11 класс
Первый тур (*10 минут; каждая задача – 6 баллов*)

1.1. Решите уравнение: $\dfrac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}+x^2-4=0$.

Ответ: $\sqrt{2}$

Решение. Данное уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x^3=\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3, \\ \sqrt{4-x^2}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{4-x^2}, \\ |x|<2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4-x^2, \\ 0\le x<2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

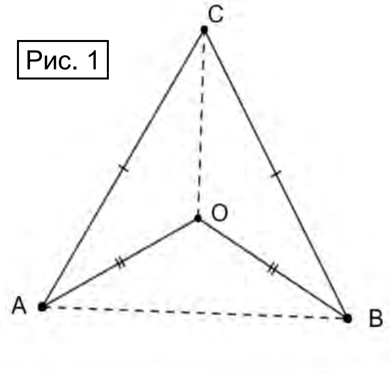
1.2. Существует ли многоугольник, в котором каждая сторона равна одной из диагоналей, а каждая диагональ равна какой-то стороне?

Ответ: существует.

Решение. Рассмотрим, например, правильный треугольник *ABC* с центром *O* (см. рис. 1). Тогда четырехугольник *ACBO* удовлетворяет условию задачи: *AO* = *BO* = *CO* и *AC* = *BC* = *AB*.

Существуют и другие примеры.

Рис. 1



1.3. На бесконечной шахматной доске стоят два ферзя, не бьющие друг друга. Сколько на доске клеток, которые находятся под боем обеих фигур?

Ответ: 10 или 12.

Рис. 2а

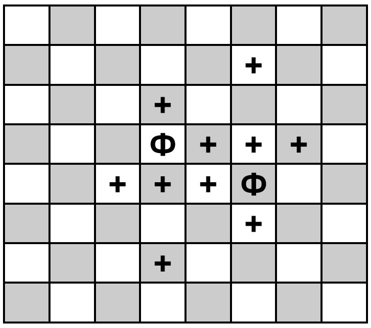
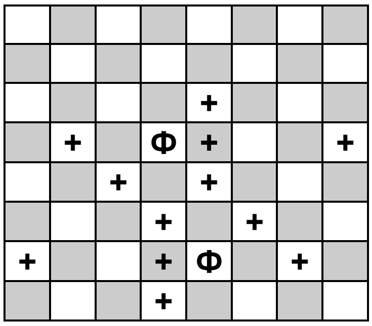


Рис. 2б



Решение. Каждый ферзь бьет горизонталь, вертикаль и две диагонали. При этом, ответ зависит от того, стоят ли ферзи на клетках разного цвета или одного цвета.

1) Если ферзи стоят на клетках разного цвета (см. рис. 2а), то две «битые» клетки лежат пересечениях «битых» горизонтали и вертикали и еще 8 клеток лежат на пересечении «битых» диагоналей с «битыми» горизонталями и вертикалями. Итого: 10 общих «битых» клеток.

2) Если ферзи стоят на клетках одного цвета (см. рис. 2б), то к десяти указанным клеткам добавляются две общие «битые» клетки пересечения «битых» диагоналей. Итого: 12.

Второй тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

2.1. Вычислите: $(1+tg5°)(1+tg10°)(1+tg15°)(1+tg20°)(1+tg25°)(1+tg30°)(1+tg35°)(1+tg40°)$

Ответ: 16.

Решение. Пусть искомое произведение равно *P*. Заметим, что

$1+\mathrm{tg}\,5°=\mathrm{tg}\,45°+\mathrm{tg}\,5°=\dfrac{\sin 50°}{\cos 5°\cos 45°}$; $\quad 1+tg10°=tg45°+tg10°=\dfrac{\sin 55°}{\cos 10°\cos 45°}$; $\quad \ldots$;

$1+\mathrm{tg}\,40°=\mathrm{tg}\,45°+\mathrm{tg}\,40°=\dfrac{\sin 85°}{\cos 40°\cos 45°}$. Так как $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$, то $\sin 85°=\cos 5°$, $\sin 80°=\cos 10°$, …, $\sin 50°=\cos 40°$.

