

Подготовка к итоговому зачету по алгебре за курс 10 класса.

A1. а) $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[15]{1746}}{\sqrt[15]{17}}} - \sqrt[7]{\frac{\sqrt[4]{557}}{\sqrt[4]{5}}}; \quad (-3)$

б) $(\sqrt[18]{4^3 \cdot 27^2})^3 \quad (1)$

в) Значение выражения $\sqrt[7]{2\sqrt{3} - 4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[14]{23 + 4\sqrt{15}} \quad (-\sqrt[7]{34})$

г) Упростить: $\frac{x^3 + y^3 - (x+y)^3}{x^2 - y^2}$, если $x = \frac{1}{6^{0.5} - 3^{0.5}}$, $y = \frac{6^{0.5} - 3^{0.5}}{3}$

д) $2\sqrt[3]{x^2} + \frac{\sqrt[3]{9x^5 - 4x}}{2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{3x^2}}$

е) $\frac{a - \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} - \sqrt{a}} + \frac{a + \sqrt[3]{a}\sqrt{a} - \sqrt[3]{a} - 1}{\sqrt{a} - 1}$

ж) $\frac{x^{0.6} - x^{-0.6}}{x^{0.4} + x^{-0.4} + 1} + x^{-0.2}$

з) $\left(\frac{2}{a^3 - 4} + \frac{2}{2 - a^3} - \frac{1}{2 + a^3}\right) : \left(\frac{4 - a^{\frac{2}{3}}}{3}\right)^{-1}$

и) $\frac{\frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{a^2} + b^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{a} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}} + b} \cdot \frac{a - b}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b^2} + b} + 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$

A2

1) $\frac{ctg^2 x}{\sin^2 x} (\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x)$

2) $\frac{8\sin 5^\circ \cdot \cos 5^\circ \cos 10^\circ}{\cos 70^\circ};$

3) $\frac{2\sin(\alpha + \frac{3\pi}{2})}{5\cos(\pi + \alpha)}$ если $\alpha = \frac{5\pi}{4}$

4) $\frac{\sin 91^\circ - \sin 1^\circ}{9\sqrt{2}\cos 46^\circ + 11\sqrt{2}\sin 44^\circ}$

5) $\frac{6(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ)(\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)}{2\sin 70^\circ}$

A3 Вычислите:

1) $\left(1\frac{1}{3} : 1,125 - 1,75 : \frac{2}{3}\right) \cdot 1\frac{5}{7}$

2) $\left(1\frac{1}{4} - 14,05\right) : 0,04 + 13,8 : \frac{1}{13}$

A4. Найти значение производной функции в точке:

- 1) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{1}{x+1}; f'(1) = ?$
- 2) $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x; f'\left(\frac{\pi}{12}\right) = ?$
- 3) $f(x) = (x^2 - x) \cos^2 x; f'(0) = ?$
- 4) $f(x) = \sin^3 \frac{x}{2}; f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$
- 5) $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}; f'(3) = ?$

A5. Найти производную:

- 1) $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x^3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3}$
- 2) $y = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$
- 3) $y = \sqrt[3]{4x^3 - 7x^2 + 1}$
- 4) $y = \cos^2 3x$
- 5) $y = x^2 \cos \frac{1}{x}$
- 6) $y = (x^3 + 1)\cos 2x$
- 7) $y = \sin 4x \cos 4x$

A6. Найти множество значений функции

- 1) $y = -3 \sin 3x + 1$
- 2) $y = 5 - 2 \cos^2 x$
- 3) $y = 2 \sin^2 x - 4$
- 4) $y = 5 \cos x - 1$
- 5) $y = 3 \cos 2x - 12 \sin 2x$

A7.

- | | | |
|---|---|--------------------------|
| 1) $\text{Ctg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=7-5\text{tg}2x;$ | $-\arctg 1.5+\pi n; \arctg 0.5+\pi k$ | |
| 2) $2\cos 3x=\sqrt{3}\cos x+\sin x$ | $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{12}+\pi k$ | |
| 3) $\sin x - \text{tg} \frac{\pi}{10} \cos x = 1$ | $\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{7\pi}{10}+2\pi n$ | $k, n, m \in \mathbb{Z}$ |
| 4) $(3-\text{ctg}^2 x)\sin 2x=2(1+\cos 2x)$ | $\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi n; -\arctg \frac{1}{3}+\pi m$ | |

Найдите наибольший отрицательный корень:

- 5) $\text{tg} \frac{\pi(x+9)}{4} = -1$
- 6) $\sin \frac{\pi(8x-3)}{6} = 0,5$
- 7) $\cos^2 x = 1 - \sin x$
- 8) $\cos 2x = \cos^2 x$

