Материалы заданий отборочного этапа Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по предмету «математика» в 2013/2014 учебном году

<u>Задача 1:</u> Существует ли пирамида, в основании которой лежит треугольник, такой, что длина одной его стороны равна разности длин двух других сторон?

<u>Решение:</u> Если A, B, C - вершины основания и, например, $AB = AC - BC$, то $AC = AB + BC$. И тогда точки A, B, C находятся на одной прямой. Такой треугольник в основании пирамиды не существует.

<u>Ответ:</u> Пирамида не существует.

<u>Задача 2:</u> Некоторые люди стараются запланировать важные события на «красивые» даты. Последняя такая дата была 20.12.2012, перед ней 20.11.2011. Когда будет следующая такая дата и на какой день недели она придётся?

<u>Решение:</u> Такие «красивые» даты имеют вид (x, y, x, y), где $x \in \{01, 02, \dots, 31\}$, $y \in \{01, 02, \dots, 12\}$.

Дата $(20, 12, 20, 12)$ уже прошла, поэтому для ближайшей в будущем даты получаем $y = 01, x = 21$. Итак, это будет 21.01.2101.

Вычислим день недели. Количество дней в обычном (невисокосном) году 365 имеет при делении на 7 остаток 1, поэтому каждый год 21 января сдвигается по неделе на 1 день вперед. 21.01.2014 – вторник, $2101 - 2014 = 87$. Между 2014 и 2101 ровно 21 високосный год: 2016, 2020, ..., 2096 (2100 не является високосным годом, после реформы календаря, проведенной папой Григорием XIII в 1582, високосными, т. е. содержащими на 1 день больше, считаются годы, номера которых кратны 4, но не кратны 100, либо кратны 400), каждый из которых сдвинет 21 января еще на один день недели вперед, итого $87 + 21 = 108$. Остаток от деления 108 на 7 равен 3, поэтому 21 января 2101 года будет на 3 дня позже вторника, т.е. пятница.

<u>Ответ:</u> пятница, 21.01.2101.

<u>Замечание</u>. Если участник посчитал год 2100 високосным, а все остальное сделал правильно, оценка не снижается.

<u>Задача 3:</u> Пусть $S(x, y)$ означает среднее арифметическое чисел x, y. Для чисел a, b, c, d выполняются соотношения $S(a, b) = S(c, d)$ и $S(ab, cd) = 2S(a, b)S(c, d)$. Найдите $S(a + 2b, 3c + 4d)$.

<u>Решение:</u> Имеем

$$\begin{cases} a + b = c + d \\ ab + cd = (a + b)(c + d) \end{cases}$$

Откуда

$ab + cd = (a+b)^2 = (c+d)^2$

и тогда $a = b = c = d = S(a + 2b, 3c + 4d) = 0.$

Ответ: 0.

Задача 4: *Усеченной разностью* чисел x, y называется операция $x \dot{-} y$, результат которой равен обычной разности $x - y$, если $x \geq y$, и нулю, если $x \leq y$. Изобразите на координатной плоскости множество всех точек (x, y), удовлетворяющих уравнению $(x \dot{-} \sqrt{y}) \dot{-} x = 0.$

Решение: Допустимы лишь значения $y \geq 0.$

Если $x \leq 0$, то $x \dot{-} \sqrt{y} = 0$ и $(x \dot{-} \sqrt{y}) \dot{-} x = 0.$

Если $x \geq 0$, то $0 \leq x \dot{-} \sqrt{y} \leq x$ и $(x \dot{-} \sqrt{y}) \dot{-} x = 0.$

Ответ: Вся верхняя полуплоскость: $x \in (-\infty, \infty)$, $y \geq 0.$

Задача 5: Полной анаграммой слова X называется слово, полученное из X некоторой перестановкой его букв (при этом часть букв может оставаться на своих местах). Анаграммы часто применяются в качестве псевдонима (вымышленного имени). В частности, французский писатель Франсуа Рабле еще в конце 16 века подписывал свой острый сатирический роман «Гаргантюа и Пантагрюэль» псевдонимом Алькофрибас Назье (по-французски Alcofribas Nasier является полной анаграммой имени Francois Rabelais, включая пробел). Сколько существует полных анаграмм слова:

а) Гаргантюа,

б) Nasier?

Любые сочетания букв возможны.

Ответ: а) $\frac{9!}{3!2!} = 30240$, б) $6! = 720.$

Задача 6: Все члены последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ - неотрицательные числа $x_1 = \sin\alpha$, $x_2 = 2\cos\alpha$, произведение $x_1\, x_2\, \ldots\, x_{100}$ равно 1, каждый член x_n при $n \geq 3$ является средним геометрическим всех предыдущих членов. Найдите α и все значения x_n.