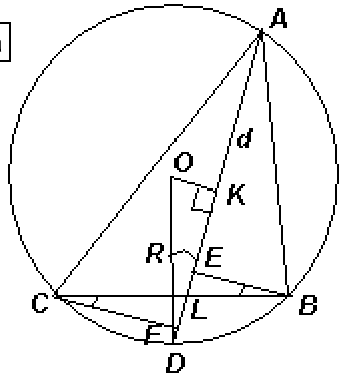
Таким образом, $P = \dfrac{\sin 50^\circ}{\cos 5^\circ \cos 45^\circ} \cdot \dfrac{\sin 55^\circ}{\cos 10^\circ \cos 45^\circ} \cdot \ldots \cdot \dfrac{\sin 85^\circ}{\cos 40^\circ \cos 45^\circ} = \dfrac{1}{\cos^8 45^\circ} = 2^4 = 16$.

2.2. Биссектриса угла *A* остроугольного треугольника *ABC* пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке *D*. Сумма расстояний от вершин *B* и *C* до прямой *AD* в два раза меньше *AD*. Найдите угол *BAC*.

Ответ: 30°.

Решение. Пусть *E* и *F* – основания перпендикуляров, опущенных на *AD* из вершин *B* и *C* соответственно (см. рис. 3 а, б).

Рис. 3а

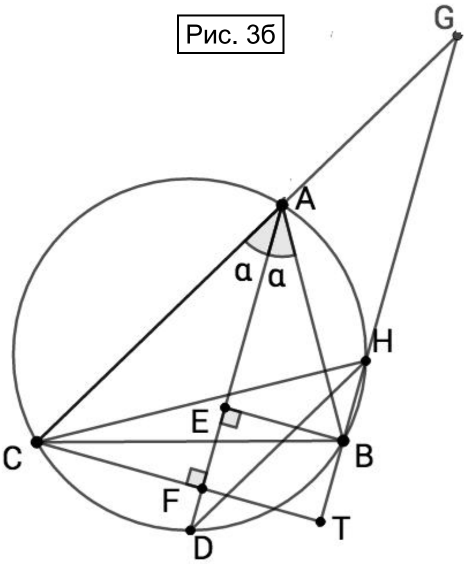


Первый способ. Пусть также *O* и *R* – центр и радиус данной окружности, *K* – середина хорды *AD* = 2*d*, *L* – точка пересечения *AD* и *BC* (см. рис. 3а).

Так как *D* – середина дуги *BC*, то *OD*⊥*BC*. Тогда ∠*LCF* = ∠*ODK* = ∠*LBE* (острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Значит, подобны прямоугольные треугольники *LCF*, *ODK* и *LBE*. Следовательно, $\dfrac{CF}{d} = \dfrac{CL}{R}$ и $\dfrac{BE}{d} = \dfrac{BL}{R}$.

Тогда $\dfrac{CF+BE}{d} = \dfrac{CL+BL}{R} = \dfrac{BC}{R}$ = 1 (по условию), то есть, *BC* = *R*. Значит, сторона *BC* видна из центра *O* под углом 60°, а из вершины *A* – под углом 30°.

Рис. 3б



Второй способ. Пусть ∠*BAD* = ∠*CAD* = α. Через вершину *B* проведем прямую, параллельную *AD*. Ее пересечения с прямыми *AC*, *CF* и окружностью (вторично) обозначим через *G*, *T* и *H* соответственно (см. рис. 3б).

Используя свойства параллельных прямых и вписанных углов, получим:: *CF* + *BE* = *CF* + *FT* = *CT*, ∠*ACH* = ∠*ADH* = ∠*ABH* = α = ∠*AGB*. Следовательно, *AGHD* – параллелограмм, .а треугольник *CHG* – равнобедренный, то есть *CH* = *GH* = *AD*.

В прямоугольном треугольнике *CHT*: *CH* = 2*CT*, значит, ∠*CHT* = 30°, но это внешний угол треугольника *CHG*, поэтому ∠*CHT* = 2α = ∠*BAC*. Следовательно, ∠*BAC* = 30°.

