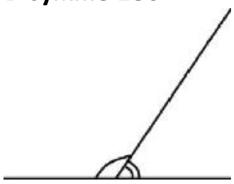
ЗАДАНИЕ 24. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

ОБЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ. УГЛЫ

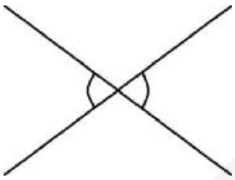
СМЕЖНЫЕ УГЛЫ

В сумме 180°



ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

Равны



НАКРЕСТ ЛЕЖАЩИЕ УГЛЫ

Равны при параллельных прямых (I-й признак параллельности прямых)

СООТВЕТСТВЕННЫЕ УГЛЫ

Равны при параллельных прямых (II-й признак параллельности прямых)

ОДНОСТРОННИЕ УГЛЫ

В сумме 180° при параллельных прямых (III-й признак параллельности прямых)

БИССЕКТРИСА

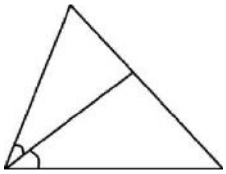
Биссектриса – луч, делящий угол пополам.

Также не забывайте, что периметр фигуры – это сумма всех сторон фигуры.

СУММА УГЛОВ

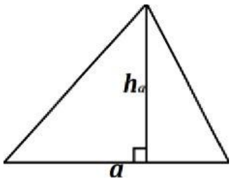
- Сумма углов **треугольника** равна 180°
- Сумма углов **четырёхугольника** равна 360°

ТРЕУГОЛЬНИКИ

БИССЕКТРИСА	МЕДИАНА
Биссектриса – луч, делящий угол пополам. 	**Медиана** – отрезок, делящий противоположную сторону треугольника **пополам**. 

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

$$S = \frac{1}{2} a h_a$$



РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

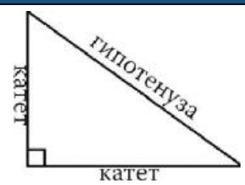
Равнобедренный треугольник – треугольник, у которого **две стороны равны** и **углы при основании равны**.

СВОЙСТВО

Биссектриса, медиана и высота, проведённые к основанию, **равны**.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

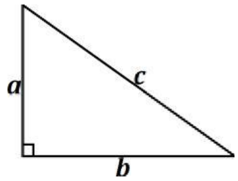
РИСУНОК



У прямоугольного треугольника один **угол прямой** (т.е. **равен 90°**). К прямому углу прилегает **два катета**.

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

$$c^2 = a^2 + b^2$$

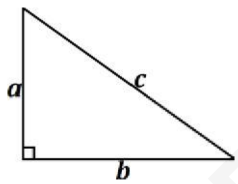


Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Используется, когда известны две стороны <u>прямоугольного</u> треугольника и нужно найти третью сторону.

ПЛОЩАДЬ

$$S = \frac{ab}{2}$$



Площадь треугольника равна половине произведения катетов.

КАТЕТ НАПРОТИВ УГЛА 30°

Катет, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы.

СООТНОШЕНИЕ СТОРОН

В любом треугольнике:

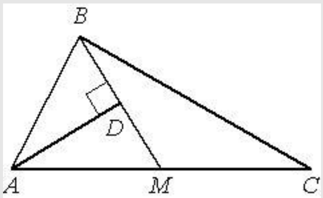
- против большей стороны лежит больший угол
- против меньшей стороны лежит меньший угол

ПОДОБИЕ И РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА
1) По двум сторонам и углу между ними.
2) По стороне и двум прилежащим к ней углам.
3) По трём сторонам.
ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ
1. По двум углам.
2. По двум пропорциональным сторонам и углу между ними.
3. По трём пропорциональным сторонам.

ПРИМЕР №1

Прямая AD, перпендикулярная медиане BM треугольника ABC, делит её пополам. Найдите сторону AB, если сторона AC равна 10.



AD для треугольника ABM является и медианой (т.к. делит сторону пополам), и высотой. А это свойство медианы для **равнобедренного треугольника**.

Следовательно, треугольник ABM – равнобедренный с основанием BM. По определению равнобедренного треугольника **AB = AM**.

Т.к. BM – медиана для треугольника ABC, то **AM = MC** (по определению медианы).
Тогда:

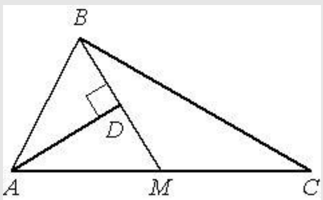
$$AM = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Как мы выяснили ранее, AM = AB => **AB = 5**.

Ответ: 5.

ПРИМЕР №2

Прямая AD, перпендикулярная медиане BM треугольника ABC, делит угол BAC пополам. Найдите сторону AC, если сторона AB равна 3.



AD для треугольника ABM является и медианой, и биссектрисой (т.к. делит угол пополам). А это свойство медианы для **равнобедренного треугольника**.

Следовательно, треугольник ABM – равнобедренный с основанием BM. По определению равнобедренного треугольника **AB = AM**.

Т.к. BM – медиана для треугольника ABC, то **AM = MC** (по определению медианы).
Тогда:

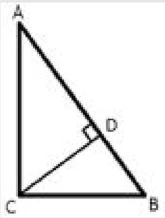
$$AC = AM \cdot 2$$

Как мы выяснили ранее, AM = AB => **AC = AB · 2 = 3 · 2 + 6**.

