

Заключительный этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика» в 2015 г.

Вариант № 11

1. Одновременно из пункта A в пункт B отправляется автомобиль со скоростью 80 км/ч , а из пункта B в пункт C — поезд со скоростью 50 км/ч . Через 7 часов после начала движения они оказались на наименьшем расстоянии друг от друга. Найдите расстояние между пунктами, если все три пункта равноотстоят друг от друга и связаны прямолинейными дорогами. (8 баллов)
2. Решите неравенство $\log_x(4x-3) > 2$. (8 баллов)
3. Некоторые натуральные числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию с целочисленным знаменателем. Найдите эти числа, если их сумма равна 157. (8 баллов)
4. Решите уравнение $\sqrt[4]{1-\cos^{15} 3x \cos^2 5x} = \sin 5x$. (8 баллов)
5. Решите неравенство $(3^{x^2-1} - 9 \cdot 3^{5x+3}) \log_{\cos x}(x^2 - 6x + 9) \geq 0$. (10 баллов)
6. Найдите сумму целых чисел, которые принадлежат множеству значений функции $f(x) = \log_3(10 \cos 2x + 17)$ при $x \in [1, 25(\arctg 0,25) \cos(\pi - \arcsin(-0,6)); \arctg 3]$ (10 баллов)
7. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Угол EDC равен 30° , $EC = 1$, а площадь треугольника DBE относится к площади треугольника ABC как $1 : 2$. Найдите длину отрезка BO , если O — точка пересечения отрезков AE и CD . (12 баллов)
8. На прямой $y = -5/3$ найдите точку M , через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/2$, угол между которыми равен 60° . (12 баллов)
9. Укажите все значения a , при которых система уравнений $(x-a)^2 = 16(y-x+a-3)$, $\log_{(x/3)}(y/3) = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a . (12 баллов)
10. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом B , равным 90° , и углом C , равным 30° . Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр боковой грани AA_1C_1C и вершину B и параллельной диагонали боковой грани AB_1 , если расстояние от вершины C до секущей плоскости равно 2, а гипотенуза основания призмы равна $\sqrt{14}$? (12 баллов)

Решение варианта №11

1. Одновременно из пункта A в пункт B отправляется автомобиль со скоростью 80 км/ч , а из пункта B в пункт C — поезд со скоростью 50 км/ч . Через 7 часов после начала движения они оказались на наименьшем расстоянии друг от друга. Найдите расстояние между пунктами, если все три пункта равноотстоят друг от друга и связаны прямолинейными дорогами.

Решение: Пусть $AB = BC = AC = S$. Обозначим расстояние между автомобилем и поездом через $r = r(t)$, где t — время от начала движения. Тогда по теореме косинусов имеем:

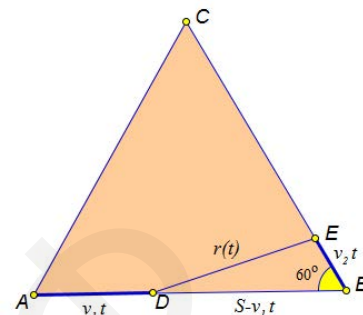
$r^2 = (S - 80t)^2 + (50t)^2 - 50t(S - 80t)$. Для нахождения времени, при котором расстояние между автомобилем и поездом было наименьшим, вычислим производную функции

$$r^2 = r^2(t):$$

$$(r^2)' = -2 \cdot 80(S - 80t) + 2 \cdot 2500t - 50(S - 80t) + 80 \cdot 50t = -210S + 2(6400 + 2500 + 4000)t = 0.$$

Так как наименьшее значение в процессе движения функция $r^2 = r^2(t)$ принимает при $t = 7$, то $-105S + (6400 + 2500 + 4000) \cdot 7 = 0$, и $S = 860$.

Ответ: 860 км.



2. Решите неравенство $\log_x(4x - 3) > 2$.

Решение: $\log_x(4x - 3) > 2$. ОДЗ: $x \in (3/4; 1) \cup (1; +\infty)$. $\log_x \frac{x^2}{4x - 3} < 0$.

$$1) \begin{cases} 3/4 < x < 1 \\ 0 < x < 1, \\ \frac{x^2}{4x - 3} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3/4 < x < 1, \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3/4 < x < 1, \\ x < 1, \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3/4 < x < 1.$$

$$2) \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ \frac{x^2}{4x - 3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ x^2 - 4x + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ 1 < x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 3.$$

Ответ: $x \in (3/4; 1) \cup (1; 3)$.

3. Некоторые натуральные числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию с целочисленным знаменателем. Найдите эти числа, если их сумма равна 157.

Решение: Если считать, что одно число образует возрастающую геометрическую прогрессию, то одно число 157 является решением задачи. По условию для некоторого натурального числа n справедливо равенство $b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1} = 157$, или

$b_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = 157$. Так как 157 — простое число (оно не делится на 2, 3, 5, 7, 11, 13), то $b_1 = 1$, $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = 157$, или $b_1 = 157$, $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = 1$. Второй случай

не подходит. Следовательно, $b_1 = 1$, $q(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2}) = 156$,
 $q(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2}) = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 13$. Рассмотрим следующие случаи.

- 1) Если $n = 2$, то $q = 156$. Искомые числа: 1, 156.
- 2) Если $n = 3$, то $q^2 + q - 156 = 0$. Так как q - натуральное число, большее единицы, то $q = 12$. Искомые числа: 1, 12, 144.
- 3) Если $n \geq 4$, то $q(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2}) = 156$. Так как q - натуральное число, большее единицы, то $q^3 \leq q^{n-1} \leq 156$, $q \leq 5$, причем q является делителем числа $156 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 13$. Следовательно, q может принимать следующие значения: 2, 3, 4.

