9 класс

1. Приведите пример натурального числа n, которое представляется в виде разности квадратов натуральных чисел ровно 2018 способами.

Один из возможных примеров — $n = 5^{2\cdot 2018}$. Действительно, равенство $(a-b)(a+b) = 5^{2\cdot 2018}$ с натуральными a и b равносильно тому, что $a-b = 5^k$ и $a+b = 5^{2\cdot 2018-k}$ при некотором $k = 0, 1, \ldots, 2017$. Для каждого указанного k эта система имеет единственное решение $a = \dfrac{5^{2\cdot 2018-k}+5^k}{2}$, $b = \dfrac{5^{2\cdot 2018-k}-5^k}{2}$. В результате получаем ровно 2018 решений. □

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

± Верная идея примера, но допущена арифметическая ошибка (например, получается 2017 решений вместо 2018) — 5 баллов.

2. Петя и Вася загадали по два действительных числа и сообщили их Маше. Оказалось, что сумма чисел, загаданных Петей, равна произведению чисел, загаданных Васей, и что произведение чисел, загаданных Петей, равно сумме чисел, загаданных Васей. Маша прибавила ко всем четырем числам по единице и перемножила. Мог ли у Маши получиться отрицательный результат?

Ответ: нет.

Обозначим числа Пети через a и b, числа Васи — через c и d. По условию $a+b = cd$ и $ab = c+d$. Верна цепочка соотношений

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = (ab+a+b+1)(cd+c+d+1) = \\ = (ab+cd+1)^2 \geqslant 0\,.$$

Таким образом, Маша не могла получить отрицательный результат. □

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

– Переформулировка задачи в алгебраической форме (без дальнейших продвижений) — не оценивается (0 баллов).

3. Вычислите значение выражения

$$\frac{(3^4+4)\cdot(7^4+4)\cdot(11^4+4)\cdot\ldots\cdot(2015^4+4)\cdot(2019^4+4)}{(1^4+4)\cdot(5^4+4)\cdot(9^4+4)\cdot\ldots\cdot(2013^4+4)\cdot(2017^4+4)}\,.$$

Ответ: $2020^2+1 = 4080401$.

Воспользуемся формулой

$$a^4+4 = a^4+4a^2+4-4a^2 = (a^2+2)^2-(2a)^2 = \\ = (a^2-2a+2)(a^2+2a+2) = \big((a-1)^2+1\big)\big((a+1)^2+1\big)\,.$$

Теперь выражение в числителе искомой дроби записывается в виде произведения

$$(2^2+1)\cdot(4^2+1)\cdot(6^2+1)\cdot\ldots\cdot(2018^2+1)\cdot(2020^2+1)\,,$$

в то время как выражение в знаменателе записывается

$$(0^2+1)\cdot(2^2+1)\cdot(4^2+1)\cdot\ldots\cdot(2016^2+1)\cdot(2018^2+1)\,.$$

Сокращая общие множители в числителе и в знаменателе, приходим к ответу. □

Критерии

- $+$ Верное решение — 7 баллов.
- $+.$ Арифметическая ошибка при верной идее решения — 6 баллов.
- $\mp$ В решении присутствует идея разложения $a^4 + 4$ на множители, дальнейших продвижений нет — 2 балла.
- $-$ Задача сведена к некоторому бесконечному произведению или сумме — не считается продвижением (0 баллов).

4. В остроугольном треугольнике ABC через вершину A проведена прямая ℓ, перпендикулярная медиане, выходящей из вершины A. Продолжения высот BD и CE треугольника пересекают прямую ℓ в точках M и N. Докажите, что $AM = AN$.

Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ и $\overrightarrow{AN} = \vec{v}$. Прямая MN перпендикулярна медиане, следовательно,

$$\vec{u} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 0\,.$$

С другой стороны, $BM \perp AC$ и $CN \perp AB$, поэтому

$$(\vec{b} - \vec{u}) \cdot \vec{c} = (\vec{v} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0\,.$$

Складывая три полученных равенства выводим

$$(\vec{u} + \vec{v})\vec{b} = 0\,,$$

что возможно только если вектор $\vec{u} + \vec{v}$ нулевой, поскольку прямая MN не перпендикулярна стороне AB. Это обеспечивает равенство $AM = AN$.

Другое решение. Обозначим середину отрезка BC за T. Отразим точки C и N относительно A,

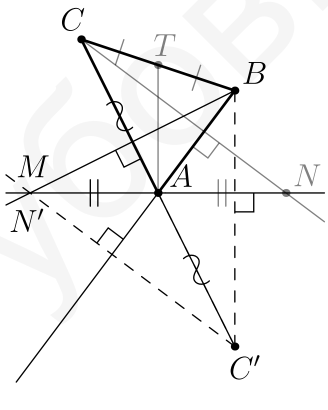

Рис. 5: к решению задачи 4.

то есть построим точки C' и N' такие, что A является серединой отрезков CC' и NN' (рис. 5). Ясно, что $C'N' \parallel CN$, что означает $C'N' \perp BA$. С другой стороны, $BM \perp C'A$, так как $C'A$ и CA — это одна и та же прямая. Наконец, отметим, что $\ell \perp C'B$: это следует из того, что ℓ перпендикулярна AT, а AT — средняя линия в треугольнике CBA', то есть $AT \parallel BC'$.

Осталось воспользоваться тем, что высоты ℓ, BM и $C'N'$ треугольника ABC' пересекаются в одной точке. Это означает, что N' совпадает с M, то есть $AM = AN' = AN$. □

Критерии

- $+$ Верное решение — 7 баллов.
- $-.$ Сделано дополнительное построение: одна из вершин B, C отражена относительно точки A — 1 балл.

5. Натуральные числа 1, 2, …, 64 записаны в клетках таблицы 8×8 так, что для всех $k = 1, 2, 3, \ldots, 63$ числа k и $k + 1$ находятся в соседних по стороне клетках. Каково максимальное значение возможной суммы чисел на главной диагонали?

Ответ: 432.

Оценка. Раскрасим клетки таблицы в шахматном порядке так, чтобы клетки на выбранной главной диагонали были белыми. Не умаляя общности, можно считать, что единица стоит не выше диагонали. Найдем максимальное значение наименьшего числа, попавшего на диагональ. Поскольку соседние числа стоят в клетках разного цвета, а белых клеток под диагональю находится всего 12, то одно из чисел от 1 до 26 обязательно попадает на диагональ. Остальные числа на диагонали гарантированно имеют одну четность, поэтому их сумма не превосходит суммы четных чисел от 52 до 64. В итоге заключаем, что для суммы чисел на диагонали есть оценка сверху:

$$26 + 52 + 54 + 56 + 58 + 60 + 62 + 64 = 432\,.$$

Пример подходящей расстановки чисел изображен на рис. 6. □

52	51	50	49	44	43	34	33
53	54	55	48	45	42	35	32
6	7	56	47	46	41	36	31
5	8	57	58	59	40	37	30
4	9	16	17	60	39	38	29
3	10	15	18	61	62	63	28
2	11	14	19	22	23	64	27
1	12	13	20	21	24	25	26

Рис. 6: к решению задачи 5.

Критерии

+ Верное решение — 7 баллов.

± Доказана верная *оценка* сверху на сумму чисел на диагонали — 4 балла.

∓ Приведен верный *пример* расстановки с максимальной суммой чисел на диагонали — 3 балла.

−. Верный ответ без дальнейших продвижений — 1 балл.