Ответ: 6.

ПРИМЕР №3

Катеты прямоугольного треугольника равны 35 и 120. Найдите высоту, проведённую к гипотенузе.



Так как треугольник **прямоугольный**, то можем применить **теорему Пифагора**:
$AB^2 = AC^2 + BC^2$
$AB^2 = 120^2 + 35^2$
$AB^2 = 14400 + 1225 = 15625$
AB = 125

Площадь **прямоугольного** треугольника равна **половине произведению катетов**, т.е.:

$$S = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{35 \cdot 120}{2} = 35 \cdot 60 = 2100$$

Также площадь треугольника можно найти по классической формуле – половина произведения высоты и стороны, к которой эта высота проведена, т.е.:

$$S = \frac{CD \cdot AB}{2}$$

$$2100 = \frac{CD \cdot 125}{2}$$

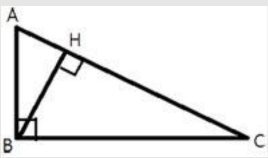
$$4200 = CD \cdot 125$$

$$4D = \frac{4200}{125} = 33{,}6$$

Ответ: 33,6.

ПРИМЕР №4

Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если AH=6, AC=24.



Рассмотрим треугольники **ABC** и **ABH**.
∠A – общий ∠AHB = ∠ABC. Следовательно, эти треугольники **подобны** (по двум равным углам)

Тогда гипотенуза большого треугольника относится к гипотенузе маленького как малый катет большого треугольника к малому катету маленького треугольника:

$$\frac{\mathrm{AC}}{AB} = \frac{AB}{AH}$$

$$\frac{24}{AB} = \frac{AB}{6}$$

$$24 \cdot 6 = AB \cdot AB$$

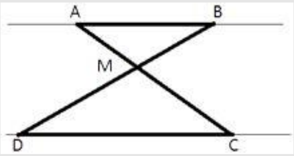
$$AB^2 = 144$$

$$AB = 12$$

Ответ: 12.

ПРИМЕР №5

Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если AB=16, DC=24, AC=25.



Рассмотрим треугольники **ABM** и **CDM**.
∠AMB=∠CMD (т.к. они вертикальные).
∠ABM=∠CDM (т.к. они накрест-лежащие).
Следовательно, треугольники ABM и CDM **подобны** (по двум равным углам).

AC = AM + MC => AM = AC – MC
Тогда:

$$\frac{AB}{\mathrm{CB}} = \frac{AM}{MC}$$

$$\frac{16}{24} = \frac{AC - MC}{MC}$$

$$\frac{16}{24} = \frac{25 - MC}{MC}$$

$$16MC = 24(25 - MC)$$

$$16MC = 24 \cdot 25 - 24MC$$

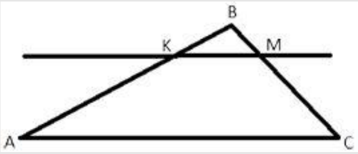
$$40MC = 600$$

$$MC = \frac{600}{40} = 15$$

Ответ: 15.

ПРИМЕР №6

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках K и M соответственно. Найдите AC, если BK:KA=3:4, KM=18.



Рассмотрим треугольники **ABC** и **KBM**.
∠B – общий. ∠BAC = ∠BKM (т.к. это соответственные углы)
Следовательно, эти треугольники **подобны** (по двум равным углам).

Тогда по определению подобных треугольников:

$$\frac{\mathrm{BA}}{BK} = \frac{AC}{KM}$$

$$\frac{(\mathrm{BK} + KA)}{BK} = \frac{AC}{KM}$$

$$\frac{BK}{BK} + \frac{KA}{BK} = \frac{AC}{KM}$$

$$1 + \frac{4}{3} = \frac{AC}{18}$$

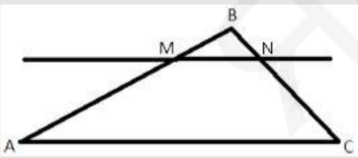
$$\frac{7}{3} = \frac{AC}{18}$$

$$AC = \frac{7}{3} \cdot 18 = 42$$

Ответ: 42.

ПРИМЕР №7

Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает стороны AB и BC в точках M и N соответственно. Найдите BN, если MN=17, AC=51, NC=32.



Рассмотрим треугольники **ABC** и **MBN**.
∠B – общий. ∠BAC = ∠BMN (т.к. это соответственные углы)
Следовательно, эти треугольники **подобны** (по двум равным углам).

Тогда по определению подобных треугольников:

$$\frac{\mathrm{AC}}{MN} = \frac{BC}{BN}$$

$$\frac{\mathrm{AC}}{MN} = \frac{BC}{BC - NC}$$

$$\frac{51}{17} = \frac{BC}{BC - 32}$$

$$3 = \frac{BC}{BC - 32}$$

$$3(BC - 32) = BC$$

$$3BC - 96 = BC$$

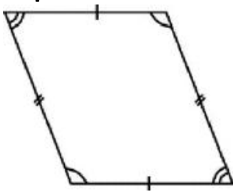
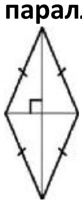
$$2BC = 96$$

$$BC = \frac{96}{2} = 48$$

BN = BC – NC = 48 – 32 **= 16**

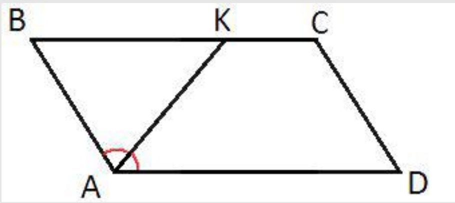
Ответ: 16.