1) Если $q = 2$, то $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} = 78$, $2^{n-1} - 1 = 156$, или $2^{n-1} = 157$, уравнение не имеет натуральных решений.

2) Если $q = 3$, то $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-2} = 52$, $\frac{3^{n-1} - 1}{2} = 52$, $3^{n-1} = 105$, уравнение не имеет натуральных решений.

3) Если $q = 4$, то $1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-2} = 39$, $\frac{4^{n-1} - 1}{3} = 39$, $4^{n-1} = 118$, уравнение не имеет натуральных решений.

Ответ: $\{157\}$, $\{1; 156\}$ или $\{1; 12; 144\}$.

4. Решите уравнение $\sqrt[4]{1 - \cos^{15} 3x \cos^2 5x} = \sin 5x$.

Решение:

При условии $\sin 5x \geq 0$ обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. При найденных ограничениях уравнение равносильно следующему: $\sin^4 5x + \cos^{15} 3x \cos^2 5x - 1 = 0$,
 $(1 - \cos^2 5x)^2 + \cos^{15} 3x \cos^2 5x - 1 = 0$, $-2\cos^2 5x + \cos^4 5x + \cos^{15} 3x \cos^2 5x = 0$,
 $\cos^2 5x(\cos^2 5x + \cos^{15} 3x - 2) = 0$. Таким образом, приходим к совокупности уравнений:

1) $\cos 5x = 0$, $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$, с учетом условия $\sin 5x \geq 0$ имеем $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos^2 5x + \cos^{15} 3x - 2 = 0$, что равносильно системе уравнений $\begin{cases} \cos^2 5x = 1, \\ \cos^{15} 3x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \pi k, \\ 3x = 2\pi m, \end{cases}$

$k, m \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $3k = 10m$, $k, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 3s$, $k = 10s$, $s \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2\pi s$, $s \in \mathbb{Z}$, что удовлетворяет условию $\sin 5x \geq 0$.

Таким образом, решения исходного уравнения: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = 2\pi s$, $s \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = 2\pi s$, $s \in \mathbb{Z}$.

5. Решите неравенство $(3^{x^2-1} - 9 \cdot 3^{5x+3}) \log_{\cos \pi x} (x^2 - 6x + 9) \geq 0$.

Решение:

ОДЗ: $(x-3)^2 > 0$, $\cos \pi x > 0$, $\cos \pi x \neq 1$, $\Rightarrow x \in (-0,5 + 2k; 2k) \cup (2k; 0,5 + 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Исходное неравенство на ОДЗ эквивалентно следующему

$$(x^2 - 5x - 6)(\cos \pi x - 1)(x^2 - 6x + 8) \geq 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+1)(x-2)(x-4) \leq 0 \Rightarrow$$

$$x \in [-1; 2] \cup [4; 6].$$

С учетом ОДЗ имеем $x \in (-0,5; 0) \cup (0; 0,5) \cup (1,5; 2) \cup (4; 4,5) \cup (5,5; 6)$.

Ответ: $x \in (-0,5; 0) \cup (0; 0,5) \cup (1,5; 2) \cup (4; 4,5) \cup (5,5; 6)$.

6. Найдите сумму целых чисел, которые принадлежат множеству значений функции $f(x) = \log_3(10 \cos 2x + 17)$ при $x \in [1,25(\arctg 0,25)\cos(\pi - \arcsin(-0,6)); \arctg 3]$ (10 баллов)

Решение:

Так как $\cos(\pi - \arcsin(-0,6)) = \cos(\pi + \arcsin 0,6) = -\cos(\arcsin 0,6) = -0,8$, то $x \in [1,25(\arctg 0,25)\cos(\pi - \arcsin(-0,6)); \arctg 3] = [-\arctg 0,25; \arctg 3]$ Следовательно,

$2x \in [-2 \arctg 0,25; 2 \arctg 3]$. Поскольку $0 < \arctg 0,25 < \arctg 1 = \pi/4$, $0 < 2 \arctg 0,25 < \pi/2$, $-\pi/2 < -2 \arctg 0,25 < 0$, а также $\pi/4 < \arctg 3 < \pi/2$, $\pi/2 < 2 \arctg 3 < \pi$, то

$\cos 2x \in [\cos(2 \arctg 3); 1]$. Используя формулу $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, получаем

$\cos(2 \arctg 3) = -0,8$, и $\cos 2x \in [-0,8; 1]$. Отсюда имеем $10 \cos 2x + 17 \in [9; 27]$, и $f(x) = \log_3(10 \cos 2x + 17) \in [\log_3 9; \log_3 27] = [2; 3]$.

Отрезок $[2; 3]$ является множеством значений функции $f(x) = \log_3(10 \cos 2x + 17)$ при $x \in [1,25(\arctg 0,25)\cos(\pi - \arcsin(-0,6)); \arctg 3]$

Сумма целых чисел из отрезка $[2; 3]$ равна 5.

Ответ: $E_f = [2; 3]$, сумма целых чисел равна 5.

7. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Угол EDC равен 30° , $EC = 1$, а площадь треугольника DBE относится к площади треугольника ABC как $1:2$. Найдите длину отрезка BO , если O — точка пересечения отрезков AE и CD .

Решение:

1) $\angle EDC = \angle EAC = 30^\circ$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу);

2) AC - диаметр окружности $\Rightarrow \triangle AEC$ - прямоугольный, $\angle AEC = 90^\circ$, $\angle ECA = 60^\circ$,

$$AC = \frac{EC}{\sin 30^\circ} = 2, \quad AE = EC \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3};$$

Из (1) и (3) следует $k_1 = x_0 + \frac{7}{2\sqrt{3}}$, $k_2 = x_0 - \frac{7}{2\sqrt{3}}$. Из (3) следует $x_0^2 - \frac{49}{12} = -\frac{10}{3}$, $x_0^2 = \frac{3}{4}$, $x_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. В силу симметрии оба значения подходят.
 Ответ: $M\left(\pm\sqrt{3}/2; -5/3\right)$.

