

10 класс

Первый тур (10 минут; каждая задача – 6 баллов)

1.1. Составьте четыре различных четырёхзначных числа, образующих арифметическую прогрессию, используя в каждом числе только цифры 0, 1, 2 и 5, взятые по одному разу.

Ответ: 1025, 1520, 2015, 2510.

Указанные числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию с разностью 495. Их можно записать и в обратном порядке так, чтобы прогрессия была убывающей.

1.2. Существует ли многогранник, в котором для любых двух вершин найдутся еще две так, чтобы они образовывали квадрат?

Ответ: существует.

Решение. Рассмотрим, например, правильную треугольную призму, у которой боковое ребро равно ребру основания (см. рис. 1а). Она удовлетворяет условию, так как любые две ее вершины лежат в одной грани, которая является квадратом.

Рис. 1а

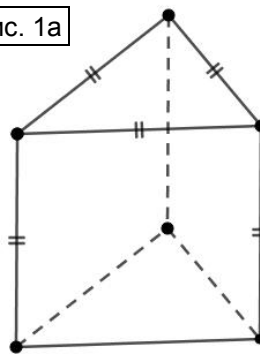
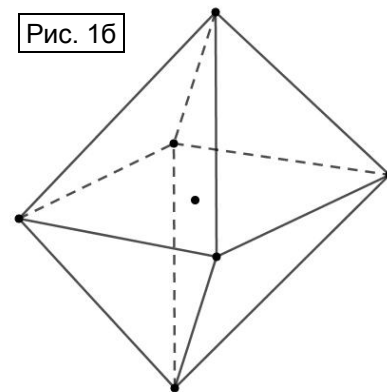


Рис. 1б



Другой возможный пример – правильный октаэдр (см. рис. 1б). Каждая его грань – равносторонний треугольник, а диагональные сечения являются квадратами. Любые две вершины

октаэдра принадлежат одному из диагональных сечений.

1.3. Вася сделал домино, в котором на каждой доминошке – от нуля до семи точек в каждой её половине, причём, как и в обычном домино, присутствуют все варианты и никакие два не повторяются. Сколько доминошек в Васином наборе?

Ответ: 36.

Решение. В таком наборе есть 8 доминошек, у которых на каждой половине одинаковое количество точек. Количество остальных доминошек равно количеству способов выбрать из восьми различных чисел два, то есть равно $C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$.

Итого: $8 + 28 = 36$.

Отметим, что если помнить количество доминошек в стандартном наборе – 28, то достаточно к этому числу добавить 8 новых доминошек: от 0 – 7 до 7 – 7.

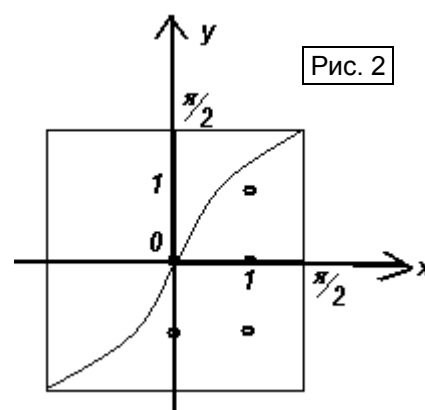
Второй тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов)

2.1. Найдите количество точек плоскости, удовлетворяющих условию $\begin{cases} \max(|x|, |y|) \leq \frac{\pi}{2}; \\ 2y \leq \pi \sin x \end{cases}$ и имеющих целочисленные координаты.

Ответ: пять точек.

Решение. Заметим, что $\max(|x|, |y|) \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ |y| \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Множеством точек координатной плоскости, удовлетворяющих этой системе неравенств является квадрат (см. рис. 2). В этой же системе координат схематически построим график функции $y = \frac{\pi}{2} \sin x$ на



$$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Построенному квадрату принадлежат девять точек с целочисленными координатами, из которых точка (0; 0) принадлежит построенному графику, точки (1; 0), (0; -1), (1; -1) лежат ниже его, а точки, им симметричные относительно начала координат, – выше графика.