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И РОМБ

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ	РОМБ
Параллелограмм – четырёхугольник, у которого **противоположные стороны попарно параллельны**. 	**Ромб** – четырёхугольник, у которого **все** стороны **равны**, а **противоположные** стороны **параллельны**. 

ПРИМЕР №1

Биссектриса угла A параллелограмма ABCD пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр параллелограмма, если BK=7, CK=12.



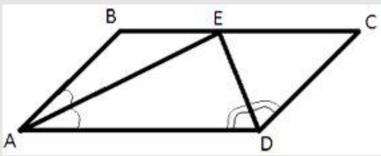
Периметр параллелограмма:
P = AB + BC + CD + AD

AB = CD и BC = AD (по свойству параллелограмма). Значит:
P = AB + BC + AB + BC **= 2(AB + BC)**
S
∠DAK = ∠AKB (т.к. это накрест-лежащие углы).
Следовательно, ∠AKB = ∠KAB (т.к. AK – биссектриса).
Получается, что треугольник ABK – **равнобедренный** (по свойству равнобедренного треугольника).
Тогда:
AB = BK = 7
P = 2(AB + BC) = 2(AB + BK + KC) = 2(7 + 7 + 12) = **52**

Ответ: 52.

ПРИМЕР №2

Биссектрисы углов A и D параллелограмма ABCD пересекаются в точке, лежащей на стороне BC. Найдите AB, если BC=44.



BC параллельна AD (по определению параллелограмма)
∠BAE = ∠EAD (т.к. AE – биссектриса)
∠EAD = ∠BEA (т.к. это накрест-лежащие углы)
Следовательно, **∠BAE = ∠BEA**

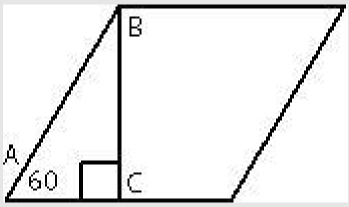
Получается, что треугольник ABE – **равнобедренный**, и **AB = BE** (по определению равнобедренного треугольника).

Аналогично с треугольником ECD:
∠CED = ∠CDE
EC = CD
Так как AB = CD (по свойству параллелограмма), то получается, что AB = BE = EC = CD.
Значит, BE = BC/2 = 44/2 = 22.
AB = BE = **22**

Ответ: 22.

ПРИМЕР №3

Сторона ромба равна 32, а острый угол равен 60°. Высота ромба, опущенная из вершины тупого угла, делит сторону на два отрезка. Каковы длины этих отрезков?



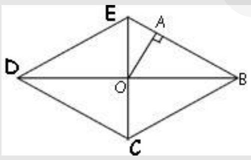
Рассмотрим треугольник **ABC**. Этот треугольник **прямоугольный** (по условию задачи).
∠A = 60°. Сумма всего углов в треугольнике равна 180°. Следовательно, **∠ABC** = 180° – 90° – 60° = **30°**.

В прямоугольном треугольнике катет, лежащий напротив угла в 30°, равен половине гипотенузы. Значит, **AC** = AB/2 = 32/2 **= 16**. Следовательно **вторая половина стороны ромба** равна 32 – 16 **= 16**. Т.е. в данной задаче высота, проведённая к стороне ромба, делит эту сторону на две равные части.

Ответ: длины обоих отрезков равны 16.

ПРИМЕР №4

Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 15, а одна из диагоналей ромба равна 60. Найдите углы ромба.



Рассмотрим треугольник **ABO**. Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам, т.е. **OB** = 60/2 **= 30**.

Треугольник ABO – прямоугольный, так как OA – расстояние до стороны ромба, т.е. образует со стороной **прямой угол.**

$$\sin\angle ABO = \frac{AO}{BO} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Поэтому ∠ABO = 30° (т.к. sin 30° = 1/2).

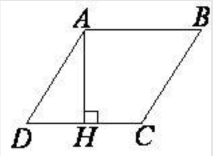
Треугольники EBO и CBO равны (по трём сторонам). Следовательно, ∠EBO = ∠CBO = 30°.
Таким образом, ∠EBC = 30° · 2 = 60°
По свойству параллелограмма **∠EBC = ∠EDC = 60°** и ∠BED = ∠BCD

Сумма углов любого четырёхугольника равна 360°, следовательно: **∠BED = ∠BCD** = (360° – (2 · 60°))/2 = (360° – 120°)/2 **= 120°**.

Ответ: Два угла равны 60° и два других угла равны 120°.

ПРИМЕР №5

Высота AH ромба ABCD делит сторону CD на отрезки DH=8 и CH=2. Найдите высоту ромба.



AB = BC = CD = AD = DH + CH = 8 + 2 **= 10** (по определению ромба).

Рассмотрим треугольник **AHD**. AHD – **прямоугольный** (т.к. AH - высота), тогда по теореме Пифагора:

$AD^2 = AH^2 + DH^2$

$10^2 = AH^2 + 8^2$

$100 = AH^2 + 64$

$AH^2 = 36$

AH = 6

Ответ: 6.

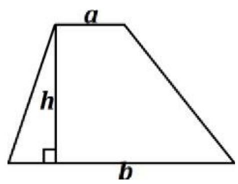
ТРАПЕЦИЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Трапеция – четырёхугольник, у которого **две стороны параллельны, а две другие нет**.