9. Укажите все значения a , при которых система уравнений

$(x-a)^2 = 16(y-x+a-3)$, $\log_{(x/3)}(y/3) = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a .

Решение. Второе уравнение равносильно системе: $x > 0$, $x \neq 3$, $y = x$. Подставляя $y = x$ в первое уравнение, получаем; $(x-a)^2 = 16(a-3)$, или $x^2 - 2ax + a^2 - 16a + 48 = 0$ (*), у которого $D/4 = a^2 - a^2 + 16a - 48 = 16(a-3)$. Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Корень $x = 3$ квадратного уравнения может получиться, когда $(3-a)^2 = 16(a-3)$, т.е. если 1) $a = 3$, уравнение имеет вид $(x-3)^2 = 0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $3-a = -16$, т.е. $a = 19$, тогда для x получаем уравнение $(x-19)^2 = 16 \cdot 16$, $x = 19 \pm 16$, у которого, кроме постороннего корня $x_1 = 3$, есть еще один корень $x_2 = 35$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(35; 35)$.

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

$$1. \begin{cases} D/4 = 16(a-3) = 0, \\ a > 0, \quad a \neq 3. \end{cases} \text{ Система решений не имеет.}$$

$$2. a^2 - 16a + 48 < 0, \text{ т.е. при } 4 < a < 12 \quad x = a + 4\sqrt{a-3}.$$

3. $a^2 - 16a + 48 = 0$, отсюда $a = 4$, $x^2 - 8x = 0$, $x_1 = 0$ – посторонний корень, $x_2 = 8$ удовлетворяет условиям, или $a = 12$, $x^2 - 24x = 0$, $x_1 = 0$ – посторонний корень, $x_2 = 24$ удовлетворяет условиям.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных корня $x_{1,2} = a \pm 4\sqrt{a-3}$, если

$$\begin{cases} 16(a-3) > 0, \\ a > 0, \\ a^2 - 16a + 48 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 3, \\ a < 4, \\ a > 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < a < 4, \\ a > 12. \end{cases}$$

Из этого множества надо убрать рассмотренную ранее точку $a = 19$.

Объединяя найденные значения a , получим ответ.

Ответ: $a \in (3; 4) \cup (12; 19) \cup (19; +\infty)$, $x = y = a \pm 4\sqrt{a-3}$;

$$a \in [4; 12] \cup \{19\}, \quad x = y = a + 4\sqrt{a-3}.$$

10. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом B , равным 90° , и углом C , равным 30° . Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр боковой грани AA_1C_1C и вершину B и параллельной диагонали боковой грани AB_1 , если расстояние от вершины C до секущей плоскости равно 2, а гипотенуза основания призмы равна $\sqrt{14}$?

Решение: Построение сечения. Через точку O – центр боковой грани AA_1C_1C – проведем $OS \parallel AB_1$, $S \in (ABC)$, $OS = AB_1/2$ и $OH \perp AA_1$, $H \in AC$. Тогда $SH \parallel AB$, $SH = AB/2$. Соединяем точки B и S , $D = BS \cap AC$. Продолжаем DO до пересечения с продолжением ребра CC_1 ; $T = (DO) \cap (CC_1)$, $E = DT \cap A_1C_1$, $F = BT \cap B_1C_1$. Трапеция $BDEF$ – искомое сечение.

Проведем $CK \perp BS$, тогда $TK \perp BS$ и плоскость треугольника TKC перпендикулярна секущей плоскости. Проведем $CP \perp TK$, $P \in TK$; длина CP равна заданному в условии расстоянию от вершины C до секущей плоскости. Введем обозначения: $AC = a$, $CP = d$.

Так как $\triangle HDS \sim \triangle ADB$ и $HS = AB/2$, $HD = AD/2 = a/6$; $EC_1 = AD = a/3$; $DC = 2EC_1$; $TD = 2TE$, $BD = 2FE$, а площадь треугольника BDT в четыре раза больше площади треугольника FET . Соответственно, площадь сечения $S_{BDEF} = 3/4 \cdot S_{\triangle BDT}$.

В плоскости основания проведем $CK \perp BS$ и $BM \perp AC$.

$$BS = \sqrt{BF^2 + FS^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot 2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}, \quad BD = \frac{2}{3} BS = \frac{a\sqrt{7}}{6}. \quad \text{В треугольнике } BDC$$

$$CD = \frac{2}{3}a, \quad BM = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot 2}, \quad CK \cdot BD = BM \cdot CD. \quad \text{Отсюда } CK = \frac{BM \cdot CD}{BD} = \frac{2a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{6}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{В } \triangle CKT \quad KP = \sqrt{CK^2 - CP^2} = \sqrt{\frac{3}{7}a^2 - d^2} = \frac{\sqrt{3a^2 - 7d^2}}{\sqrt{7}};$$