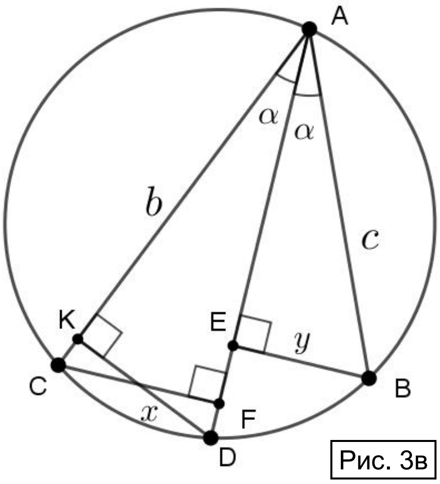


Рис. 3в

Третий способ. Введем обозначения: *AB* = *c, AC* = *b,* $CF = x$, $BE = y$ (см. рис. 3в). Из прямоугольных треугольников *ACF* и *ABE*: $x = b\sin\alpha$, $y = c\sin\alpha$. По условию, $AD = 2(x+y) = 2(b+c)\sin\alpha$.

Воспользуемся ***формулой Архимеда***: $AK = \dfrac{b+c}{2}$, где *K* – проекция точки *D* на прямую *AC*.

Тогда $AD = 2(b+c)\sin\alpha = 4AK\sin\alpha$ (2). Из прямоугольного треугольника *AKD* $AK = AD\cos\alpha$. Таким образом, $AD = 4AD\sin\alpha\cos\alpha = 2AD\sin 2\alpha$. Отсюда $\sin 2\alpha = \dfrac{1}{2}$. Следовательно, $\angle BAC = 2\alpha = 30^\circ$.

2.3. Петя записал на доске пять трехзначных простых чисел. Обязательно ли среди них найдутся два числа с разностью, кратной 12?

Ответ: обязательно.

Решение. Трехзначные простые числа при делении на 3 могут иметь остаток 1, либо остаток 2, а при делении на 4 – остатки 1 или 3. По принципу Дирихле из пяти записанных чисел найдутся, по крайней мере, три числа, имеющие одинаковый остаток при делении на 3, а из них, по крайней мере, два числа, имеющие одинаковый остаток при делении на 4. Разность двух таких чисел будет кратна 12.

Третий тур (*20 минут; каждая задача – 8 баллов*)

3.1. Известно, что $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8 \le 0$. Докажите, что $x \ge -\frac{1}{6}$.

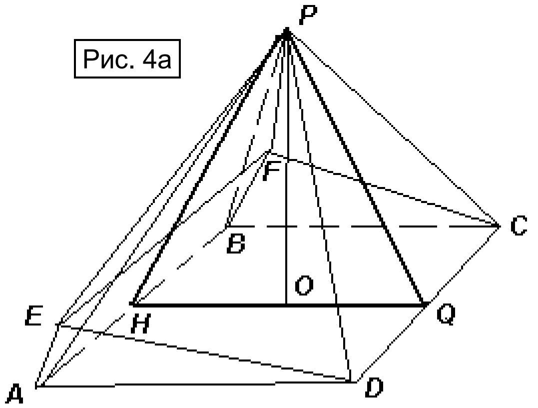
Решение. <u>Первый способ</u>. Преобразуем левую часть данного неравенства, выделив полный квадрат: $x^4y^2 + x^2 + 2x^3y + 6x^2y + 8$ = $\left(\left(x^2y\right)^2 + x^2 + 9 + 2x^2y\cdot x + 2x^2y\cdot 3 + 2x\cdot 3\right) - 6x - 1$ = $\left(x^2y + x + 3\right)^2 - 6x - 1$. Из условия задачи следует, что $\left(x^2y + x + 3\right)^2 \le 6x + 1$, значит, $6x + 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{6}$, что и требовалось.

<u>Второй способ</u>. Запишем данное неравенство в виде: $x^4y^2 + 2y\left(x^3 + 3x^2\right) + x^2 + 8 \le 0$. Так как при $x = 0$ неравенство не выполняется, то его можно считать квадратичным относительно переменной *y*, причем $x^4 > 0$. Поэтому оно имеет решения тогда и только тогда, когда $\frac{D}{4} = \left(x^3 + 3x^2\right)^2 - x^4\left(x^2 + 8\right) = x^4 + 6x^5 = x^4(1 + 6x) \ge 0$, откуда $x \ge -\frac{1}{6}$.