A8. Упростить выражение:

- | | |
|--|---------------------------|
| 1) $\operatorname{ctg}(30-x)\operatorname{ctg}(150-x)\operatorname{ctg}(270+x)$ | $\operatorname{tg}3x$ |
| 2) $\frac{1}{\sin 10} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10}$ | 4 |
| 3) $\frac{\cos 70 \cos 10 + \cos 80 \cos 20}{\cos 63 \cos 8 + \cos 82 \cos 22}$ | 1 |
| 4) $\frac{\sqrt{3} \cos x + \cos(90+x)}{\cos x + \sqrt{3} \cos(x-90)}$ | $\operatorname{tg}(60-x)$ |
| 5) $\frac{\cos(270+0.5x) - 2 \sin(x+90) \cos(x+90) - \sin(180-0.5x)}{\sin(90-0.5x) + \cos 2x + \cos(180-0.5x)}$, если $\operatorname{ctg} 2x = a$ | |

A9.

- Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = 3\cos - 2x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{2}$
- В какой точке касательная к графику заданной функции $y = f(x)$ параллельна заданной прямой:
 - $y = 3 + x$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x - 4$;
 - $y = 0$, $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 8$;
 - $y = x - 3$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x - 7$;
 - $y = 2$, $f(x) = \frac{5}{4}x^4 - x^3 + 6$?
- Определите, какой угол образует с осью X касательная, проведенная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=a$, если:
 - $f(x) = \frac{2x-1}{3-2x}$, $a = \frac{1}{2}$;
 - $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$, $a = 1$

A10 Решите неравенства:

- $\sqrt{\frac{x-3}{3-2x}} > -1$;
- $\sqrt{3x-4} > \sqrt{4-x}$;
- $\sqrt{x^2+x} < 1$;
- $x \geq \frac{6}{x+5}$.

A11.

- $\frac{1+\sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}$
- $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha}{2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$
- $\frac{\sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha}$
- $\frac{\cos 2\alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha} - \frac{\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha}$
- $\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha + \sin 4\alpha}$
- $\frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{4 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}$

B1.

- 1) $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} > 8 - 2x$
- 2) $4x - 6 > \sqrt{6x - 2x^2}$
- 3) $\frac{\sqrt{2x^2 - 5x + 2}}{2x^2 + 6x} \leq 0$
- 4) $\sqrt{x + 18} < 2 - x$ $[-18; -2]$
- 5) $\sqrt{3x - x^2} < 4 - x$ $[0; 3]$
- 6) $\sqrt{x^2 + 1} > x - 1$ $(-\infty; \infty)$
- 7) $\frac{\sqrt{2x-1}}{x-2} < 1$ $[1/2; 2] \cup [5; +\infty)$
- 8) $3\sqrt{x} - \sqrt{x+3} > 1$ $[1; +\infty)$

$$\sqrt{5-x} < \frac{\sqrt{x^3 - 7x^2 + 14x - 5}}{\sqrt{x-1}}$$

B2

- 1) $\sqrt{x+3}\sqrt{3x+7} = x+3$
- 2) $\sqrt{x^4 - 2x - 11} = 1 - x$
- 3) $\sqrt{x^2 - 4}(3 - \sqrt{1-x}) = 0$
- 4) $(x-5) = (x-5)\sqrt{x-2}$
- 5) $\sqrt{x-8} + 9\sqrt{8-x} = 0$
- 6) $\sqrt[3]{x+5} - \sqrt[3]{x-4} = 3$

Найти $x_0(x_0 + 1)$, где x_0 – корень уравнения $\sqrt[3]{24 + \sqrt{x-2}} - \sqrt[3]{5 + \sqrt{x-2}} = 1$

$$7) \sqrt{16-8x+x^2} + \sqrt{4x^2-13x-17} = x+4$$

B3

- 1) Найти наибольшее значение функции: $y = x^3 + 18x^2 + 81x + 3$ на отрезке $[-12; -7]$. 3
- 2) Найти наименьшее значение функции: $y = 26\cos x - 29x + 27$ на отрезке $y[-\frac{3\pi}{2}; 0]$. 53
- 3) Найдите точку максимума функции: $y = (2x-1)\cos x - 2\sin x + 1$ принадлеж. промежутку $(0; \frac{\pi}{2})$ 0,5
- 4) Найти число целых чисел из интервала убывания $y = \frac{(x+2)^3}{x^2}$
- 5) Найти наименьшее значение функции: $f(x) = x^4(x+2)^3$ на отрезке $[-1; 0]$

