

Заключительный этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика» в 2014 г.

Вариант № 13

1. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 4 км/ч и 8 км/ч, а Пети – 5 км/ч и 10 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется. (8 баллов)

2. Решите уравнение $(\log_3 x) \cdot \log_4 (x/3) = \log_2 3$. (8 баллов)

3. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии S_3 относится к сумме первых двух членов S_2 как 19:15, а сумма первого и третьего членов равна 13. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n . (8 баллов)

4. Найдите все удовлетворяющие условию $|x| + |y| \leq 9$ решения уравнения $(\sin^8(x/4) - \cos^8(x/4))(\cos 4y + 4\cos 2y - 5) = \cos^2(x/2) - \cos(x/2)$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{(4^x - 12 \cdot 2^x + 32)(\sqrt{2x-1} - x + 2)}{\log_2(x-1) \cdot \log_3(7-x)} \leq 0$. (10 баллов)

6. Для функции $f(x) = g(g(x)) + (7 + \pi)g(x) - 3\pi - 1$ найдите множество значений при $x \in [-0,5; 0]$, где $g(x) = 2\cos \pi x - 7x + 1$. (10 баллов)

7. Две окружности внешним образом касаются друг друга и сторон треугольника ABC . Первая окружность радиуса $1/18$ касается сторон AB и AC в точках L и K , вторая окружность радиуса $2/9$ касается сторон AC и BC в точках N и M . Найдите площадь треугольника ABC , если $AL = 1/9$, $CM = 1/6$. (12 баллов)

8. Стороны треугольника $\triangle ABC$ лежат на касательных к графику функции $y = 0,25x^2 - x + 4$; две из них проходят через точку $A(4;3)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC . Какую наибольшую площадь может иметь $\triangle ABC$? (12 баллов)

9. Укажите все значения a , при которых система уравнений $3(x-a)^2 + y = 2-a$, $y^2 + ((x-2)/(|x|-2))^2 = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a . (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит равносторонний треугольник ABC , а высота пирамиды, равная $\sqrt{2}$, совпадает с боковым ребром TA . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной медиане AD боковой грани TAB и проходящей через середину стороны основания AB и центр сферы радиуса $\sqrt{11/6}$, описанной около пирамиды. (12 баллов)

Решение варианта №13

1. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 4 км/ч и 8 км/ч, а Пети – 5 км/ч и 10 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется. (8 баллов)

Решение: Вся дистанция делится на несколько этапов, которые один из школьников бежит без роликов, другой на роликах. Пусть x – сумма длин этапов, которые Вася пробегает на роликах, t_1 – время, затраченное им на пробег всей дистанции, а t_2 – время, которое затрачивает Петя на пробег всей дистанции, тогда $t_1 = \frac{x}{8} + \frac{3-x}{4} = \frac{6-x}{8}$ и $t_2 = \frac{3-x}{10} + \frac{x}{5} = \frac{3+x}{10}$. Отметим, что функция $t_1(x)$ убывающая, а функция $t_2(x)$ возрастающая. Укажем значение x , при котором $t_1 = t_2$, то есть, бегуны закончили бы пробег одновременно. Из $\frac{6-x}{8} = \frac{3+x}{10} \Rightarrow x = 2$, $t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$ часа. Если $x < 2$, то $t_1(x) > \frac{1}{2} > t_2(x)$, если $x > 2$, то $t_1(x) < \frac{1}{2} < t_2(x)$. Следовательно, минимальное время прохождения дистанции друзьями (по последнему прибежавшему), равно 0,5 часа. Ответ: 0,5 ч.

2. Решите уравнение $(\log_3 x) \cdot \log_4 (x/3) = \log_2 3$.

Решение: $(\log_3 x) \cdot \log_4 (x/3) = \log_2 3$; $\frac{\log_3 (x/3)}{2 \log_3 2} \cdot \log_3 x = \frac{1}{\log_3 2}$;
 $(\log_3 x - 1) \log_3 x = 2$; $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$. 1) $\log_3 x = -1$, $x = 1/3$,
2) $\log_3 x = 2$, $x = 9$. Ответ: $\{1/3; 9\}$.

3. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии S_3 относится к сумме первых двух членов S_2 как 19:15, а сумма первого и третьего членов равна 13. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n .