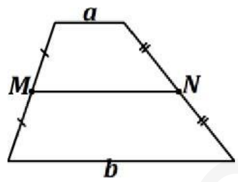
ПЛОЩАДЬ

$$\boldsymbol{S = \frac{a+b}{2} \cdot h}$$



СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ

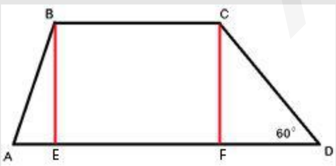
$$\boldsymbol{MN = \frac{a+b}{2}}$$



- лежит на серединах сторон
- параллельна основаниям
- равна полусумме оснований

ПРИМЕР №1

В трапеции ABCD основание AD вдвое больше основания BC и вдвое больше боковой стороны CD. Угол ADC равен 60°, сторона AB равна 6. Найдите площадь трапеции.



Проведём высоты BE и CF как показано на рисунке.
Рассмотрим треугольник **CDF**. Он прямоугольный, т.к. CF – высота. В любом треугольнике сумма углов равна 180°, поэтому **∠FCD** = 180° – 90° – 60° **= 30°**. В прямоугольном треугольнике катет, лежащий напротив угла 30° равен половине гипотенузы, поэтому:

$$DF = \frac{CD}{2}$$

CD, в свою очередь, по условию задачи равно AD/2. Поэтому:

$$DF = \frac{AD}{4}$$

BC = AD/2 (по условию задачи) EF = BC = AD/2 (т.к. BCFE – прямоугольник)

Вычислим AE:

$$AE = AD - DF - EF = AD - \frac{AD}{4} - \frac{AD}{2} = \frac{AD}{4}$$

Мы получили, что **AE = FD**.

Рассмотрим треугольники **ABC** и **DCF**:
BE = CF (т.к. BCFE – прямоугольник)
AE = FD (только что получили)
∠AEF = 90° = ∠DFC
Поэтому **треугольники ABC и DCF равны** (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, AB = CD, т.е. **трапеция равнобедренная**.
AB = CD = 6 (по условию задачи),
AD = 2 · CD = 2 · BC **= 12** (тоже по условию)
BC = CD = 6
FD = AD/4 = 12/4 **= 3**

По теореме Пифагора:

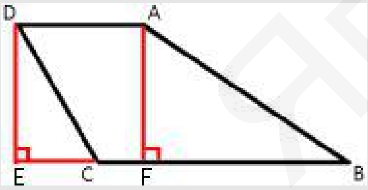
$$CD^2 = CF^2 + FD^2$$
$$6^2 = CF^2 + 3^2$$
$$CF^2 = 27$$
$$CF = 3\sqrt{3}$$

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CF = \frac{6 + 12}{2} \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}$$

Ответ: $\mathbf{27\sqrt{3}}$.

ПРИМЕР №2

Найдите боковую сторону AB трапеции ABCD, если углы ABC и BCD равны соответственно 60° и 135°, а CD=36.



Дочертим отрезки как показано на рисунке.
∠DCE = 180° – ∠BCD = 180° – 135° **= 45°** (т.к. это смежные углы).

$$\sin \angle \mathrm{DCE} = \frac{DE}{CD}$$

$$\sin 45° = \frac{DE}{CD}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{DE}{36}$$

$$\boldsymbol{DE} = \frac{36\sqrt{2}}{2} = \mathbf{18\sqrt{2}}$$

DE = AF = $\mathbf{18\sqrt{2}}$, т.к. это **высоты** трапеции.

$$\sin \angle \mathrm{ABF} = \frac{AF}{AB}$$

$$\sin 60° = \frac{AF}{AB}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{18\sqrt{2}}{AB}$$

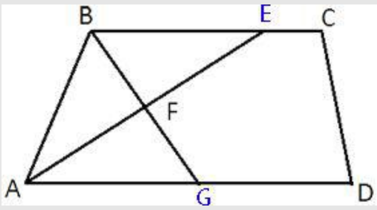
$$\frac{AB\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{2}$$

$$AB = \frac{18\sqrt{2}\cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{6}}{3} = 12\sqrt{6}$$

Ответ: $12\sqrt{6}$.

ПРИМЕР №3

Биссектрисы углов A и B при боковой стороне AB трапеции ABCD пересекаются в точке F. Найдите AB, если AF=24, BF=10.



∠GAE = ∠BEA (т.к. они накрест-лежащие)

∠GAE = ∠BEA = ∠BAE (т.к. AE – биссектриса).

Получается, что треугольник **ABE** – равнобедренный. **BF** – **биссектриса**, а по свойству равнобедренного треугольника, она так же и **медиана** и **высота**.

Таким образом, получается, что **треугольник ABF – прямоугольный**. По теореме Пифагора:

$AB^2 = AF^2 + BF^2$

$AB^2 = 24^2 + 10^2$

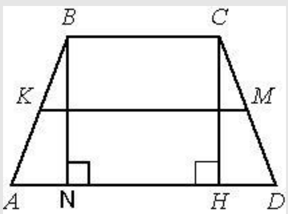
$AB^2 = 576 + 100 = 676$

$AB = 26$

Ответ: 26.

ПРИМЕР №4

В трапеции ABCD боковые стороны AB и CD равны, CH – высота, проведённая к большему основанию AD. Найдите длину отрезка HD, если средняя линия KM трапеции равна 12, а меньшее основание BC равно 4.