Точка (1; 1) также лежит ниже графика, так как $\frac{\pi}{2} \sin 1 > \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} > \frac{3 \cdot 1,4}{4} > 1$.

Тогда точка (-1; -1), симметричная ей относительно (0; 0), лежит выше графика.

Таким образом, требуемым условиям удовлетворяют пять точек: (0; 0), (1; 0), (0; -1), (1; -1) и (-1; 1).

При таком способе решения можно не указывать в явном виде координаты точек, лежащих ниже графика. Возможно и другое оформление решения: алгебраически найти девять пар целых чисел, являющихся решением первого неравенства исходной системы, а затем осуществить их отбор непосредственной подстановкой во второе неравенство.

2.2. Внутри квадрата $ABCD$ расположен квадрат $KLMN$ (в каждом квадрате вершины указаны в одном и том же порядке – по часовой стрелке). Докажите, что середины отрезков AK , BL , CM и DN также являются вершинами квадрата.

Решение. Пусть E , F , G и H – середины отрезков AK , BL , CM и DN соответственно (см. рис. 3). Докажем, что $\overline{EH}$ получается из $\overline{EF}$ поворотом на 90° по часовой стрелке.

Действительно, из четырехугольника $ABLK$: $\overline{EF} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{KL})$. Аналогично, из четырехугольника

$ADNK$: $\overline{EH} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{KN})$. При повороте на 90° по

часовой стрелке образом $\overline{AB}$ является $\overline{AD}$, а образом $\overline{KL}$ является $\overline{KN}$, поэтому $\overline{EH}$ – образ $\overline{EF}$.

Следовательно, $\overline{EH} \perp \overline{EF}$ и $|\overline{EH}| = |\overline{EF}|$. Аналогично,

$\overline{FG} \perp \overline{FE}$ и $|\overline{FG}| = |\overline{FE}|$. Таким образом, $EFGH$ –

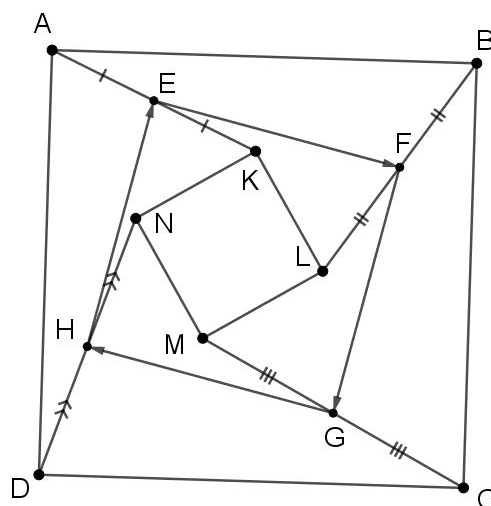


Рис. 3

*Этот факт следует из того, что $\overline{EF} = \overline{EA} + \overline{AB} + \overline{BF}$ и $\overline{EH} = \overline{EK} + \overline{KL} + \overline{LF}$. Складывая эти равенства и учитывая, что $\overline{EA} + \overline{EK} = \vec{0}$ и $\overline{BF} + \overline{LF} = \vec{0}$, получим использованное равенство.

2.3. Трехзначное число разделили на его сумму цифр. Какой наибольший остаток мог при этом получиться?

Ответ: 24.

Решение. Наибольшая сумма цифр у числа 999. Она равна 27, а 999 делится на 27 без остатка. Существует три трехзначных числа, у которых сумма цифр равна 26: 998, 989, 899, но они не могут при делении на 26 давать остаток 25, так как числа, большие их на 1, не делятся на 26 (можно в явном виде проверить, что их остатки при делении на 26 равны 10, 1 и 15 соответственно). Существует шесть чисел с суммой цифр 25: 997, 979, 799, 988, 898, 889, из которых остаток 24 при делении на 25 имеет число 799, так как 800 делится на 25. Этот остаток и является наибольшим.

Третий тур (20 минут; каждая задача – 8 баллов)

3.1. Решите уравнение: $\sqrt{2x-y-z} + \sqrt{-x^2+4y+2z-8} = \sqrt{yz-x}$.