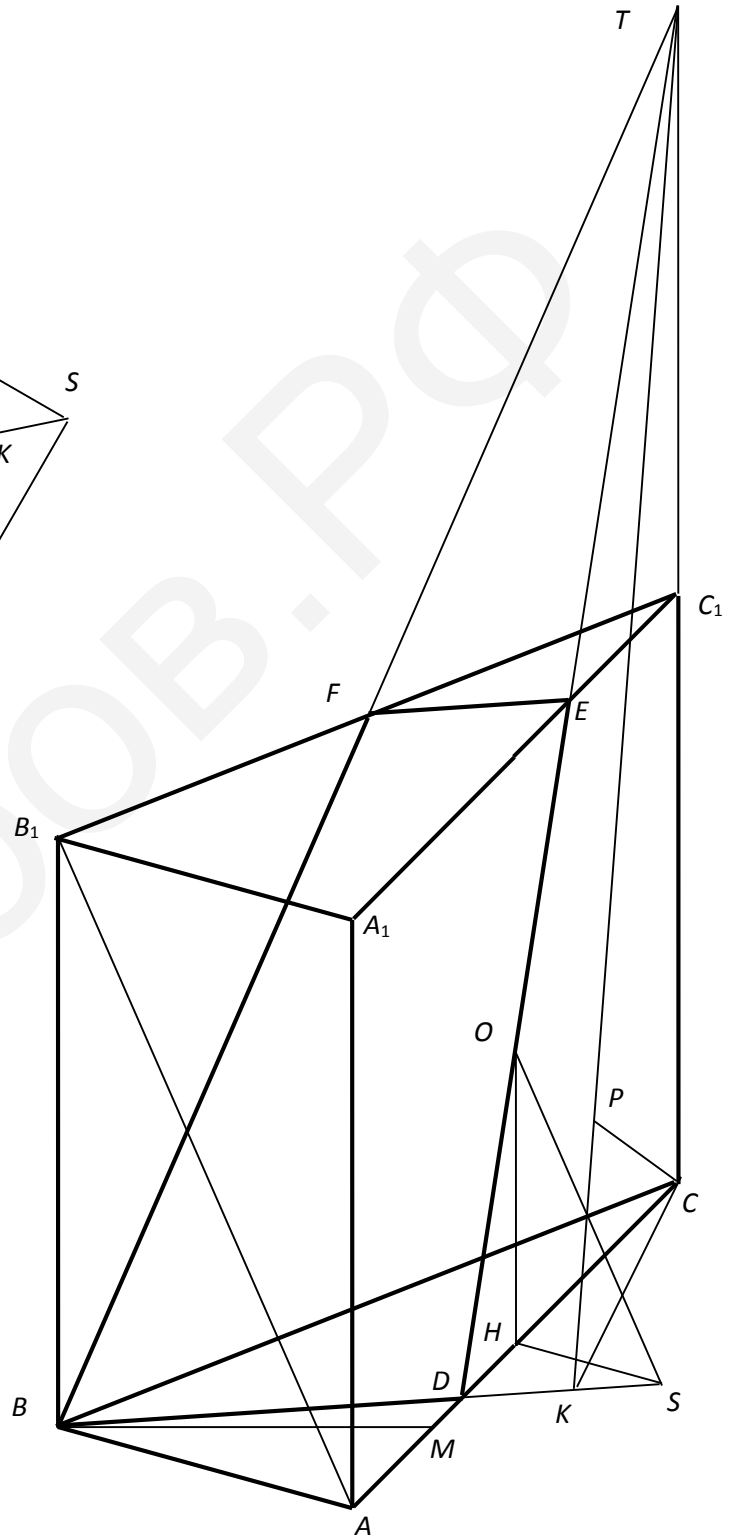
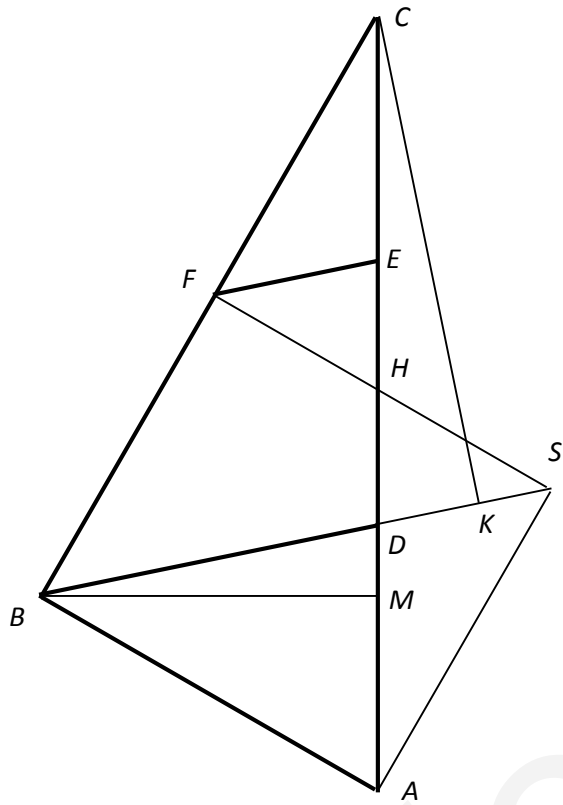
$$KT = \frac{CK^2}{KP} = \frac{3a^2}{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \frac{3a^2}{\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 7d^2}}.$$

$$\text{Площадь треугольника } BDT \quad S_{\triangle BDT} = \frac{1}{2} BD \cdot KT = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{6} \cdot \frac{3a^2}{\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \frac{a^3}{4\sqrt{3a^2 - 7d^2}}.$$

$$\text{Площадь сечения } S_{BDEF} = \frac{3}{4} \cdot S_{\triangle BDT} = \frac{3a^3}{16\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \frac{3a^2}{16\sqrt{3 - 7(d/a)^2}}.$$

$$\text{Для сведения: высота пирамиды } h = \frac{\sqrt{3}d}{2\sqrt{3 - 7(d/a)^2}}.$$

$$\text{Ответы: } a = \sqrt{14}, \quad d = 2, \quad S = \frac{3 \cdot 14}{16\sqrt{3 - 7(4/14)}} = \frac{21}{8} \quad (h = \sqrt{3}).$$



Заключительный этап академического соревнования

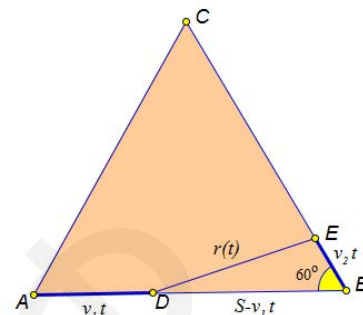
Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика» в 2015 г.