Средняя линия трапеции равна полусумме оснований:

$$KM = \frac{AD + BC}{2}$$

$$12 = \frac{AD + 4}{2}$$

$$\boldsymbol{AD = 20}$$

Проведём ещё одну высоту из вершины B и рассмотрим треугольники **CDH** и **ABN**.
AB = CD (по условию задачи),
BN = CH, т.к. BCHN – прямоугольник, образованный параллельными сторонами трапеции и перпендикулярами к ним.
Трапеция равнобедренная, поэтому углы при основании равны. Получается, что в треугольниках **CDH** и **ABN** два угла равны, два угла прямые. Значит, и оставшиеся два угла равны. Поэтому треугольники **CDH** и **ABN равны** по двум сторонам и углу между ними.

Следовательно:

$$HD = AN = \frac{AD - NH}{2}$$

NH = BC = 4, т.к. BCHN – прямоугольник, образованный параллельными сторонами трапеции и перпендикулярами к ним.

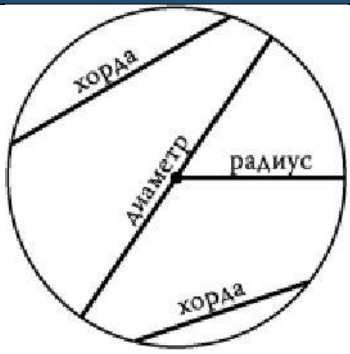
$$HD = \frac{20 - 4}{2} = 8$$

Ответ: 8.

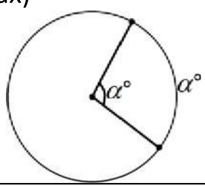
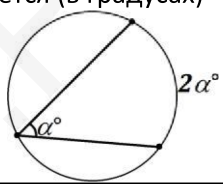
ОКРУЖНОСТЬ

Углы в окружности

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ОКРУЖНОСТИ



Диаметр в 2 раза больше радиуса.

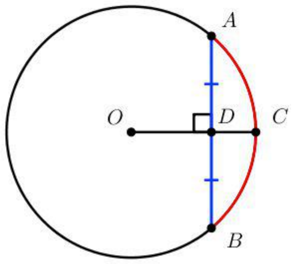
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГОЛ	ВПИСАННЫЙ УГОЛ
Центральный угол равен **дуге**, на которую он опирается (в градусах) 	Вписанный угол равен **половине** дуги**,** на которую он опирается (в градусах) 

УГОЛ МЕЖДУ КАСАТЕЛЬНОЙ И РАДИУСОМ

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания

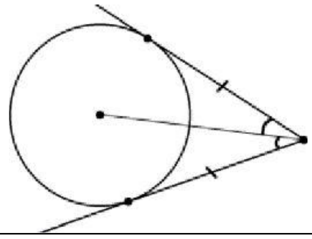
СВОЙСТВО РАДИУСА

Радиус, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам



СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ

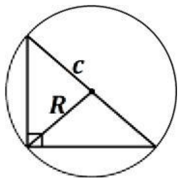
Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны, и **составляют равные углы** с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности



ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

РАДИУС ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ

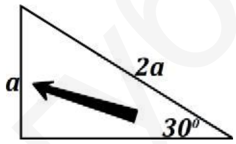
$$\boldsymbol{R=\frac{c}{2}}$$



Радиус описанной вокруг прямоугольного треугольника окружности равен половине гипотенузы.

КАТЕТ НАПРОТИВ УГЛА 30°

Катет, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы.

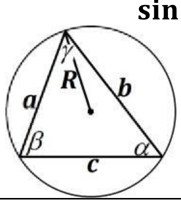


СИНУС

$$sin = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$$

ТЕОРЕМА СИНУСОВ

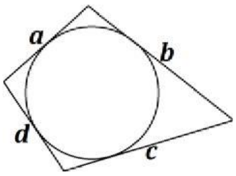
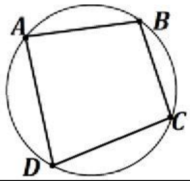
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

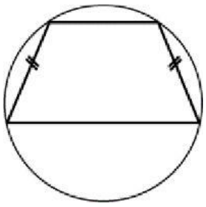


ЗНАЧЕНИЯ СИНУСА

	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

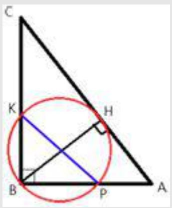
ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

ПРИЗНАК ОПИСАННОГО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА	ПРИЗНАК ВПИСАННОГО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА
В четырёхугольник можно вписать окружность только тогда, когда суммы противоположных сторон равны: $a + c = b + d$  	Четырёхугольник является вписанным, если сумма противоположных углов равна 180°. $\angle A + \angle C = 180°$ $\angle B + \angle D = 180°$ 

СВОЙСТВО ТРАПЕЦИИ
Если трапеция **вписана** в окружность, то она – **равнобедренная**.  У равнобедренной трапеции углы при **нижнем** основании равны друг другу; углы при **верхнем** основании равны друг другу.

ПРИМЕР №1

Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если BH=14.



$\angle KBP = 90°$ (по условию)

Прямоугольный треугольник KPB с гипотенузой PK вписан в окружность. Следовательно, PK является диаметром окружности.