3.2. В правильной четырехугольной пирамиде ребро основания равно 6, высота равна 4. Найдите площадь ортогональной проекции этой пирамиды на плоскость боковой грани.

Ответ: 25,8.

Решение. Пусть *PABCD* – данная пирамида, *ABCD* – ее основание *PO* – высота, . *E* и *F* – ортогональные проекции вершин *C* и *D* соответственно на плоскость *APB* (см. рис. 4 а, б). Тогда проекцией пирамиды на эту плоскость является пятиугольник *AEPFB*.



Далее можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Проекцией основания пирамиды является четырехугольник *AEFB*, а проекцией грани *DPC* – треугольник *EPF* (см. рис. 4а). Найдем углы, которые составляют плоскости *ABC* и *CPD* с плоскостью *APB*. Пусть *HQ* – отрезок, соединяющий середины *AB* и *CD*, тогда *O* – его середина. Так как *OH*$\perp$*AB*, то *PH*$\perp$*AB* (по теореме о трех перпендикулярах). Кроме того, плоскости *CPD* и *APB* пересекаются по прямой, параллельной прямым *AB* и *CD*, значит, плоскость *HPQ* перпендикулярна этой прямой. Таким образом, искомые углы – это $\angle PHO = \alpha$ и $\angle HPQ = \beta$ соответственно.

По условию, *HQ* = 6, *PH* = $\sqrt{PO^2 + OH^2}$ = 5. Следовательно, $\cos\alpha = \frac{OH}{PH}$ = 0,6; $\cos\beta$ = $\cos(180° - 2\alpha) = -\cos2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$ = 0,28. По теореме о площади проекции S_{AEPFB} = $S_{AEFB} + S_{EPF} = S_{ABCD}\cdot\cos\alpha + S_{CPD}\cos\beta$ = 36·0,6 + 0,5·6·5·0,28 = 21,6 + 4,2 = 25,8.

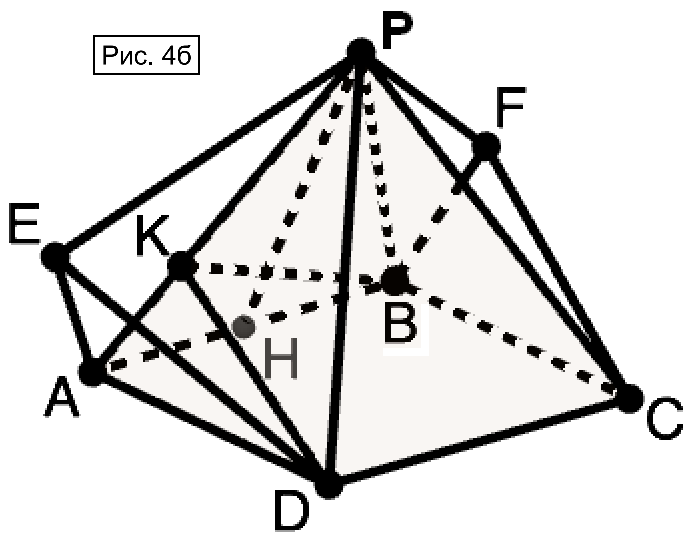
Отметим, что так как CD || APB, то EF || CD и EF = CD. Кроме того, EA$\perp$*AB и FB*$\perp$*AB (по теореме о трех перпендикулярах), значит AEFB – прямоугольник.*

<u>Второй способ</u>. Пусть *H* – середина *AB*, тогда *PH* – ось симметрии пятиугольника *AEPFB*.

Из условия задачи следует, что $PH = \sqrt{4^2 + 3^2}$ = 5, значит, $S_{APB} = 0{,}5AB\cdot PH$ = 15. По теореме о площади проекции $S_{PEA} = S_{PAD}\cdot\cos\varphi$, где φ – угол между плоскостями *PEA* и *PAD*.