Вариант № 12

1. Одновременно из пункта A в пункт B отправляется автомобиль со скоростью 90 км/ч, а из пункта B в пункт C — поезд со скоростью 60 км/ч. Через 2 часа после начала движения они оказались на наименьшем расстоянии друг от друга. Найдите расстояние между пунктами, если все три пункта равноотстоят друг от друга и связаны прямолинейными дорогами. (8 баллов)
2. Решите неравенство $\log_x(5x-4) > 2$. (8 баллов)
3. Некоторые натуральные числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию с целочисленным знаменателем. Найдите эти числа, если их сумма равна 211. (8 баллов)
4. Решите уравнение $\sqrt[4]{1-\cos^7 15x \cos^2 9x} = \sin 9x$. (8 баллов)
5. Решите неравенство $(2^{x^2-6} - 4 \cdot 2^{x+4}) \log_{\cos \pi x}(x^2 - 2x + 1) \geq 0$. (10 баллов)
6. Найдите сумму целых чисел, которые принадлежат множеству значений функции $f(x) = \log_2(5 \cos 2x + 11)$ при $x \in [1, 25(\arctg(1/3)) \cos(\pi + \arcsin(-0,6)); \arctg 2]$. (10 баллов)
7. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Угол EDC равен 30° , площадь треугольника AEC равна $\sqrt{3}/2$, а площадь треугольника DBE относится к площади треугольника ABC как 1 : 2. Найдите длину отрезка BO , если O — точка пересечения отрезков AE и CD . (12 баллов)
8. На прямой $y = -13/6$ найдите точку M , через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/2$, угол между которыми равен 60° . (12 баллов)
9. Укажите все значения a , при которых система уравнений $(x-a)^2 = 9(y-x+a-2)$, $\log_{(x/2)}(y/2) = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a . (12 баллов)
10. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом B , равным 90° , и углом C , равным 30° . Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр боковой грани AA_1C_1C и вершину B и параллельной диагонали боковой грани AB_1 , если расстояние от вершины C до секущей плоскости равно 2, а гипотенуза основания призмы равна 4? (12 баллов)

Решение варианта №12

1. Одновременно из пункта A в пункт B отправляется автомобиль со скоростью 90 км/ч , а из пункта B в пункт C — поезд со скоростью 60 км/ч . Через 2 часа после начала движения они оказались на наименьшем расстоянии друг от друга. Найдите расстояние между пунктами, если все три пункта равноотстоят друг от друга и связаны прямолинейными дорогами. (8 баллов)



Решение: Пусть $AB = BC = AC = S$. Обозначим расстояние между автомобилем и поездом через $r = r(t)$, где t — время от начала движения. Тогда по теореме косинусов имеем:
 $r^2 = (S - 90t)^2 + (60t)^2 - 60t(S - 90t)$. Для нахождения времени, при котором расстояние между автомобилем и поездом было наименьшим, вычислим производную функции

$$r^2 = r^2(t):$$

$$(r^2)' = -2 \cdot 90(S - 90t) + 2 \cdot 3600t - 60(S - 90t) + 90 \cdot 60t = -240S + 2(8100 + 3600 + 5400)t = 0.$$

Так как наименьшее значение в процессе движения функция $r^2 = r^2(t)$ принимает при $t = 2$, то $-120S + (8100 + 3600 + 5400) \cdot 2 = 0$, и $S = 285$.

Ответ: 285 км.

2. Решите неравенство $\log_x(5x - 4) > 2$.

Решение: $\log_x(5x - 4) > 2$. ОДЗ: $x \in (4/5; 1) \cup (1; +\infty)$. $\log_x \frac{x^2}{5x - 4} < 0$.

$$1) \begin{cases} 4/5 < x < 1 \\ 0 < x < 1, \\ \frac{x^2}{5x - 4} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4/5 < x < 1, \\ x^2 - 5x + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4/5 < x < 1, \\ x < 1, \\ x > 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4/5 < x < 1.$$

$$2) \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ \frac{x^2}{5x - 4} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ x^2 - 5x + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < +\infty, \\ 1 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 4.$$

Ответ: $x \in (4/5; 1) \cup (1; 4)$.

3. Некоторые натуральные числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию с целочисленным знаменателем. Найдите эти числа, если их сумма равна 211.

Решение: Если считать, что одно число образует возрастающую геометрическую прогрессию, то одно число 211 является решением задачи. По условию для некоторого натурального числа n справедливо равенство $b_1 + b_1q + b_1q^2 + \dots + b_1q^{n-1} = 211$, или

$b_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = 211$. Так как 211 — простое число (оно не делится на 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17), то $b_1 = 1$, $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = 211$ или $b_1 = 211$, $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = 1$. Второй

случай не подходит. Следовательно, $b_1 = 1$, $q(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2}) = 210$,

$q(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2}) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Рассмотрим следующие случаи.