Решение: Имеем:

$$x_3 = \sqrt{x_1 x_2}, \qquad x_4^3 = x_1 x_2 x_3 = (x_1 x_2)^{\frac{3}{2}},$$

$$x_4 = x_3, \quad x_5^4 = x_1 x_2 x_3 x_4 = x_1 x_2 x_3^2 = x_3^4, \qquad x_5 = x_3.$$

Аналогично

$$x_n = \sqrt{x_1 x_2} \text{ при всех } n \geq 3.$$

Далее,

$$x_1\, x_2\, \dots\, x_{100} = x_1 x_2 \left(\sqrt{x_1 x_2}\right)^{98} = (x_1 x_2)^{50} = 1.$$

В силу неотрицательности членов последовательности получаем

$$x_1 x_2 = 1, \quad x_n = 1 \text{ при всех } n \geq 3.$$

Далее,

$$x_1 x_2 = \sin\alpha * 2\cos\alpha = \sin 2\alpha = 1\,,$$

$$\alpha = {}^{\pi}/_{4} + \pi k, \qquad x_1 = {}^{(-1)^k}/_{\sqrt{2}}, \qquad x_2 = (-1)^k\sqrt{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

В силу неотрицательности членов последовательности k четно.

<u>Ответ:</u> $\alpha = {}^{\pi}/_{4} + \pi k, \qquad x_1 = {}^{1}/_{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \sqrt{2}, \qquad k \in \mathbb{Z},$

$x_n = 1$ при всех $n \geq 3$.

<u>**Задача 7:**</u> Завод пересылает заказчику изготовленные одинаковые электроприборы в ящиках, вмещающих по 20 и 55 приборов. Все ящики должны быть заполнены. Партии из какого количества изделий нельзя переслать такими ящиками?

<u>Решение:</u>

1. Числа 20 и 55 имеют общий делитель 5, поэтому нельзя переслать количество приборов, не кратное 5.
2. Пусть x – количество ящиков, вмещающих 20 приборов, y – количество ящиков, вмещающих 55 приборов. Если n – пересылаемое количество изделий, то $n \in \mathbb{N}$, $n = 20x + 55y,\ x, y \in \mathbb{Z}_+$. (1)

Как уже установлено, $n = 5k, k \in \mathbb{N}$. Разделим на 5 соотношение (1):

$k = 4x + 11y, \quad x, y \in \mathbb{Z}_+$. (2)

При этом числа 4 и 11 взаимно простые.

3. Покажем, что любое целое k, $k \geq 44$, можно представить в виде (2). Если k кратно 4, это очевидно. Пусть k не кратно 4, тогда

$k = 4q - r,\ q \in \mathbb{N},\ q \geq 11,\ r \in \{1, 2, 3\}$.

Представим k в виде $k = 4(q - 3r) + 11r$,

при этом $q - 3r \geq 0$, что доказывает сформулированное утверждение.

4. Рассмотрим все натуральные числа, не превосходящие 44, разместив их в таблицу

1	2	3	4	5	6	7	~~8~~	9	10	~~11~~
~~12~~	13	14	~~15~~	~~16~~	17	18	~~19~~	~~20~~	21	~~22~~
~~23~~	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	30	~~31~~	~~32~~	~~33~~
~~34~~	~~35~~	~~36~~	~~37~~	~~38~~	~~39~~	~~40~~	~~41~~	~~42~~	~~43~~	~~44~~

Вычеркнем последний столбец (он образован числами, кратными 11, все они представляются в виде(2)).

В каждом столбце есть числа, кратные 4 (они представляются в виде (2)), вычеркнем их и все числа того же столбца, находящиеся ниже (каждое из них больше предыдущего числа столбца на 11, поэтому тоже представляются в виде (2)). Остаются невычеркнутыми 15 чисел, они не представляются в виде (2). Умножив такие числа на 5, получим 15 чисел, кратных 5, но не представимых в виде (1).

<u>Ответ:</u> нельзя переслать количество изделий, не кратное 5, а также 5, 10, 15, 25, 30, 35, 45, 50, 65, 70, 85, 105, 125, 145.

Любое другое количество приборов можно разместить в ящиках по 20 и 55.

<u>Задача 8:</u> Найдите все функции вида $f(x) = ax^3 + (2a-1)x^2 + bx + c$, сохраняющие модуль, т.е. удовлетворяющие условию: если $|x_1| = |x_2|$, то $|f(x_1)| = |f(x_2)|$.

<u>Решение:</u> Условие сохранения модуля равносильно следующему:

$\forall x\ (f(x) = f(-x)$ или $f(x) = -f(-x))$.

Таким образом, в любой точке x

$ax^3 + bx = -ax^3 - bx$ или $(2a-1)x^2 + c = -(2a-1)x^2 - c$,

т.е.