Так как пирамида правильная, то равны площади граней APD и APB. Кроме того, если DK – высота треугольника APD, то BK – высота треугольника APB. Из треугольника BKD по теореме косинусов: $BD^2 = BK^2 + DK^2 - 2BK\cdot DK\cdot\cos\angle BKD$.

Рис. 4б



Учитывая, что $BD = 6\sqrt{2}$, $BK = DK = \frac{AB\cdot SH}{SA} = \frac{30}{\sqrt{34}}$, получим: $\cos\angle BKD = \dfrac{2\cdot\frac{900}{34}-72}{2\cdot\frac{900}{34}} = -\ 0{,}36$. Следовательно, $\cos\varphi = 0{,}36$, тогда $S_{PEA} = S_{PFB} = 15\cdot 0{,}36 = 5{,}4$. Таким образом, $S_{AEPFB} = S_{PEA} + S_{PAB} + S_{PFB} = 15 + 5{,}4 + 5{,}4 = 25{,}8$.

3.3. Найдите все целые решения уравнения $\sqrt{x-0{,}2}+\sqrt{y-0{,}2}=\sqrt{5}$.

Ответ: (1; 2); (2; 1).

Решение. Умножим обе части уравнения на $\sqrt{5}$. Получим: $\sqrt{5x-1}+\sqrt{5y-1}=5$. Заметим, что если корни не извлекаются нацело, то их значения являются положительными иррациональными числами, и тогда равенство не выполняется.

Докажем это. Пусть $\sqrt{n}+\sqrt{m}=5$, где n и m – натуральные числа, не являющиеся квадратами натуральных чисел. Тогда $\sqrt{n}=5-\sqrt{m}$ и при условии, что $\sqrt{m}$ < 5, получим: $n=25-10\sqrt{m}+m$. Тогда $\sqrt{m}=\frac{m-n+25}{10}$, то есть $\sqrt{m}$ – рациональное число. Противоречие. Очевидно, что случай, когда значение одного корня рационально, а другого – иррационально, также невозможен.

Таким образом, числа $5x-1$ и $5y-1$ должны быть квадратами натуральных чисел, не превосходящих 4. Перебором находим две пары, являющиеся решениями: (1; 2) и (2; 1).

Четвертый тур (*25 минут; каждая задача – 9 баллов*)

4.1. Существуют ли такие функции f и g, определенные на R и отличные от постоянных, что $g(x)$ – четная функция, а $g(f(x))$ – нечетная?

Ответ: существуют.

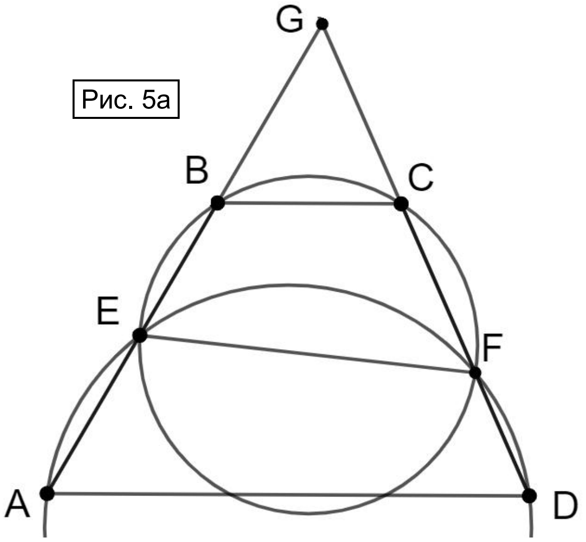
Решение. Пусть, например, $g(x) = \cos x$; $f(x)=\begin{cases}0,\ при\ x>0\\ \pi,\ при\ x<0\\ \frac{\pi}{2},\ при\ x=0\end{cases}$. Тогда

$g\left(f(x)\right)=\begin{cases}1,\ при\ x>0\\ -1,\ при\ x<0\\ 0,\ при\ x=0\end{cases}$. *Существуют и другие примеры.*

4.2. Отрезок EF разбивает четырехугольник $ABCD$ на два равновеликих четырехугольника $AEFD$ и $BEFC$, каждый из которых является вписанным. Найдите длину EF, если $BC = 1$, $AD = 7$.