Ответ: (2; 2; 2), (4; 4; 4).

Решение. Возможны идейно близкие способы рассуждений, которые различаются только логической последовательностью.

Первый способ. Выражения, входящие в уравнение, имеют смысл, если выполняются следующие условия: $yz \geq 0$, $\sqrt{yz} \geq x \geq \frac{y+z}{2}$, $4y+2z \geq x^2+8$.

Рассмотрим два случая: 1) $yz = 0 \Leftrightarrow y = 0$ или $z = 0$:

Если $y = 0$, то $2z \geq x^2 + 8$, то есть $z > 0$. Тогда не выполняется неравенство $\sqrt{yz} \geq \frac{y+z}{2}$.

Если $z = 0$, то $4y \geq x^2 + 8$, то есть $y > 0$ и опять не выполняется то же самое неравенство.

2) $yz > 0$, тогда $y > 0$ и $z > 0$, так как $4y+2z \geq x^2+8$. Значит, можно использовать неравенство $\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}$. Соотнеся его с неравенством $\sqrt{yz} \geq x \geq \frac{y+z}{2}$ (см. выше), получим: $\frac{y+z}{2} = \sqrt{yz}$, тогда $y = z = x$.

Таким образом, исходное уравнение примет вид: $\sqrt{-x^2+6x-8} = 0$. Его решения: $x = 2$ или $x = 4$. Следовательно, $x = y = z = 2$ или $x = y = z = 4$.

Второй способ. Заметим, что $yz \geq 0$, причем случаи, когда $y \leq 0$, $z \leq 0$ или когда одна из переменных равна нулю, а другая принимает отрицательное значение, невозможны, иначе $-x^2+4y+2z-8 < 0$. Значит, $y \geq 0$ и $z \geq 0$, тогда $\frac{y+z}{2} \leq x \leq \sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}$,

откуда $\begin{cases} \frac{y+z}{2} = x \\ y = z \geq 0 \end{cases}$. Таким образом, $y = z = x$, что опять приводит к уравнению

$\sqrt{-x^2+6x-8} = 0$, решения которого указаны выше.

3.2. На катетах прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACKL$ и $BCMN$. Пусть CE – высота треугольника, опущенная на гипотенузу AB . Докажите, что угол LEM – прямой.

Решение. Первый способ. Пусть $\angle CAE = \angle BCE = \alpha$ (см. рис. 4а). Так как прямоугольные треугольники ACE и CBE подобны, то $\frac{AC}{AE} = \frac{CB}{CE}$. Учитывая, что $AC =$

AL и $CB = CM$, получим: $\frac{AL}{AE} = \frac{CM}{CE}$. Кроме того, $\angle LAE = 90^\circ + \alpha = \angle MCE$, значит, треугольники LAE и MCE подобны. Следовательно, $\angle LEA = \angle MEC$. Тогда $\angle LEM = \angle LEC + \angle MEC = \angle LEC + \angle LEA = 90^\circ$, что и требовалось.

По сути, приведенное рассуждение показывает, что треугольник MCE получается из треугольника LAE поворотной гомотетией с центром E , $k = \tan \alpha$ и углом 90° .

Второй способ. Пусть P и Q – центры построенных квадратов (см. рис. 4б). Тогда четырехугольники $AEC P$ – вписанный, так два его противоположных угла прямые. Кроме того, $AP = CP$, поэтому EP – биссектриса угла AEC . Аналогично, четырехугольник $BEC Q$ –

