$$

откуда

$$(\nabla_k\omega)_j = \frac{\partial\omega_j}{\partial x^k} - \omega_i\Gamma^i_{kj}.$$

Итак, для векторных и ковекторных полей T ковариантная производная ∇_k определяется соответственно по формулам

$$(\nabla_k T)^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{k\alpha}T^\alpha; \tag{4.2}$$

$$(\nabla_k T)_i = \frac{\partial T_i}{\partial x^k} - \Gamma^\alpha_{ki}T_\alpha. \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. Ковариантные производные тензоров второго ранга вычисляются по формулам

$$(\nabla_k T)^{ij} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{k\alpha}T^{\alpha j} + \Gamma^j_{k\alpha}T^{i\alpha}; \tag{4.4}$$

$$(\nabla_k T)^i_j = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{k\alpha}T^\alpha_j - \Gamma^\alpha_{kj}T^i_\alpha; \tag{4.5}$$

$$(\nabla_k T)_{ij} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^\alpha_{ki}T_{\alpha j} - \Gamma^\alpha_{kj}T_{i\alpha}. \tag{4.6}$$

Ковариантная производная для тензоров произвольного ранга определяется по формулам, аналогичным (4.4)–(4.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся случаем тензорного поля типа (2, 0). Использовав свойства 1–3 операции ∇_k, получим

$$\nabla_k\left(T_{ij}dx^i\otimes dx^j\right) = \nabla_k\left(T_{ij}\right)dx^i\otimes dx^j + T_{ij}\nabla_k\left(dx^i\otimes dx^j\right) =$$
$$= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k}dx^i\otimes dx^j - T_{ij}\Gamma^i_{kl}dx^l\otimes dx^j - T_{ij}dx^i\otimes\Gamma^j_{kl}dx^l =$$
$$= \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ki}T_{lj} - \Gamma^l_{kj}T_{il}\right)dx^i\otimes dx^j,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Значение ковариантной производной $\nabla_X Y$ в точке x зависит только от значения поля X в этой точке.

4.3. Параллельный перенос

Пусть задана кривая $x(t) = \left(x^1(t),\ x^2(t),\ x^3(t)\right)$, $a\le t\le b$. Рассмотрим вектор скорости этой кривой $\xi(t) = \left(\xi^1(t), \xi^2(t), \xi^3(t)\right)$. Имеем

$$\xi^k(t) = \frac{dx^k}{dt},\quad k=1,2,3.$$

Пусть X — такое векторное поле, что на заданной кривой оно принимает значения, равные ξ. Будем говорить, что тензорное поле T *параллельно* вдоль кривой, если его ковариантная производная в каждой точке кривой по направлению вектора скорости равна нулю:

$$\nabla_X T = 0,\quad a\le t\le b.$$

Корректность этого определения вытекает из предыдущего замечания (см. подразд. 4.2).

Пусть $T = Y = \eta^j X_j$ — векторное поле. Имеем

$$\nabla_X Y = \xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i}X_j + \xi^i\eta^j\nabla_i X_j = \left(\frac{d\eta^k}{dt} + \frac{dx^i}{dt}\Gamma^k_{ij}\eta^j\right)X_k.$$

Поэтому условие параллельности поля вдоль кривой запишем в виде

$$\frac{d\eta^k}{dt} + \frac{dx^i}{dt}\Gamma^k_{ij}\eta^j = 0,\quad k=1,2,3. \tag{4.7}$$

Поскольку система (4.7) линейна, она имеет единственное решение с данными начальными условиями, причем решение существует для всех t из заданного отрезка. Таким образом, определен результат параллельного переноса вектора вдоль кривой (рис. 4.1).

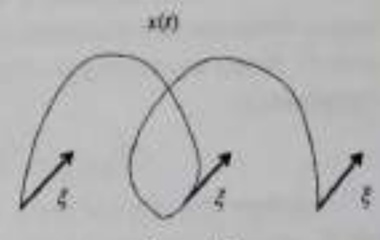


Рис. 4.1

Пример 4.2. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ связность

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2} X \times Y,$$

где ∇ — каноническая связность. Найдем параллельное поле Y вдоль кривой $x^1(t) = x^2(t) = 0$, $x^3(t) = t$, удовлетворяющее условию $Y(0) = e_1$. Уравнения (4.7) примут вид

$$\frac{d\eta^1}{dt} - \frac{1}{2}\eta^2 = 0; \quad \frac{d\eta^2}{dt} + \frac{1}{2}\eta^1 = 0; \quad \frac{d\eta^3}{dt} = 0.$$

Решения этих уравнений:

$$\eta^1(t) = \cos\frac{t}{2}, \quad \eta^2(t) = -\sin\frac{t}{2}, \quad \eta^3(t) = 0,$$

т.е. при параллельном переносе наш вектор вращается вокруг прямой.