Ответ: $EF = 5$.

Решение. Докажем, что $ABCD$ – трапеция. Действительно, $\angle BCF = \angle AEF = 180° - \angle ADF$ (см. рис. 5 а, б). Следовательно, $BC \parallel AD$. Пусть прямые AB и DC пересекаются в точке G. Далее можно рассуждать по-разному.

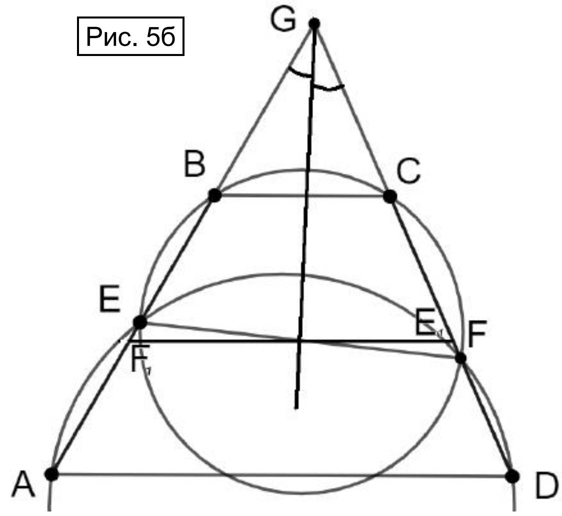


Первый способ. Заметим, что треугольники AGD, FGE и BGC – подобные (угол G – общий, $\angle EAD = \angle EFC = \angle GBC$, см. рис. 5а).

Следовательно, $\dfrac{S_{BGC}}{S_{AGD}} = \left(\dfrac{BC}{AD}\right)^2 = \dfrac{1}{49}$.

Пусть $S_{BGC} = S$, тогда $S_{AGD} = 49S$, $S_{ABCD} = 48S$, $S_{EBCF} = S_{AEFD} = 24S$, то есть $S_{EGF} = 25S$. Значит, $EF = 5BC = 5$.

Второй способ. Проведем биссектрису угла AGD (см. рис. 5б). При симметрии относительно нее образами точек E и F являются точки E_1 и F_1 соответственно, лежащие на другой стороне угла AGD. Кроме того, отрезок EF антипараллелен основаниям BC и AD трапеции, значит, $E_1F_1 \parallel BC \parallel AD$.



Заметим также, что $S_{E_1CBF_1} = S_{E_1GF_1} - S_{BGC} = S_{EGF} - S_{BGC} = S_{ECBF}$. Длина отрезка, параллельного основаниям трапеции и делящего ее на две равновеликие трапеции, является средним квадратичным длин оснований, то есть $EF = E_1F_1 = \sqrt{\dfrac{AD^2 + BC^2}{2}} = 5$.

4.3. Оля и Коля играют в следующую игру: Оля называет два натуральных числа a и b, а Коля должен так подобрать натуральное число k, чтобы числа ka и kb имели одинаковую сумму цифр. Всегда ли Коля сможет это сделать?

Ответ: всегда.

Решение. Лемма. Если n-значное число умножить на число, десятичная запись которого состоит из m девяток, где $m \ge n$, то сумма цифр произведения равна $9m$.

Доказательство. Пусть $m \ge n$ и $a_1 \ne 0$, тогда $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1} \cdot \underbrace{\overline{99\ldots99}}_{m} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1} \cdot (10^m - 1) = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 \underbrace{00\ldots0}_{m}} - \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1} = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 (a_1 - 1) \underbrace{99\ldots9}_{m-n} (9 - a_n)(9 - a_{n-1}) \ldots (9 - a_2)(10 - a_1)}$.

Значит, сумма цифр произведения равна $a_n + (9 - a_n) + a_{n-1} + (9 - a_{n-1}) + \ldots + a_2 + (9 - a_2) + (a_1 - 1) + (10 - a_1) + 9(m - n) = 9n + 9(m - n) = 9m$, что и требовалось.