- 1) Если $n = 2$, то $q = 210$. Искомые числа: 1, 210.
- 2) Если $n = 3$, то $q^2 + q - 210 = 0$. Так как q - натуральное число, большее единицы, то $q = 14$. Искомые числа: 1, 14, 196.
- 3) Если $n \geq 4$, то $q(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-2}) = 210$. Так как q - натуральное число, большее единицы, то $q^3 \leq q^{n-1} \leq 210$, $q \leq 5$, причем q является делителем числа $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Следовательно, q может принимать следующие значения: 2, 3, 5.
 - 1) Если $q = 2$, то $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-2} = 105$, $2^{n-1} - 1 = 105$, или $2^{n-1} = 106$, уравнение не имеет натуральных решений.
 - 2) Если $q = 3$, то $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-2} = 70$, $\frac{3^{n-1} - 1}{2} = 70$, $3^{n-1} = 141$, уравнение не имеет натуральных решений.
 - 3) Если $q = 5$, то $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-2} = 42$, $\frac{5^{n-1} - 1}{4} = 42$, $5^{n-1} = 169$, уравнение не имеет натуральных решений.

Ответ: $\{211\}$, $\{1; 210\}$ или $\{1; 14; 196\}$.

4. Решите уравнение $\sqrt[4]{1 - \cos^7 15x \cos^2 9x} = \sin 9x$. (8 баллов)

Решение: При условии $\sin 9x \geq 0$ обе части этого уравнения можно возвести в квадрат. При найденных ограничениях уравнение равносильно следующему:

$\sin^4 9x + \cos^7 15x \cos^2 9x - 1 = 0$, $(1 - \cos^2 9x)^2 + \cos^7 15x \cos^2 9x - 1 = 0$,
 $-2\cos^2 9x + \cos^4 9x + \cos^7 15x \cos^2 9x = 0$, $\cos^2 9x(\cos^2 9x + \cos^7 15x - 2) = 0$. Таким образом, приходим к совокупности уравнений:

1) $\cos 9x = 0$, $x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{9}$, $n \in \mathbb{Z}$, с учетом условия $\sin 9x \geq 0$ имеем $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{9}$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos^2 9x + \cos^7 15x - 2 = 0$, что равносильно системе уравнений $\begin{cases} \cos^2 9x = 1, \\ \cos^7 15x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 9x = \pi k, \\ 15x = 2\pi m, \end{cases} k, m \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $5k = 6m$, $k, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 5s$, $k = 6s$, $s \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = \frac{2\pi s}{3}$, $s \in \mathbb{Z}$, что удовлетворяет условию $\sin 9x \geq 0$.

Таким образом, решения исходного уравнения: $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{9}$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{2\pi s}{3}$, $s \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{9}$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{2\pi s}{3}$, $s \in \mathbb{Z}$.

5. Решите неравенство $(2^{x^2-6} - 4 \cdot 2^{x+4}) \log_{\cos \pi x} (x^2 - 2x + 1) \geq 0$. (10 баллов)

Решение:

ОДЗ: $(x-1)^2 > 0$, $\cos \pi x > 0$, $\cos \pi x \neq 1$, $\Rightarrow x \in (-0,5 + 2k; 2k) \cup (2k; 0,5 + 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Исходное неравенство на ОДЗ эквивалентно следующему

$(x^2 - x - 12)(\cos \pi x - 1)(x^2 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+3)(x-2)x \leq 0 \Rightarrow x \in [-3; 0] \cup [2; 4]$.

С учетом ОДЗ имеем $x \in (-2,5; -2) \cup (-2; -1,5) \cup (-0,5; 0) \cup (2; 2,5) \cup (3,5; 4)$.

Ответ: $x \in (-2,5; -2) \cup (-2; -1,5) \cup (-0,5; 0) \cup (2; 2,5) \cup (3,5; 4)$.

6. Найдите сумму целых чисел, которые принадлежат множеству значений функции $f(x) = \log_2(5 \cos 2x + 11)$ при $x \in [1, 25(\arctg(1/3))\cos(\pi + \arcsin(-0,6)); \arctg 2]$ (10 баллов)

Решение:

Так как $\cos(\pi + \arcsin(-0,6)) = \cos(\pi - \arcsin 0,6) = -\cos(\arcsin 0,6) = -0,8$, то $x \in [1, 25(\arctg(1/3))\cos(\pi + \arcsin(-0,6)); \arctg 2] = [-\arctg(1/3); \arctg 2]$. Следовательно, $2x \in [-2\arctg(1/3); 2\arctg 2]$. Поскольку $0 < \arctg(1/3) < \arctg 1 = \pi/4$, $0 < 2\arctg(1/3) < \pi/2$, $-\pi/2 < -2\arctg(1/3) < 0$, а также $\pi/4 < \arctg 2 < \pi/2$, $\pi/2 < 2\arctg 2 < \pi$, то $\cos 2x \in [\cos(2\arctg 2); 1]$. Используя формулу $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, получаем

$\cos(2\arctg 2) = -0,6$, и $\cos 2x \in [-0,6; 1]$. Отсюда имеем $5 \cos 2x + 11 \in [8; 16]$, и $f(x) = \log_2(5 \cos 2x + 11) \in [\log_2 8; \log_2 16] = [3; 4]$.

Отрезок $[3; 4]$ является множеством значений функции $f(x) = \log_2(5 \cos 2x + 11)$ при $x \in [1, 25(\arctg(1/3))\cos(\pi + \arcsin(-0,6)); \arctg 2]$.

Сумма целых чисел из отрезка $[3; 4]$ равна 7.

Ответ: $E_f = [3; 4]$, сумма целых чисел равна 7.

7. На стороне AC треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Угол EDC равен 30° , площадь треугольника AEC равна $\sqrt{3}/2$, а площадь треугольника DBE относится к площади треугольника ABC как $1:2$. Найдите длину отрезка BO , если O — точка пересечения отрезков AE и CD .