B4

- 1) $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0$;
- 2) $2\sin x - \cos x = 0,4$;
- 3) $\cos(90+5x) + \sin x = 2\cos 3x$;
- 4) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \cos 3x$;

5) $\sin(x+40)\cos(x+10) = 0,5$;

6) $\operatorname{tg} x = \sin x + 2\sin^2 \frac{x}{2}$;

B5

1) Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^3 - 2x + 4$ в точке $x_0 = -1$

2) Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-5; 3]$. На рисунке изображён график её производной. Укажите наибольшую длину промежутка, на котором касательная к графику функции $y = f(x)$ образует с положительным направлением оси Ox угол $0 \leq \alpha \leq 45^\circ$.

B6

Найдите точки экстремума заданной функции и определите их характер:

1) $y = x + \frac{4}{x}$;

2) $y = \frac{x^2+9}{x}$;

3) $y = x - 2\sqrt{x-2}$;

4) $y = 4\sqrt{2x-1} - x$.

C1

1) $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2 - 5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 + 48\frac{x^2-4}{x^2-1} = 0$;

2) $x^2 + \frac{81x^2}{(x+9)^2} = 40$;

C2

1) $58 \cos\left(\frac{72\pi}{61}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right) + \sin 2x + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = 58 \cos\left(\frac{72\pi}{2}\right) + 26 \sin\left(-\frac{6\pi}{97}\right)$;

2) $\operatorname{tg}^2 x - \sin \frac{5\pi}{6} \operatorname{tg} x = 0 \quad \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$;

3) $\frac{6\cos^2 x - \cos x - 2}{\sqrt{-\sin x}} = 0 \quad -\arccos \frac{2}{3} + 2\pi m, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$

4) $\frac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{\sqrt{-\cos x}} = 0 - \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, \quad /$

5) $2\cos^2 x - \sin(90 - x) - 1 = 0$, найти корни на промежутке $[-360; -90]$

C3

1) Найдите наибольшее возможное значение площади равнобедренного треугольника, длина боковой стороны которого равна $2\sqrt{2}$.

2) Периметр треугольника равна 20. Длина одной из его сторон равна 5. Найти длины других сторон треугольника, при которых его площадь принимает наибольшее значение. Найдите его

- 3) Каждая из боковых сторон и меньшее из оснований трапеции равны a . Найти большее основание трапеции так, чтобы её площадь была наибольшей. (2a)
- 4) Найдите размеры открытого бассейна объёмом 18, с дном в форме прямоугольника, стороны которого относятся как 1:3 так, чтобы на облицовку стен и дна пошло наименьшее количество материала. (2,6; 1,5)
- 5) Площадь равнобедренной трапеции с углом при основании 60 равна $2\sqrt{3}$. Найти длину высоты трапеции наименьшего периметра. ($\sqrt{3}$)
- 6) Найти максимально возможную площадь прямоугольника с периметром 72. (324)
- 7) Найти наибольший периметр равнобедренной трапеции, вписанной в полукруг радиуса R так, что нижнее основание трапеции совпадает с диаметром полукруга. (5R)

C4

Исследуйте функцию и постройте её график: $y = \frac{x^2+4}{x}$

Постройте график функции:

- a) $y = \frac{x}{x^2-4}$;
 b) $y = \frac{x^2-4}{x^2+4}$,

C5

- a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = 8 \end{cases}$ (-2;-4),(-4;-2),(2;4),(4;2)
- c) $\begin{cases} 2y^2 - 4xy + 3x^2 = 17 \\ y^2 - x^2 = 16 \end{cases}$ (-3;-5),(-5/3;-13/3),(5/3;13/3),(3;5)
- d) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 \\ y^2 - 2xy + 15 = 0 \end{cases}$ (-4;-5), (-3 $\sqrt{3}$;- $\sqrt{3}$), (3 $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$), (4;5)
- e) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ xy(x+y) = -2 \end{cases}$ (-1;2),(2;-1)
- f) $\begin{cases} 2x + by = c^2 \\ bx + 2y = ac - 1 \end{cases}$
- g) $\begin{cases} \sqrt{x^2} + y = 5 \\ y^2 - x = 7 \end{cases}$
- h) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ x + y = 28 \end{cases}$
- i) $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = 6 \\ \sqrt{x+y} - y + x = 2 \end{cases}$
- j) $\begin{cases} x\sqrt{(x+y)^2} = 3x \\ x(\sqrt{(x-y)^2})^2 = 0 \end{cases}$