Отметим, что нули на концах чисел не вносят вклад в сумму цифр числа, значит, при подсчёте суммы цифр в произведении их также можно игнорировать. Поэтому доказательство приведено для случая, когда число не оканчивается нулём.

Пусть теперь в десятичных записях чисел a и b, названных Олей, содержится p и q цифр. Тогда Коле достаточно умножить их на число, десятичная запись которого состоит из k девяток, где $k = \max(p; q)$. Согласно доказанной лемме, сумма цифр обоих произведений будет равна $9k$, что и требовалось.

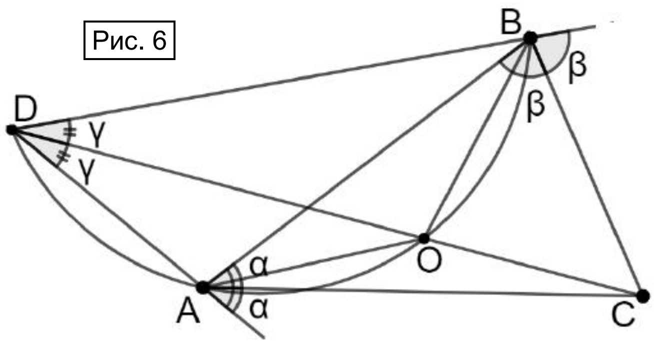
Пятый тур (*15 минут; каждая задача – 7 баллов*)

5.1. Найдите все такие тройки чисел, для которых среднее арифметическое самих чисел на 0,25 больше среднего арифметического их квадратов.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Решение. По условию: $\frac{a+b+c}{3}=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}+\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4a+4b+4c=4a^2+4b^2+4c^2+3 \Leftrightarrow$ $4a^2-4a+4b^2-4b+4c^2-4c+3=0 \Leftrightarrow (2a-1)^2+(2b-1)^2+(2c-1)^2=0 \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{2}$.

5.2. В остроугольном треугольнике *ABC* прямые, симметричные *AB* относительно *AC* и *BC*, пересекаются в точке *D*. Докажите, что центр описанной окружности треугольника *ABC* лежит на прямой *CD*.



Решение. Из симметрий, указанных в условии, следует, что *AC* и *BC* – биссектрисы внешних углов треугольника *ADB*, то есть *C* – центр его вневписанной окружности (см. рис. 6). Следовательно, *DC* – биссектриса угла *ADC*. Тогда точка *O* пересечения *DC* и окружности, описанной около треугольника *ABD*, является центром окружности, проходящей через вершины *A* и *B*, а также центры вписанной и вневписанной окружностей этого треугольника (по теореме Мансиона). Таким образом, *O* – центр окружности, описанной около треугольника *ABC*, что и требовалось.

Равенство OA = OB = OC можно получить и не используя теорему Мансиона. Действительно, равенство OA = OB следует из равенства соответствующих дуг. Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle ADO = \angle BDO = \angle BAO = \gamma$, *тогда* $\angle OAC = \alpha - \gamma$, $\angle OCA = 180^\circ - (\angle ADC + \angle DAC) = 180^\circ - (\gamma + 180^\circ - \alpha) = \alpha - \gamma = \angle OAC$. *Значит, OA = OC.*

5.3. В турнире участвуют 100 борцов, все разной силы. Более сильный всегда побеждает более слабого. Борцы разбились на пары и провели поединки. Затем разбились на пары по-другому и снова провели поединки. Призы получили те, кто выиграл оба поединка. Каково наименьшее возможное количество призѐров?

Ответ: один призер.

Решение. Пронумеруем борцов в порядке убывания их силы: 1, 2, …, 100. Дважды разобьем борцов на пары: 1) 1 – 2, 3 – 4, …, 99 – 100; 2) 2 – 3, 4 – 5, …, 98 – 99, 100 – 1. Рассмотрим борцов с номерами от 2 до 99. Каждый из них поборется с обоими борцами, имеющими соседние номера, значит, один поединок выиграет, а другой проиграет. Борец с номером 100 оба поединка проиграет, а боец с номером 1 оба поединка выиграет. Без призеров турнир провести не удастся, так как боец с номером 1 выиграет два поединка при любом разбиении на пары.