Решение:

1) $\angle EDC = \angle EAC = 30^\circ$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу);

2) AC — диаметр окружности $\Rightarrow \triangle AEC$ — прямоугольный, $\angle AEC = 90^\circ$, $\angle ECA = 60^\circ$,

$$AC = \frac{EC}{\sin 30^\circ} = 2EC, \quad AE = EC \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}EC;$$

$$S_{AEC} = \frac{AE \cdot EC}{2} = \frac{\sqrt{3}EC^2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow EC = 1,$$

$$AC = 2, \quad AE = \sqrt{3};$$

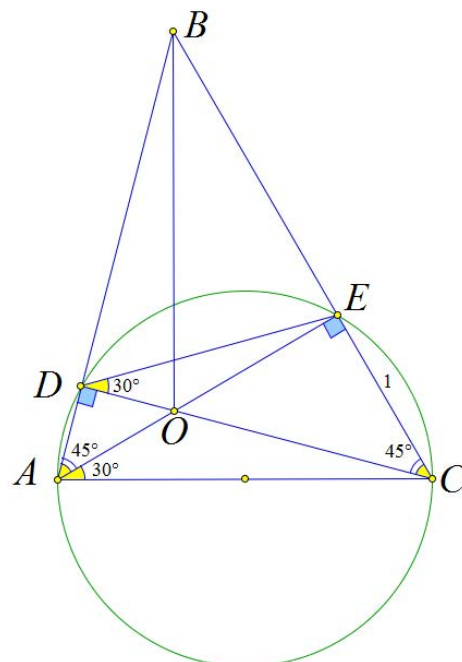
3) $\angle ADC = 90^\circ$, $\angle EDC = 30^\circ \Rightarrow \angle BDE = 60^\circ \Rightarrow$

$$\triangle DBE \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{BE}{AB} = k,$$

$$k^2 = \frac{S_{DBE}}{S_{ABC}} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow DE = \sqrt{2};$$

4) $\triangle DEC$ — теорема синусов: $\frac{DE}{\sin(\angle DCE)} = \frac{EC}{\sin 30^\circ}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sin(\angle DCE)} = 2 \Rightarrow \sin(\angle DCE) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle DCE = 45^\circ \Rightarrow \triangle EOC \text{ — равнобедренный прямоугольный треугольник, } EO = EC = 1;$$



5) $\angle DAE = 45^\circ \Rightarrow \triangle ABE$ - равнобедренный прямоугольный треугольник,

$$BE = AE = \sqrt{3};$$

6) $\triangle BEO$ - прямоугольный треугольник $\Rightarrow BO^2 = BE^2 + EO^2$ (теорема Пифагора) $\Rightarrow$

$$BO^2 = 3 + 1 = 4 \Rightarrow BO = 2.$$

Ответ: 2.

8. На прямой $y = -13/6$ найдите точку M , через которую проходят две касательные к графику функции $y = x^2/2$, угол между которыми равен 60° .

Решение (без применения производной).

$$y = x^2/2, \quad M(x_0; -13/6).$$

Уравнение $\frac{1}{2}x^2 = -\frac{13}{6} + k(x - x_0)$, или $x^2 - 2kx + 2kx_0 + \frac{13}{3} = 0$, имеет единственное реше-

ние, если $\frac{D}{4} = k^2 - 2kx_0 - \frac{13}{3} = 0$. Найденные

из этого уравнения два значения k должны удовлетворять условиям $k_1 + k_2 = 2x_0$ (1),

$$k_1 \cdot k_2 = -13/3 \quad (3).$$

Из условия

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 60^\circ, \quad \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \sqrt{3} \text{ следует}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1} = \sqrt{3}, \text{ или } \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \sqrt{3}. \text{ Отсю-}$$

$$\text{да, } k_2 - k_1 = \sqrt{3} \left(1 - \frac{13}{3} \right), \quad k_2 - k_1 = -\frac{10}{\sqrt{3}} \quad (3).$$

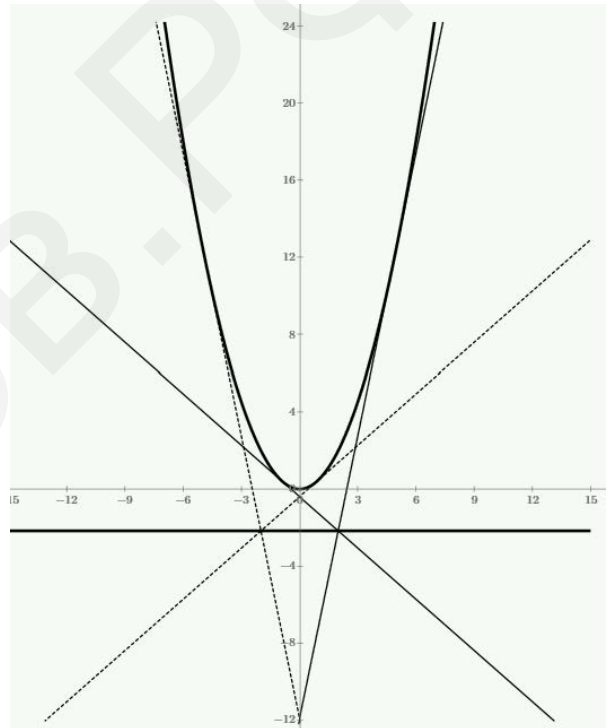
Из (1) и (3) следует

$$k_1 = x_0 + \frac{5}{\sqrt{3}}, \quad k_2 = x_0 - \frac{5}{\sqrt{3}}. \text{ Из (3) следует}$$

$$x_0^2 - \frac{25}{3} = -\frac{13}{3}, \quad x_0^2 = 4, \quad x_0 = \pm 2. \text{ В силу сим-}$$

метрии оба значения подходят.

$$\text{Ответ: } M(\pm 2; -13/6).$$



9. Укажите все значения a , при которых система уравнений $(x-a)^2 = 9(y-x+a-2)$, $\log_{(x/2)}(y/2) = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a .