В этом разделе мы определили понятие ковариантной производной формальным образом. Существует, однако, как и для производной Ли, конструкция взятия ковариантной производной операции: нужно в формуле (3.6) вместо отображения $\tilde{F}_{-t}$ использовать перенос тензора, индуцированный параллельным переносом векторов. Тогда можно доказать все необходимые свойства оператора ∇_X, т. е. убедиться, что определенная таким образом операция совпадает с уже построенной операцией.

5. СВЯЗНОСТЬ ЛЕВИ-ЧИВИТА

Понятие ковариантного дифференцирования не связано ни с какой метрикой. Пусть в пространстве задана метрика. Связность называется согласованной с метрикой, если ковариантная производная метрического тензора g по направлению любого векторного поля X равна нулю: $\nabla_X g = 0$. В координатной записи это означает следующее:

$$(\nabla_k g)_{ij} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Теорема 5.1. Существует и единственна симметричная связность, согласованная с метрикой g_{ij}. Эта связность в любой системе координат x_1, x_2, x_3 задается формулами

$$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{l\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha j}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha} \right) \tag{5.1}$$

(формулы Кристоффеля).

Доказательство. Согласно определению симметричной связности и теореме 4.1 имеем

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji};$$

$$(\nabla_k g)_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^\alpha_{ik} g_{\alpha j} - \Gamma^\alpha_{jk} g_{i\alpha} = 0.$$

Переставив циклически индексы i, j, k, получим

$$g_{i\alpha}\Gamma^\alpha_{jk} + g_{j\alpha}\Gamma^\alpha_{ik} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}; \tag{5.2}$$

$$g_{j\alpha}\Gamma^\alpha_{ki} + g_{k\alpha}\Gamma^\alpha_{ji} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}; \tag{5.3}$$

$$g_{k\alpha}\Gamma^\alpha_{ij} + g_{i\alpha}\Gamma^\alpha_{kj} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}. \tag{5.4}$$

Если обозначить (а), (б), (с) правые части формул (5.2)–(5.4), то в силу симметричности связности имеет место равенство (б) + (с) − (а) $= 2g_{k\alpha}\Gamma^\alpha_{ij}$. Умножив это равенство на g^{kl} и просуммировав по k, получим формулу (5.1).

Связность, построенную в теореме 5.1, называют *связностью Леви-Чивита*.

Пример 5.1. В случае евклидовой метрики ($g_{ij} = \delta_{ij}$) все $\Gamma^k_{ij} = 0$, т. е. связность Леви-Чивита совпадает с канонической связностью в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Пример 5.2. Пусть задана *плоскость Лобачевского* как *верхняя полуплоскость* ($v > 0$), в которой задана метрика

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2},$$

т. е.

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} v^{-2} & 0 \\ 0 & v^{-2} \end{pmatrix}; \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} v^2 & 0 \\ 0 & v^2 \end{pmatrix}.$$

Вычислив коэффициенты линейной связности по формуле (5.1), получим

$$\Gamma^2_{11}=\frac{1}{v};\quad \Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=\Gamma^2_{22}=-\frac{1}{v}, \qquad (5.5)$$

остальные коэффициенты связности равны нулю.

Пример 5.3. Пусть на плоскости Лобачевского, указанной в примере 5.2, задано тензорное поле T типа (1, 1) и векторное поле X:

$$T=u\,du\otimes\partial_u;\quad X=v\partial_v.$$

Найдем ковариантную производную $\nabla_X T$. Для этого применим формулу (4.5), считая, что $x^1=u$, $x^2=v$. Тогда

$$(\nabla_1 T)^1_1=\frac{\partial T^1_1}{\partial x^1}+\Gamma^1_{11}T^1_1+\Gamma^1_{12}T^2_1-\Gamma^1_{11}T^1_1-\Gamma^2_{11}T^1_2=$$

$$=1+0\cdot u+\left(-\frac{1}{v}\right)\cdot 0-0\cdot u-\frac{1}{v}\cdot 0=1;$$

$$(\nabla_1 T)^2_1=\frac{\partial T^2_1}{\partial x^1}+\Gamma^2_{11}T^1_1+\Gamma^2_{12}T^2_1-\Gamma^1_{11}T^2_1-\Gamma^2_{11}T^2_2=$$

$$=0+\frac{1}{v}\cdot u+0\cdot 0-0\cdot 0-\frac{1}{v}\cdot 0=\frac{u}{v}$$

и т. д. Так как $\nabla_X T=v\nabla_1 T$, то в итоге получим

$$((\nabla_X T)^j_i)=\begin{pmatrix} v & u\\ u & 0\end{pmatrix}.$$

Пример 5.4. Пусть задан тензор T (см. пример 5.3). Опустим верхний индекс тензора и получим тензор S с координатами $S_{jk}=g_{\alpha j}T^{\alpha}_k$.