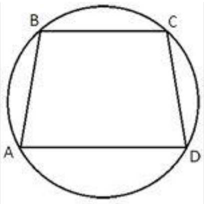
BH – тоже диаметр окружности (по условию). Значит:

PK = BH = 14

Ответ: 14.

ПРИМЕР №2

Около трапеции, один из углов которой равен 49°, описана окружность. Найдите остальные углы трапеции.



Описать окружность можно только около **равнобедренно**й трапеции (по свойству трапеции).
Получается, что наша трапеция – равнобедренная.

Поэтому два угла при одном основании равны; два угла при другом основании тоже равны.

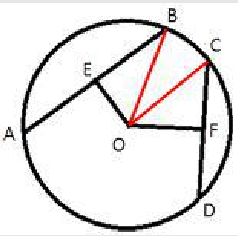
Пусть 49° равняется угол BAD. **∠BAD = ∠ADC = 49°** (по свойству равнобедренной трапеции).

Сумма углов любого четырёхугольника равна 360°.
360° = ∠BAD + ∠ADC + ∠DCB + ∠CBA
360° = 49° + 49° + ∠DCB + ∠CBA
∠DCB + ∠CBA = 262°
∠DCB = ∠CBA (по свойству равнобедренной трапеции).
Тогда **∠DCB = ∠CBA** = 262°/2 **= 131°**.

Ответ: Один оставшийся угол равен 49°, два других оставшихся угла равны 131°.

ПРИМЕР №3

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите длину хорды CD, если AB=10, а расстояния от центра окружности до хорд AB и CD равны соответственно 12 и 5.



Проведём отрезки OB и OC, как показано на рисунке. Расстоянием от точки до прямой является длина **перпендикуляра**, проведённого к прямой. Поэтому **OE перпендикулярен AB**, а **OF перпендикулярен CD**.

Точки E и F делят свои хорды **пополам** (по свойству хорды: Радиус, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам).
Получается, что треугольники **OEB** и **OCF** – **прямоугольные**.
EB = AB/2 = 10/2 **= 5**
CF = CD/2

По теореме Пифагора:
$OB^2 = OE^2 + EB^2$
$OB^2 = 12^2 + 5^2$
$OB^2 = 144 + 25 = 169$
OB = 13
OB = OC = 13 (т.к. OB и OC – радиусы окружности)

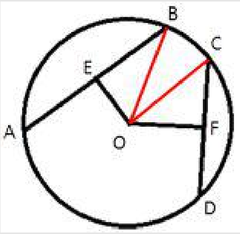
По теореме Пифагора:
$OC^2 = CF^2 + FO^2$
$13^2 = (CD/2)^2 + 5^2$

$13^2 = (CD/2)^2 + 25$
$(CD/2)^2 = 144$
$CD/2 = 12$
$CD = 24$

Ответ: 24.

ПРИМЕР №4

Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если AB=12, CD=16, а расстояние от центра окружности до хорды AB равно 8.



Проведём отрезки OB и OC, как показано на рисунке. Расстоянием от точки до прямой является длина **перпендикуляра**, проведённого к прямой. Поэтому **OE перпендикулярен AB**, а **OF перпендикулярен CD**.

Точки E и F делят свои хорды **пополам** (по свойству хорды: Радиус, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам).
Получается, что треугольники **OEB** и **OCF** – **прямоугольные**.
EB = AB/2 = 12/2 **= 6**
CF = CD/2 = 16/2 **= 8**

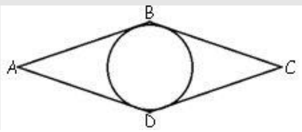
По теореме Пифагора:
$OB^2 = OE^2 + EB^2$
$OB^2 = 8^2 + 6^2$
$OB^2 = 64 + 36 = 100$
$OB = 10$
OB = OC = 10 (т.к. OB и OC – радиусы окружности)

По теореме Пифагора:
$OC^2 = CF^2 + FO^2$
$10^2 = 8^2 + FO^2$
$100 = 64 + FO^2$
$FO^2 = 36$
$FO = 6$

Ответ: 6.

ПРИМЕР №5

В параллелограмм вписана окружность. Найдите периметр параллелограмма, если одна из его сторон равна 5.



В четырёхугольнике, в который **вписана окружность**, **суммы противоположных сторон равны**. Поэтому:
AB + CD = AD + BC.

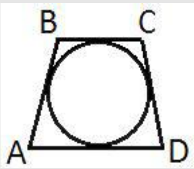
В параллелограмме противоположные стороны равны. Значит, каждая из сторон равна 5:
AB = CD = AD = BC = 5.

Периметр – это сумма всех сторон:
P = AB + CD + AD + BC = 5 + 5 + 5 + 5 = 20.

Ответ: 20.

ПРИМЕР №6

В трапецию, сумма длин боковых сторон которой равна 16, вписана окружность. Найдите длину средней линии трапеции.



В четырёхугольнике, в который **вписана окружность**, **суммы противоположных сторон равны**. Поэтому:
AB + CD = AD + BC = 16.

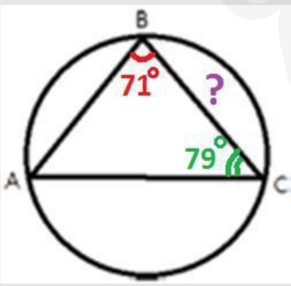
Средняя линии трапеции равна **полусумме оснований**:

$$\frac{AB + CD}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Ответ: 8.