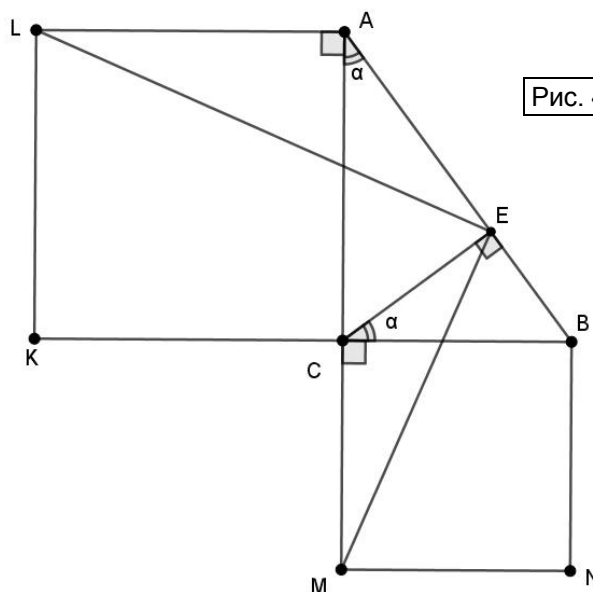


Рис. 4а

Если $a = -3$, то $2d^2 - 9d + 6 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{9 \pm \sqrt{33}}{4}$. Так как $\frac{9 + \sqrt{33}}{4} > 1$, а $0 < \frac{9 - \sqrt{33}}{4} < 1$, то $x = -3 + \frac{9 - \sqrt{33}}{4} = -\frac{3 + \sqrt{33}}{4}$ – корень исходного уравнения.

Второй способ. Рассмотрим полученное уравнение как квадратное относительно d : $2d^2 + 3ad + (a^2 + a) = 0$. Его дискриминант: $D = 9a^2 - 8(a^2 + a) = a(a - 8)$, значит, оно имеет корни, если $\begin{cases} a \leq 0 \\ a \geq 8 \end{cases}$.

Выясним теперь, при каких значениях a хотя бы один из корней лежит в промежутке $[0; 1)$. Для этого рассмотрим квадратичную функцию $f(d) = 2d^2 + 3ad + (a^2 + a)$. Ее график – парабола, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины: $d_0 = -\frac{3a}{4}$. Требуемое условие равносильно тому, что парабола пересекает ось x на указанном промежутке. Это

возможно в двух случаях: 1) $\begin{cases} f(0) \cdot f(1) \leq 0, \\ f(1) \neq 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 0 \leq d_0 < 1, \\ f(0) \geq 0, \\ f(1) > 0. \end{cases}$

Учитывая, что $f(0) = a^2 + a$, $f(1) = a^2 + 4a + 2$, получим:

$$1) \begin{cases} a(a+1)(a - (-2 - \sqrt{2}))(a - (-2 + \sqrt{2})) \leq 0, \\ a \neq -2 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - \sqrt{2} < a \leq -1 \\ -2 + \sqrt{2} < a \leq 0 \end{cases}.$$

Так как a – целое число, то оно может принимать одно из четырех значений: 0; -1; -2; -3.

$$2) \begin{cases} 0 \leq -\frac{3a}{4} < 1, \\ a(a+1) \geq 0 \end{cases}.$$

Тогда $a = 0$ или $a = -1$. Подставив в квадратное уравнение найденные значения a , получим значения d , указанные выше, и придем к такому же ответу в исходном уравнении.

4.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки E и F – середины сторон BC и CD соответственно. Найдите наибольшее возможное значение площади треугольника ABD , если площади треугольников ABE , CEF , AEF и AFD образуют в некотором порядке четверку последовательных натуральных чисел.

Ответ: 6.

Решение. Пусть указанные натуральные числа – это n , $n + 1$, $n + 2$ и $n + 3$, тогда площадь четырехугольника $ABCD$ равна $4n + 6$ (см. рис. 5а). Так как EF – средняя линия треугольника BDC , то $S_{BDC} = 4S_{CEF} \geq 4n$. Тогда $S_{ABD} = S_{ABCD} - S_{BDC} \leq 4n + 6 - 4n = 6$.