Имеем

$$S_{11}=g_{11}T^1_1+g_{21}T^2_1=v^{-2}\cdot u+0\cdot 0=uv^{-2};$$

$$S_{12}=g_{11}T^1_2+g_{21}T^2_2=v^{-2}\cdot 0+0\cdot 0=0$$

и т. д. При подниманиии индекса у тензора T получим тензор R:

$$R^{jk}=g^{\alpha j}T^k_{\alpha}.$$

Проведя вычисления, аналогичные предыдущим вычислениям, в результате получим

$$(S_{ij})=\begin{pmatrix} uv^{-2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\quad (R^{ij})=\begin{pmatrix} uv^{2} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Пример 5.5. Вычислим ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$. Согласно формуле (4.6) имеем

$$(\nabla_1 S)_{11}=\frac{\partial S_{11}}{\partial x^1}-\Gamma^1_{11}S_{11}-\Gamma^2_{11}S_{21}-\Gamma^1_{11}S_{11}-\Gamma^2_{11}S_{12}=$$

$$=\frac{1}{v^2}-0\cdot\frac{u}{v^2}-\left(-\frac{1}{v}\right)\cdot 0-0\cdot\frac{u}{v^2}-\frac{1}{v}\cdot 0=\frac{1}{v^2};$$

$$(\nabla_1 S)_{12}=\frac{\partial S_{12}}{\partial x^1}-\Gamma^1_{11}S_{12}-\Gamma^2_{11}S_{22}-\Gamma^1_{12}S_{11}-\Gamma^2_{12}S_{12}=$$

$$=0-0\cdot 0-\frac{1}{v}\cdot 0-\left(-\frac{1}{v}\right)\cdot\frac{u}{v^2}-0\cdot 0=\frac{u}{v^3}$$

и т. д. Выполнив аналогичные действия, получим

$$(\nabla_1 R)^{11}=\frac{\partial R^{11}}{\partial x^1}+\Gamma^1_{11}R^{11}+\Gamma^1_{12}R^{21}+\Gamma^1_{11}R^{11}+\Gamma^1_{12}R^{12}=$$

$$=v^2+0\cdot 0+\left(-\frac{1}{v}\right)\cdot 0+0\cdot uv^2+\left(-\frac{1}{v}\right)\cdot 0=v^2$$

и т. д. Так как $\nabla_X S=v\nabla_1 S$, $\nabla_X R=v\nabla_1 R$, окончательно имеем

$$\left((\nabla_X S)_{ij}\right)=\begin{pmatrix} v^{-1} & uv^{-2}\\ uv^{-2} & 0\end{pmatrix};\quad \left((\nabla_X R)^{ij}\right)=\begin{pmatrix} v^{3} & uv^{2}\\ uv^{2} & 0\end{pmatrix}.$$

6. ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Задача 1. Вычислить коммутатор $[X, Y]$ векторных полей X и Y.

Номер варианта	X	Y	Номер варианта	X	Y
1	$xy\partial_x + \partial_y$	$y\partial_y$	13	$2xy\partial_x + x\partial_y$	$xy\partial_y$
2	$x\partial_x - y\partial_y$	$x\partial_x$	14	$x\partial_x - 2y^2\partial_y$	$xy\partial_x$
3	$x\partial_x + y\partial_y$	$y\partial_x$	15	$2\partial_x + xy\partial_y$	$xy\partial_x$
4	$x\partial_x + y\partial_y$	$x\partial_y$	16	$x\partial_x + y^2\partial_y$	$\partial_x + x\partial_y$
5	$xy\partial_x + x\partial_y$	$xy\partial_y$	17	$xy\partial_x + 2\partial_y$	$y\partial_y$
6	$x\partial_x - y^2\partial_y$	$xy\partial_x$	18	$x\partial_x - 2y\partial_y$	$x\partial_x$
7	$\partial_x + xy\partial_y$	$xy\partial_x$	19	$x\partial_x + 2y\partial_y$	$y\partial_x$
8	$\partial_x + y^2\partial_y$	$\partial_x + x\partial_y$	20	$2x\partial_x + y\partial_y$	$x\partial_y$
9	$xy\partial_x + \partial_y$	$y\partial_y$	21	$xy\partial_x + 2x\partial_y$	$xy\partial_y$
10	$2x\partial_x - y\partial_y$	$x\partial_x$	22	$2x\partial_x - y^2\partial_y$	$xy\partial_x$
11	$2x\partial_x + y\partial_y$	$y\partial_x$	23	$\partial_x + 2xy\partial_y$	$xy\partial_x$
12	$x\partial_x + 2y\partial_y$	$x\partial_y$	24	$2x\partial_x + y^2\partial_y$	$\partial_x + x\partial_y$