ПРИМЕР №7

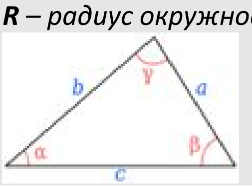
Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 71° и 79°. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 8.



В этой задаче нужно применить **теорему синусов**, которая выражается следующей формулой:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

a, ***b***, ***c*** *– стороны треугольника*
α, ***β***, ***γ*** *– соответственно противолежащие им углы*
R *– радиус окружности, описанной около треугольника*



В любом треугольнике сумма углов равна 180°. Два угла нам известно, найдём **третий угол**: 180° – 71° – 79° = **30°**.

По теореме синусов:

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R$$

$$\frac{BC}{\sin 30°} = 2\cdot 8$$

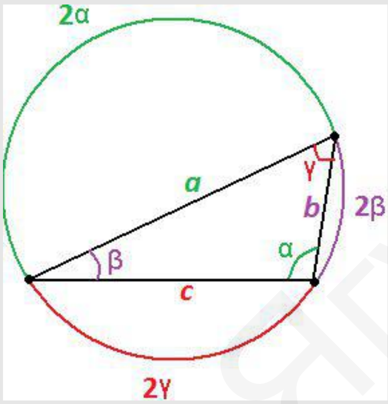
$$\frac{BC}{\frac{1}{2}} = 16$$

$$BC = 16\cdot\frac{1}{2} = 8$$

Ответ: 8.

ПРИМЕР №8

Вершины треугольника делят описанную около него окружность на три дуги, длины которых относятся, как 6:7:23. Найдите радиус окружности, если меньшая из сторон треугольника равна 12.



В этой задаче нужно применить **теорему синусов**, которая выражается следующей формулой:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

a*, *b*, *c *– стороны треугольника*
α*, *β*, *γ *– соответственно противолежащие им углы*
R *– радиус окружности, описанной около треугольника*

На нашем рисунке **меньшая** из сторон – это ***b***. Тогда она равна **12**. Получается, что для нахождения радиуса нужно найти ***sin* β**:

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R$$

Дуги относятся как 6 : 7 : 23. Найдём градусную меру каждой дуги.
Пусть одна дуга равна 6x, другая дуга 7x, а третья 23x. В сумме они будут равны 360° (т.к. вся окружность равна 360°).

6x + 7x + 23x = 360
36x = 360

x = 10

Значит, **наименьшая дуга** равна 6x = 6 · 10 = **60°**.

По определению вписанный угол равен **половине** дуги, на которую он опирается. Значит, **β** = 60°/2 **= 30°**.

Теперь можно найти радиус описанной окружности:

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R$$

$$\frac{12}{\sin 30°} = 2R$$

$$\frac{12}{\frac{1}{2}} = 2R$$

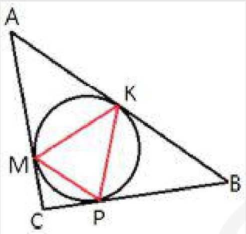
$$12 \cdot 2 = 2R$$

$$\boldsymbol{R = 12}$$

Ответ: 12.

ПРИМЕР №9

Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках M, K и P. Найдите углы треугольника ABC, если углы треугольника MKP равны 56°, 57° и 67°.



Пусть:
∠KMP = 56°
∠MKP = 57°
∠KPM = 67°

Рассмотрим треугольник **AMK**.
AM = AK (по свойству касательных: Отрезки касательных к окружности, проведённые из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.)

Следовательно, **треугольник AMK – равнобедренный.** Тогда по свойству равнобедренного треугольника: **∠AMK = ∠AKM**. Заметим, что оба этих угла охватывают дугу **MK**, и поэтому **равны половине её градусной меры** (по свойству углов на окружности).

∠KPM является **вписанным** в окружность углом и опирается на эту же дугу, поэтому и он **равен половине градусной меры** этой дуги. Получается, что:
∠AMK = ∠AKM = ∠KPM = 67°
В любом треугольнике сумма углов равна 180°, поэтому:

180° = ∠AMK + ∠AKM + ∠MAK
180° = 67° + 67° + ∠MAK
∠MAK = 46°

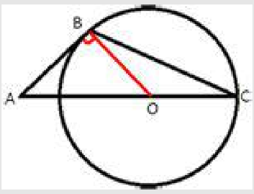
Аналогично для двух других треугольников получим:
∠CPM = ∠CMP = ∠MKP = 57°
∠PCM = 180° – 57° – 57° **= 66°**

А также:
∠BKP = ∠BPK = ∠KMP = 56°
∠KBP = 180° – 56° – 56° **= 68°**

Ответ: 46°; 66°; 68°.

ПРИМЕР №10

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен 7,5, а AB=2.



Отрезок AC равен сумме отрезков AO и OC. **OC** равен радиусу окружности (который в два раза меньше диаметра), т.е.:

$$\mathbf{OC} = \frac{D}{2} = \frac{7{,}5}{2} = \mathbf{\frac{15}{4}}$$

Найдём AO.
Проведём отрезок BO. BO – тоже радиус окружности.
AB – касательная к окружности. Следовательно, AB перпендикулярен BO (по свойству касательной).
Значит треугольник ABO – прямоугольный. Тогда по теореме Пифагора:

$$\mathrm{AO}^2 = AB^2 + BO^2$$

$$\mathrm{AO}^2 = 2^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 = \frac{4}{1} + \frac{225}{16} = \frac{64}{16} + \frac{225}{16} = \frac{289}{16}$$

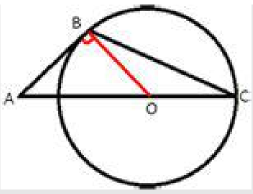
$$\boldsymbol{AO} = \sqrt{\frac{289}{16}} = \mathbf{\frac{17}{4}}$$

$$AC = AO + OC = \frac{17}{4} + \frac{15}{4} = \frac{32}{4} = 8$$

Ответ: 8.