Покажем, что значение 6 площади треугольника ABD достигается. Рассмотрим прямоугольную трапецию $ABCD$ с прямым углом D и основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$ (см. рис. 5б). Пусть

$$CD = 4, \text{ тогда } S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot CF = 1, S_{ABE} = \frac{1}{2} BE \cdot CD = 2, S_{AFD} = \frac{1}{2} AD \cdot DF = 3, S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot CD = 10, \text{ значит, } S_{AEF} = S_{ABCD} - (S_{ABE} + S_{CEF} + S_{AFD}) = 10 - (2 + 1 + 3) = 4. \text{ При этом, } S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot CD = 6.$$

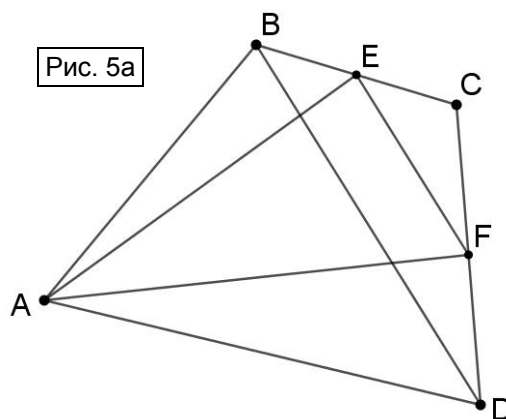


Рис. 5а

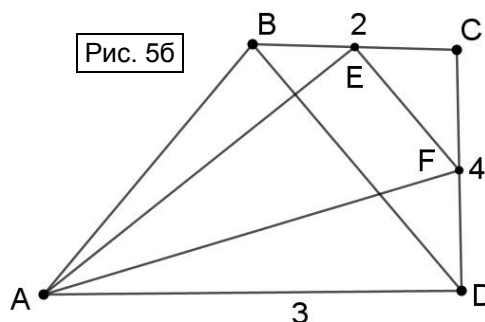


Рис. 5б

4.3. Пусть a , b и c – натуральные числа, которые попарно взаимно просты. Какие значения может принимать выражение $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$, если известно, что это число – целое?

Ответ: 8, 9 или 10.

Решение. Если $a = b = c = 1$, то значение выражения равно 8. Пусть не все числа между собой равны, тогда, без ограничения общности можно считать, что $a \leq b \leq c$. Так как числа a и b взаимно просты с числом c , то и числа $a + c$ и $b + c$ также взаимно просты с числом c . Следовательно, данное выражение может оказаться целым числом только в случае, когда $a + b$ делится на c . Но $a + b < 2c$, значит, $a + b = c$.

Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Аналогично, так как $a + c$ взаимно просто с a и $b + c$ взаимно просто с b , то $a + c = 2a + b$ делится на a и $b + c = 2b + a$ делится на b . Следовательно, либо $a = b = 1$, либо a и b – различные делители числа 2, то есть $a = 1$, $b = 2$. В первом случае $c = 2$, тогда значение исходного выражения равно 9. Во втором случае $c = 3$, тогда значение исходного выражения равно 10.

Второй способ. $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} = \frac{(2b+a)(2a+b)}{ab} = \frac{5ab + 2a^2 + 2b^2}{ab} = 5 + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$.

Для того, чтобы полученное число было целым, сумма взаимно обратных чисел, стоящих в скобках, должна быть либо целой, либо полуцелой. Учитывая, что числа a и b взаимно просты, первое возможно только при $a = b = 1$, а второе – при $a = 1$, $b = 2$. В первом случае значение исходного выражения равно 9, а во втором случае оно равно 10.

В заключительной фазе решения можно действовать и по-другому: $\frac{5ab + 2a^2 + 2b^2}{ab}$
 $= \frac{ab + 2(a+b)^2}{ab} = 1 + \frac{2c^2}{ab}$. Тогда число $\frac{2c^2}{ab}$ должно быть целым, значит, учитывая взаимную простоту чисел a и b с числом c , число $\frac{2}{ab}$ должно быть целым. Отсюда получим: $a = b = 1$, $c = 2$ или $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, что приводит к тем же значениям исходного выражения.

Пятый тур (15 минут; каждая задача – 7 баллов)

5.1. При делении многочлена $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - b$ на $x - a$ получается остаток 2. Найдите наименьшее возможное значение b .

Ответ: –6.

Решение. По теореме Безу: $P(a) = a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 4a - b = 2$. Тогда $b = a^4 + 2a^3 - 3a^2 - 4a - 2 = (a^4 + a^2 + 4 + 2a^3 - 4a^2 - 4a) - 6 = (a^2 + a - 2)^2 - 6 \geq -6$. Значение –6 достигается, например, при $a = 1$.