Задача 2. В плоскости Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

найти ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X. Определить координаты тензоров S и R, полученные из тензорного поля T соответственно опусканием и подниманием индексов. Определить ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$.

Номер варианта	ξ^1	ξ^2	T^1_1	T^2_1	T^1_2	T^2_2	Номер варианта	ξ^1	ξ^2	T^1_1	T^2_1	T^1_2	T^2_2
1	0	v	v	0	0	0	13	1	1	v	0	0	0
2	0	v	0	v	0	0	14	1	1	0	v	0	0
3	0	v	0	0	v	0	15	1	1	0	0	v	0
4	0	v	0	0	0	v	16	1	1	0	0	0	v
5	u	0	v	0	0	0	17	0	v	1	0	0	0
6	u	0	0	v	0	0	18	0	v	0	1	0	0
7	u	0	0	0	v	0	19	0	v	0	0	1	0
8	u	0	0	0	0	v	20	0	v	0	0	0	1
9	v	0	1	0	0	0	21	1	u	v	0	0	0
10	v	0	0	1	0	0	22	1	u	0	v	0	0
11	v	0	0	0	1	0	23	1	u	0	0	v	0
12	v	0	0	0	0	1	24	1	u	0	0	0	v

Задача 3. На сфере единичного радиуса с первой квадратичной формой

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u \, dv^2$$

найти ковариантную производную $\nabla_X T$ тензорного поля T типа $(1, 1)$ в направлении векторного поля X. Определить координаты тензоров S и R, полученные из тензорного поля T соответственно опусканием и подниманием индексов. Найти ковариантные производные $\nabla_X S$ и $\nabla_X R$. Исходные данные указаны в таблице, приведенной в задаче 2.

Задача 4. Вычислить тензор малой деформации $L_X g$ для метрики поверхности

$$z = f(x, y).$$

Номер варианта	X	$f(x,y)$	Номер варианта	X	$f(x,y)$	Номер варианта	X	$f(x,y)$
1	$x\partial_x$	x^2+2y^2	9	$x\partial_x$	x^2-2y^2	17	∂_y	xy
2	$x\partial_y$	x^2+2y^2	10	$x\partial_x+\partial_y$	x^2-2y^2	18	$\partial_x+\partial_y$	xy
3	$\partial_x+x\partial_y$	x^2+2y^2	11	$\partial_x+x\partial_y$	x^2-2y^2	19	$\partial_x-y\partial_y$	xy
4	$\partial_x-y\partial_y$	x^2+2y^2	12	$\partial_x-y\partial_y$	x^2-2y^2	20	$y^2\partial_x$	xy
5	$\partial_x+\partial_y$	x^2+2y^2	13	$\partial_x+y\partial_y$	x^2-2y^2	21	$x^2\partial_y$	xy
6	$y^2\partial_x$	x^2+2y^2	14	∂_y	x^2-2y^2	22	$\partial_x+x\partial_y$	xy
7	$y\partial_y$	x^2+2y^2	15	∂_x	x^2-2y^2	23	$y^2\partial_y$	xy
8	$y\partial_x+\partial_y$	x^2+2y^2	16	$\partial_x+2\partial_y$	x^2-2y^2	24	$xy^2\partial_x$	xy

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.

2. *Димитриенко Ю.И.* Тензорное исчисление. М.: Высш. шк., 2001.

3. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом: Пер. с англ. М.: Мир, 1979.

4. *Спивак М.* Математический анализ на многообразиях: Пер. с англ. М.: Мир, 1968.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Щетинин Александр Николаевич
Губарева Елена Александровна

ВВЕДЕНИЕ В ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *О.М. Королева*
Корректор *Е.В. Авалова*
Компьютерная верстка *В.И. Товстоног*

Подписано в печать 02.07.2012. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 2,33. Тираж 300 экз. Изд. № 5.
Заказ 500

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана.
Типография МГТУ им. Н.Э. Баумана.
105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5.