$x = 0$ или $(ax^2 + b)\big((2a-1)x^2 + c\big) = 0.$

Положим

$$g(x) = a(2a-1)x^4 + \big((2a-1)b + ac\big)x^2 + bc.$$

Тогда, если $x \neq 0$, то $g(x) = 0$.

Многочлен $g(x)$ имеет либо пустое, либо конечное множество корней, поэтому он обращается в 0 во всех ненулевых точках только тогда, когда все его коэффициенты равны 0:

$$\begin{cases} a(2a-1)=0 & (1) \\ (2a-1)b+ac=0 & (2) \\ bc=0 & (3) \end{cases}$$

Из (3) следует, что $b=0$ или $c=0$.

Если $b=0$, то $a(2a-1)=0$ и $ac=0$.

Имеем следующие возможности:

1. $a=b=0$. Тогда $f(x)=-x^2+c$.
2. $a=1/2, b=c=0$. Тогда $f(x)=\frac{1}{2}x^3$.

   Если $c=0$, то $a(2a-1)=(2a-1)b=0$, откуда получаем следующие возможности.
3. $a=b=c=0$, включается в случай 1.
4. $a=1/2, c=0$. Тогда $f(x)=\frac{1}{2}x^3+bx$ и этот случай включает в себя случай 2.

Ответ: $f(x)=-x^2+c$ или $f(x)=\frac{1}{2}x^3+bx$, где $b,c\in(-\infty;\infty)$.

<u>Задача 9:</u> Для новогоднего праздника было куплено 8 золотых шаров, 9 серебристых шаров, 6 гирлянд и 12 хлопушек. Известно, что 4 золотых шара, 12 серебристых, 8 гирлянд и 6 хлопушек стоят 310 рублей, а 6 золотых шаров, 3 серебристых, 2 гирлянды и 9 хлопушек стоят 230 рублей. Сколько было потрачено денег на новогодний праздник?

<u>Решение:</u> Имеем

$$\begin{cases} 4x+12y+8z+6t=310 \\ 6x+3y+2z+9t=230 \end{cases}$$

Надо найти $8x+9y+6z+12t$. Умножим первое уравнение системы на a, второе --- на b и сложим:

$(4a+6b)x+(12a+3b)y+(8a+2b)z+(6a+9b)t=310a+230b$. Выберем a и b так, чтобы

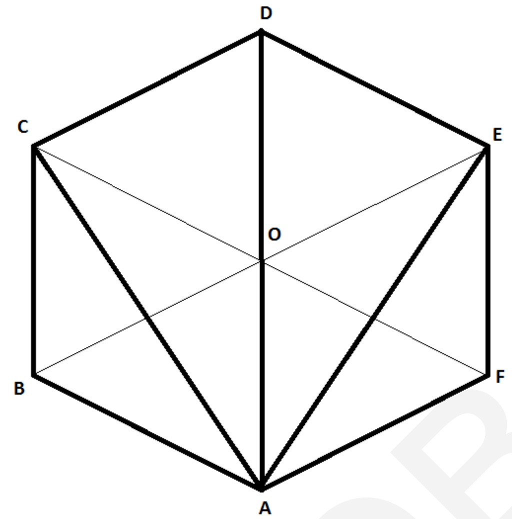
$$\begin{cases} 4a+6b=8 \\ 12a+3b=9 \\ 8a+2b=6 \\ 6a+9b=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3b=4 \\ 4a+b=3 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2}, b=1.$$

Таким образом, $8x+9y+6z+12t=310a+230b=385$ руб.

Ответ: 385 рублей.

Задача 10: Правильный шестиугольник разбивается на треугольники максимальным числом диагоналей, не пересекающихся внутри фигуры. Найдите отношение площади наименьшего из образовавшихся треугольников к площади всей фигуры.

Решение:



Указанные в условии диагонали – это AD, AC и AE. Они разбивают шестиугольник на четыре треугольника, среди которых две пары равных.

Проведем дополнительно две диагонали BE и CF. Эти три "осевые" диагонали (AD, BE, CF, являющиеся наибольшими) разбивают исходный шестиугольник на 6 одинаковых правильных треугольников. Поэтому длина наибольшей диагонали равна удвоенной стороне шестиугольника.

Обозначим центр фигуры (центр симметрии) через O.

Площадь треугольника AEF равна площади треугольника AOF, т.к. оба составляют половину ромба AOEF. Следовательно, площадь треугольника AEF составляет шестую часть площади шестиугольника.

Площадь трапеции ADEF есть половина площади всей фигуры. Следовательно, площадь треугольника ADE составляет $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ часть площади шестиугольника.

Ответ: $\frac{1}{6}$.