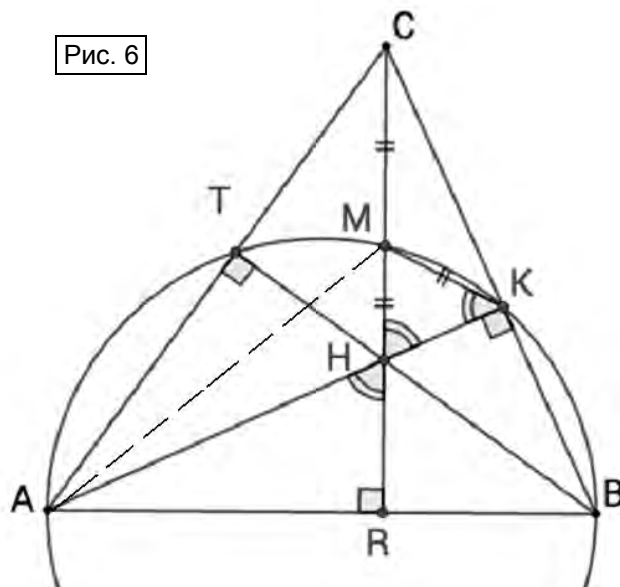
Решение может быть оформлено и без ссылки на теорему Безу: из условия задачи следует, что $P(x) - 2$ делится на $x - a$, то есть a является корнем многочлена $P(x) - 2$.

5.2. Существует ли такой остроугольный треугольник ABC , что окружность с диаметром AB проходит через середину отрезка CH (H – точка пересечения высот треугольника ABC)?

Ответ: не существует.

Решение. Предположим, что такой треугольник существует. Пусть AK и BT – его высоты (так как треугольник ABC – не прямоугольный, то точки K и T – различные), M – середина CH . Тогда окружность с диаметром AB проходит через точки K , M и T (см. рис. 6).

Рис. 6



Первый способ. Заметим, что через точки K , M и T проходит также окружность девяти точек треугольника ABC . Три различные точки определяют не более одной окружности, но совпадать эти окружности не могут, так как окружность девяти точек не проходит через вершины треугольника. Противоречие.

Второй способ. Пусть CR – третья высота треугольника ABC . Так как KM – медиана прямоугольного треугольника HKC , то $KM = MH = MC$, значит, $\angle MKN = \angle MNK = \angle AHR = \beta$. Тогда $\angle HAR = 90^\circ - \beta$, значит, $\angle MKB + \angle MAB = 90^\circ + \beta + 90^\circ - \beta + \angle MAK = 180^\circ + \angle MAK > 180^\circ$. Это противоречит тому, что $AMKB$ – вписанный четырехугольник.

Отметим, что не существует и тупоугольного треугольника, удовлетворяющего условию. Для доказательства достаточно рассмотреть на том же чертеже тупоугольный треугольник AHB , в котором C – ортоцентр. Кроме того, рассуждения, приведенные во втором способе решения, показывают, что точка M лежит вне окружности с диаметром AB .

Рассматривать прямоугольный треугольник не имеет смысла, так как в нем ортоцентр совпадает с вершиной.

5.3. Известно, что для некоторого натурального n оба числа $n - 1$ и $n + 1$ являются простыми. Можно ли числа от 1 до n выстроить в строку так, чтобы сумма любых двух стоящих рядом чисел являлась простым числом?

Ответ: можно.

Решение. Расставим числа так: $n, 1, n - 2, 3, n - 4, \dots, 2, n - 1$, то есть на нечетных местах – четные числа в порядке убывания, а на четных местах – нечетные числа в порядке возрастания. Тогда суммы двух стоящих рядом чисел будут попеременно равны простым числам $n + 1$ и $n - 1$.

Другой возможный способ расстановки симметричен указанному: $n - 1, 2, n - 3, 4, \dots, 1, n$. Так как мы можем использовать только простоту чисел $n - 1$ и $n + 1$, то число n должно быть крайним, значит, других способов требуемой расстановки не существует.