ПРИМЕР №11

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите диаметр окружности, если AB=9, AC=12.



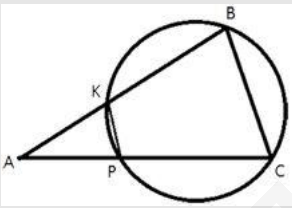
OC является радиусом окружности R. AO = AC – OC.
Проведём отрезок BO. BO – тоже радиус окружности.
AB – касательная к окружности. Следовательно, AB перпендикулярен BO (по свойству касательной).
Значит треугольник ABO – прямоугольный. Тогда по теореме Пифагора:
$AO^2 = AB^2 + BO^2$
$(AC – OC)^2 = AB^2 + R^2$
$(12 – R)^2 = 9^2 + R^2$
$144 – 24R + R^2 = 81 + R^2$
144 – 81 = 24R
R = 63/24 = **21/8**

Диаметр **в два раза больше** радиуса:
D = 2R = 2 · 21/8 = 5,25.

Ответ: 5,25.

ПРИМЕР №12

Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если AK=6, а сторона AC в 1,5 раза больше стороны BC.



Рассмотрим четырёхугольник **PKBC**. PKBC **вписан** в окружность. Следовательно, выполняется условие: сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°.

Поэтому ∠PKB + ∠BCP = 180°
∠PKB + ∠AKP = 180° (т.к. это смежные углы).

Следовательно, ∠AKP = ∠BCP

Рассмотрим треугольники **ABC** и **AKP**.
∠AKP = ∠BCP (это мы выяснили чуть выше)
∠A – общий.
Эти треугольники **подобны** (по двум равным углам). Следовательно:

$$\frac{KP}{BC} = \frac{AK}{AC} = \frac{AP}{AB}$$

Нас интересует следующее равенство:

$$\frac{KP}{BC} = \frac{AK}{AC}$$

$$\frac{KP}{BC} = \frac{6}{1{,}5BC}$$

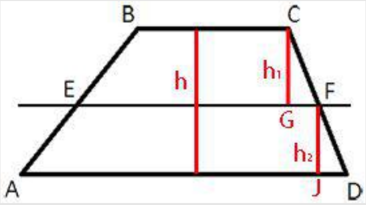
$$KP = \frac{6BC}{1{,}5BC} = 4$$

Ответ: 4.

ЗАДАЧА СО СЛОЖНЫМИ ВЫЧИСЛЕНИЯМИ (НАПОСЛЕДОК)

ПРИМЕР №1

Прямая, параллельная основаниям трапеции ABCD, пересекает её боковые стороны AB и CD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF, если AD=42, BC=14, CF:DF=4:3.



Проведём высоты h_1 и h_2 как показано на рисунке. Рассмотрим треугольники **CFG** и **FDJ**.
∠CGF = ∠FJD = 90° (т.к. мы провели высоты).
∠CFG = ∠FDJ (т.к. это соответственные углы).
Следовательно, эти треугольники **подобны** (по двум равным углам).

По определению подобных треугольников:

$$\frac{CF}{DF}=\frac{CG}{FJ}=\frac{4}{3}$$

Для простоты обозначим: **CG = h_1**; **FJ = h_2**.

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S_{EBCF}=\frac{(CB+EF)\cdot h_1}{2}$$

$$S_{AEFD}=\frac{(EF+AD)\cdot h_2}{2}$$

$$S_{ABCD}=\frac{(BC+AD)\cdot(h_1+h_2)}{2}$$

Так сумма площадей двух меньших трапеций равна площади большей трапеции, то запишем:

$$S_{ABCD}=S_{EBCF}+S_{AEFD}$$

$$\frac{(BC+AD)\cdot(h_1+h_2)}{2}=\frac{(CB+EF)\cdot h_1}{2}+\frac{(EF+AD)\cdot h_2}{2}$$

$$(BC+AD)\cdot(h_1+h_2)=(CB+EF)\cdot h_1+(EF+AD)\cdot h_2$$

$$BC\cdot h_1+AD\cdot h_1+BC\cdot h_2+AD\cdot h_2=CB\cdot h_1+EF\cdot h_1+EF\cdot h_2+AD\cdot h_2$$

$$BC\cdot h_1+AD\cdot h_1-\mathrm{CB}\cdot h_1-EF\cdot h_1=EF\cdot h_2+AD\cdot h_2-BC\cdot h_2-AD\cdot h_2$$

$$h_1(BC+AD-\mathrm{CB}-EF)=h_2(EF+AD-BC-AD)$$

$$h_1(AD-EF)=h_2(EF-BC)$$

$$\frac{h_1}{h_2}=\frac{EF-BC}{AD-EF}$$

$$\frac{4}{3}=\frac{EF-14}{42-EF}$$

$$4(42-EF)=3(EF-14)$$

$$168 - 4EF = 3EF - 42$$

$$-7EF = -210$$

$$EF = \frac{-210}{-7} = 30$$

Ответ: 30.