Решение. Второе уравнение равносильно системе: $x > 0$, $x \neq 2$, $y = x$. Подставляя $y = x$ в первое уравнение, получаем; $(x-a)^2 = 9(a-2)$, или $x^2 - 2ax + a^2 - 9a + 18 = 0$ (*), у которого $D/4 = a^2 - a^2 + 9a - 18 = 9(a-2)$. Количество решений заданной системы уравнений зависит от числа корней этого квадратного уравнения.

Корень $x = 2$ квадратного уравнения может получиться, когда $(2-a)^2 = 9(a-2)$, т.е. если 1) $a = 2$, уравнение имеет вид $(x-2)^2 = 0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $2-a = -9$, т.е. $a = 11$, тогда для x получаем уравнение, у которого, кроме постороннего корня $x_1 = 2$, есть еще один корень $x_2 = 20$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(20; 20)$.

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

$$1. \begin{cases} D/4 = 9(a-2) = 0, \\ a > 0, \quad a \neq 2. \end{cases} \text{ Система решений не имеет.}$$

$$2. a^2 - 9a + 18 < 0, \text{ т.е. при } 3 < a < 6 \quad x = a + 3\sqrt{a-2}.$$

3. $a^2 - 9a + 18 = 0$, отсюда $a = 3$, $x^2 - 6x = 0$, $x_1 = 0$ – посторонний корень, $x_2 = 6$ удовлетворяет условиям, или $a = 6$, $x^2 - 12x = 0$, $x_1 = 0$ – посторонний корень, $x_2 = 12$ удовлетворяет условиям.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных положительных корня $x_{1,2} = a \pm 3\sqrt{a-2}$, если

$$\begin{cases} 9(a-2) > 0, \\ a > 0, \\ a^2 - 9a + 18 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 2, \\ a < 3, \\ a > 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < a < 3, \\ a > 6. \end{cases}$$

Из этого множества надо убрать рассмотренную ранее точку $a = 11$.

Объединяя найденные значения a , получим ответ.

$$\text{Ответ: } a \in (2; 3) \cup (6; 11) \cup (11; +\infty), \quad x = y = a \pm 3\sqrt{a-2};$$

$$a \in [3; 6] \cup \{11\}, \quad x = y = a + 3\sqrt{a-2}.$$

10. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC с углом B , равным 90° , и углом C , равным 30° . Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр боковой грани AA_1C_1C и вершину B и параллельной диагонали боковой грани AB_1 , если расстояние от вершины C до секущей плоскости равно 2, а гипотенуза основания призмы равна 4?

Решение: Построение сечения. Через точку O – центр боковой грани AA_1C_1C – проведем $OS \parallel AB_1$, $S \in (ABC)$, $OS = AB_1/2$ и $OH \perp AA_1$, $H \in AC$. Тогда $SH \parallel AB$, $SH = AB/2$. Соединяем точки B и S , $D = BS \cap AC$. Продолжаем DO до пересечения с продолжением ребра CC_1 ; $T = (DO) \cap (CC_1)$, $E = DT \cap A_1C_1$, $F = BT \cap B_1C_1$. Трапеция $BDEF$ – искомое сечение.

Проведем $CK \perp BS$, тогда $TK \perp BS$ и плоскость треугольника TKC перпендикулярна секущей плоскости. Проведем $CP \perp TK$, $P \in TK$; длина CP равна заданному в условии расстоянию от вершины C до секущей плоскости. Введем обозначения: $AC = a$, $CP = d$.

Так как $\triangle HDS \sim \triangle ADB$ и $HS = AB/2$, $HD = AD/2 = a/6$; $EC_1 = AD = a/3$; $DC = 2EC_1$; $TD = 2TE$, $BD = 2FE$, а площадь треугольника BDT в четыре раза больше площади треугольника FET . Соответственно, площадь сечения $S_{BDEF} = 3/4 \cdot S_{\triangle BDT}$.

В плоскости основания проведем $CK \perp BS$ и $BM \perp AC$.

$$BS = \sqrt{BF^2 + FS^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot 2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}, \quad BD = \frac{2}{3}BS = \frac{a\sqrt{7}}{6}. \text{ В треугольнике } BDC$$

$$CD = \frac{2}{3}a, \quad BM = \frac{a\sqrt{3}}{2 \cdot 2}, \quad CK \cdot BD = BM \cdot CD. \text{ Отсюда } CK = \frac{BM \cdot CD}{BD} = \frac{2a}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{6}{a\sqrt{7}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{В } \triangle CKT \quad KP = \sqrt{CK^2 - CP^2} = \sqrt{\frac{3}{7}a^2 - d^2} = \frac{\sqrt{3a^2 - 7d^2}}{\sqrt{7}};$$

$$KT = \frac{CK^2}{KP} = \frac{3a^2}{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \frac{3a^2}{\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 7d^2}}.$$

$$\text{Площадь треугольника } BDT \quad S_{\triangle BDT} = \frac{1}{2}BD \cdot KT = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{6} \cdot \frac{3a^2}{\sqrt{7}\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \frac{a^3}{4\sqrt{3a^2 - 7d^2}}.$$

$$\text{Площадь сечения } S_{BDEF} = \frac{3}{4} \cdot S_{\triangle BDT} = \frac{3a^3}{16\sqrt{3a^2 - 7d^2}} = \frac{3a^2}{16\sqrt{3 - 7(d/a)^2}}.$$

$$\text{Для сведения: высота пирамиды } h = \frac{\sqrt{3}d}{2\sqrt{3 - 7(d/a)^2}}.$$

$$\text{Ответы: } a = 4, \quad d = 2, \quad S = \frac{3 \cdot 16}{16\sqrt{3 - 7(4/16)}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \quad (h = 2\sqrt{3/5}).$$

