Подготовительные задания

1. При всех значениях a решите уравнение $(a-1)x = a+3$.

2. Для каждого значения a решите уравнение $\dfrac{x-a}{x-5} = 0$.

3. Для каждого значения a решите неравенство $x^2 > a$.

4. При всех значениях параметра a решите неравенство $|x-3| \geqslant a$.

5. При всех a решите неравенство $\sqrt{x} > -a$.

6. Решите неравенство $(0,5)^x \leqslant b+2$ для всех значений параметра b.

7. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\log_a x = 1$.

8. Для каждого значения параметра t решите уравнение $\sin x = t$.

9. Решите уравнение $(a-2)x^2 + 2(a-2)x + 2 = 0$ при всех a.

10. При каких значениях a функция $y = \dfrac{3^{x^2}}{3^{ax-11}}$ имеет минимум в точке $x = 6$?

11. При каких a сумма квадратов различных корней уравнения $x^2 - ax + a + 1 = 0$ больше 1?

12. При каких a из неравенства $2x + a < 2$ следует неравенство $x < -2$?

13. Разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $x^2 + ax - 6 = 0$ равна 5. Найдите все возможные значения a.

14. Найдите все значения параметра a, при которых разность между корнями уравнения

$$x^2 + 3ax + a^4 = 0$$

максимальна.

15. Прямая $y = 2x + 1$ является касательной к графику функции $y = x^2 - 2x - c$. Найдите значение параметра c.

Графический метод

16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $|-(x-3)^2 + 4| = a$ имеет ровно два корня.

17. При каких значениях x уравнение

$$\frac{|t+2|(t^2 - 3t + 2)}{t-1} + x^2 - 1 = 0$$

имеет ровно два решения относительно t?

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy - 4y + 2x + 4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

19. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 1$$

на промежутке $(0; +\infty)$ имеет хотя бы три корня.

20. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=9,\\(x-2)^2+y^2=a^2\end{cases}$$

имеет единственное решение.

21. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}x^2+y^2-6|x|-6|y|+17\leqslant 0,\\x^2+y^2-2y=a^2-1\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

22. При каких значениях m на плоскости найдётся круг, содержащий все точки, удовлетворяющие данной системе неравенств

$$\begin{cases}2y-x\leqslant 2,\\y+2x\leqslant 2,\\y+mx\geqslant -1?\end{cases}$$

23. Найдите все значения a, при которых неравенство $\dfrac{4x-a}{x-2a}<0$ выполнено для всех x, удовлетворяющих условию $2\leqslant x\leqslant 4$.

24. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(y-2x)(2y-x)\leqslant 0,\\\sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2}=\dfrac{|a+1|}{\sqrt{5}}\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

25. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x-1}\ln(4x-a)=\sqrt{2x-1}\ln(5x+a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0;1]$.

26. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left((x+5)^2+y^2-a^2\right)\ln(9-x^2-y^2)=0,\\\left((x+5)^2+y^2-a^2\right)(x+y+5-a)=0\end{cases}$$

имеет два различных решения.

27. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases}ax\geqslant 2,\\\sqrt{x-1}>a,\\3x\leqslant 2a+11\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3;4]$.

28. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases}|x|+|a|\leqslant 4,\\x^2+8x<16a+48\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[-1;0]$.

29. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $x^2+5|x-a|-7x\leqslant -4a$ имеет единственное решение.

30. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ xy=a^2-3a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

31. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x)=ax-2a-1+|x^2-x-2|$$

меньше, чем -2.

32. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |y-3-x|+|y-3+x|=6, \\ (|x|-4)^2+(|y|-3)^2=a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Аналитические методы

33. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{1-2a\sqrt{1+x^2}+a(1+x^2)}{(1+x^2)-2\sqrt{1+x^2}}=3$$

имеет хотя бы одно решение.

34. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\left|\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$$

выполнено при всех x.

35. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{x^4-x^2+a^2}=x^2-a-x$$

имеет ровно три различных корня?

36. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x)=4x^2+4ax+a^2-2a+2$$

на множестве $|x|\geqslant 1$ не менее 6.

37. При каких значениях параметра a область определения y содержит ровно 7 целых чисел, если

$$y=\sqrt{a^8x^{0,25}-x^{0,25+x\log_x a}-a^{8,25}+a^x\sqrt{a^{0,5}}}.$$

38. При каких a один корень уравнения $(a^2+a+1)x^2+(2a-3)x+a-5=0$ больше 1, а другой меньше 1?

39. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $3\sin x+\cos x=a$ имеет единственное решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

Четность, симметрия, инвариант

40. При каких значениях параметра a уравнение $3^{x^2-2ax+a^2} = ax^2 - 2a^2x + a^3 + a^2 - 4a + 4$ имеет ровно одно решение?

41. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - 8y + 6a + 28 \leqslant 0, \\ ay^2 - 6ay - 8x + 11a - 12 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет одно решение.

42. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y = \pi x - \frac{\pi^2}{4}, \\ b \cdot \arcsin(\sin x) = y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

43. Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует единственная тройка (x, y, z) действительных чисел x, y, z, удовлетворяющая системе уравнений

$$\begin{cases} z \cdot \cos(x - y) + (2 + xy) \cdot \sin(x + y) - z = 0, \\ x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ (x + y + a \cdot \sin^2 z)((1 - a)\ln(1 - xy) + 1) = 0. \end{cases}$$

44. Найдите все положительные значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_{2-x}\left(a^{2+x} + 2a^{1-x} + x - 1\right) + \log_{2+x}\left(a^{2-x} + 2a^{1+x} - x - 1\right) = 2$$

имеет ровно одно решение относительно x.

45. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2\left(x^4y^2 + 2a^2\right) = \log_2\left(1 - ax^2y^2\right) + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задачи повышенной сложности

46. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 - 14x^2 + ax - 27 = 0$ имеет три действительных различных корня, образующих геометрическую прогрессию?

47. Найдите все пары вещественных чисел $(a; b)$, при которых неравенство

$$2a(x + 2)^4 + 9b(x - 2)^4 \geqslant x^4 + 24x^2 + 16$$

справедливо для всех вещественных x.

48. Определите, при каких значениях параметра a уравнение $a\sqrt{x + y} = \sqrt{3x} + 2\sqrt{y}$ имеет единственное решение (x, y).

49. Найдите все значения параметра a из промежутка $[0, 2\pi)$, при которых уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2 - xy + \frac{3}{2}y^2} = x\cos a + y\sin a$$

имеет хотя бы одно решение (x, y), отличное от $(0, 0)$.

50. Найдите все значения параметра a, при которых наименьшее (по x) значение выражения

$$\log_2^2(ax) + \log_2^2\left(\frac{1 - a}{x}\right)$$

максимально.

51. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2\sin^2(\pi x) - 3\sin^2(\pi y) - 2 + \operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \dfrac{3}{2}\sin^2(\pi x) - 2\sin^2(\pi y) - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}(\pi a) = 0, \\ \log_2\left(1 + 4\sin^2\left(\dfrac{\pi a}{4} - \dfrac{\pi}{16}\right) - x^2 - y^2\right) \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

52. Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} \left|6\sqrt{\cos\dfrac{\pi y}{4}} - 5\right| + \left|12\sqrt{\cos\dfrac{\pi y}{4}} + 1\right| - \left|1 - 6\sqrt{\cos\dfrac{\pi y}{4}}\right| = 5 - \left(\sin\dfrac{\pi(y-2x)}{12}\right)^2, \\ 10 - 9\left(x^2 + (y-a)^2\right) = 3\sqrt{x^2 + (y-a)^2 - \dfrac{8}{9}}. \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

53. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sin^2 x + (a-2)^2 \sin x + a(a-2)(a-3) = 0$$

имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно три различных корня.

52. График функции $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, $c < 0$ пересекает ось ординат в точке A и имеет ровно две общие точки M и N с осью абсцисс. Прямая, касающаяся этого графика в точке M, проходит через точку A. Найдите a, b и c, если площадь треугольника AMN равна 1.

54. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{106 + \log_a^2 \cos ax + \log_a \cos^{10} ax} + \sqrt{58 + \log_a^2 \sin ax - \log_a \sin^6 ax} + \sqrt{5 + \log_a^2 \operatorname{tg} ax + \log_a \operatorname{tg}^2 ax}$$

и все пары (a, x), при которых оно достигается.

55. Найдите все пары (α, β), при которых достигается минимум выражения

$$\frac{4 - 3\sin\alpha}{2 + \cos 2\alpha} + \frac{2 + \cos 2\alpha}{\beta^2 + \beta + 1} + \frac{\beta^2 + \beta + 1}{\sqrt{\beta} + 1} + \frac{\sqrt{\beta} + 1}{4 - 3\sin\alpha}.$$

56. Пусть

$$f(x, y) = \sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y,$$
$$g(x, y) = -\sqrt{-6x^2 - 14y^2 - 18xy + 6} + y.$$

Найдите все значения, которые может принимать хотя бы одна из этих функций.

57. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sin\left(x + \dfrac{a}{x}\right) = x + 1$ имеет бесконечно много решений.

Список используемой литературы

[1] Шестаков С. А. ЕГЭ 2022. Математика. Задачи с параметром. Задача 17 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. — М: МЦНМО, 2022 — 288 с.

[2] Ткачук В. В. Математика — абитуриенту. — 20-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2020 — 944 с.

[3] Задачи с параметрами, сложные и нестандартные задачи. Козко А. И., Панфёров В. С., Сергеев И. Н. и др. — М.: МЦНМО, 2016 — 229 с.

[4] Подготовка к олимпиадам и ЕГЭ по математике и физике: Игорь Вячеславович Яковлев [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://mathus.ru

[5] Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный институт педагогических измерений» [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.fipi.ru

[6] Образовательный портал для подготовки к экзаменам «РЕШУ ЕГЭ» [Электронный ресурс]. — Режим доступа: https://ege.sdamgia.ru

[7] Центральная приемная комиссия МГУ им. М.В. Ломоносова [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://cpk.msu.ru

[8] Ларин Александр Александрович. Математика. Репетитор [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://alexlarin.net