Решение:

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{a(1+q+q^2)}{a(1+q)} = \frac{19}{15}. \quad 15q^2 + 15q + 15 = 19q + 19; \quad 15q^2 - 4q - 4 = 0;$$
$$q = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{15} = \frac{2 \pm 8}{15} = \begin{cases} 2/3, \\ -2/5. \end{cases} \quad \text{Возможны два решения.}$$

1) Если $q = \frac{2}{3}$, из условия $a(1+q^2) = 13 \Rightarrow a = 9$.

$$S_n = 9 \frac{1-(2/3)^n}{1-2/3} = 27(1-(2/3)^n); \quad 9 \leq S_n < 27.$$

2) Если $q = -\frac{2}{5}$, $a\left(1+\frac{4}{25}\right) = 13$, $a = \frac{13 \cdot 25}{29} = \frac{325}{29}$.

Так как $q < 0$, $|q| < 1$, $S_2 \leq S_n \leq S_1$. $\frac{325}{29}\left(1-\frac{2}{5}\right) \leq S_n \leq \frac{325}{29}$, $\frac{195}{29} \leq S_n \leq \frac{325}{29}$.

Ответ: 1) $q = \frac{2}{3}$, $a = 9$, $9 \leq S_n < 27$; 2) $q = -\frac{2}{5}$, $a = \frac{325}{29}$, $\frac{195}{29} \leq S_n \leq \frac{325}{29}$.

4. Найдите все решения уравнения

$$\left(\sin^8 \frac{x}{4} - \cos^8 \frac{x}{4}\right)(\cos 4y + 4\cos 2y - 5) = \cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}, \text{ удовлетворяющие условию } |x| + |y| \leq 9.$$

Решение:

После равносильных преобразований имеем

$$\begin{aligned} \left(\sin^4 \frac{x}{4} - \cos^4 \frac{x}{4}\right)\left(\sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4}\right)(2\cos^2 2y + 4\cos 2y - 6) &= \cos^2 \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \Leftrightarrow \\ \left(\sin^2 \frac{x}{4} - \cos^2 \frac{x}{4}\right)\left(\sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4}\right)(2\cos^2 2y + 4\cos 2y - 6) &= -\cos \frac{x}{2} \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow \\ \cos \frac{x}{2} \left(\sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4}\right)(\cos^2 2y + 2\cos 2y - 3) &= \cos \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4} \end{aligned}$$

1) $\cos \frac{x}{2} = 0$, $y \in R \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. Выберем решения, удовлетворяющие условию $|x| + |y| \leq 9$: $x = \pi$, $x = -\pi$, $|y| \leq 9 - \pi$. В итоге имеем $(\pm\pi; y)$, $y \in [\pi - 9; 9 - \pi]$.

$$2) \left(\sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4}\right)((\cos 2y + 1)^2 - 4) = \sin^2 \frac{x}{4}$$

Так как $\sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4} > 0$, $\sin^2 \frac{x}{4} \geq 0$ для любых $x \in R$, то $(\cos 2y + 1)^2 \geq 4$,

или

$\cos 2y \geq 1$. Откуда получаем $\cos 2y = 1$, $\sin \frac{x}{4} = 0$, или $x = 4\pi n$, $y = \pi k$, $n, k \in Z$.

Поскольку $x \in [-9; 9]$, то $n = 0$. Тогда $-9 \leq \pi k \leq 9$, и $k = 0; \pm 1; \pm 2$.

Ответ: $(\pm\pi; y)$, $y \in [\pi - 9; 9 - \pi]$; $(0; \pi k)$, $k = 0; \pm 1; \pm 2$.

5. Решите неравенство $\frac{(4^x - 12 \cdot 2^x + 32)(\sqrt{2x-1} - x + 2)}{\log_2(x-1) \cdot \log_3(7-x)} \leq 0$. (10 баллов)

Решение:

ОДЗ: $2x-1 \geq 0, x-1 > 0, 7-x > 0, x \neq 2, x \neq 6 \Rightarrow x \in (1; 2) \cup (2; 6) \cup (6; 7)$.

Имеем $\frac{(2^x - 8)(2^x - 4)(\sqrt{2x-1} - x + 2)}{(\log_2(x-1) - \log_2 1)(\log_3(7-x) - \log_3 1)} \leq 0$.

На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\frac{(x-3)(x-2)(\sqrt{2x-1} - (x-2))}{(x-2)(6-x)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-3)(\sqrt{2x-1} - (x-2))}{(6-x)} \leq 0.$$

Если $x \in (1; 2)$, то $x-2 < 0 \Rightarrow \sqrt{2x-1} - (x-2) > 0$. Следовательно, приходим к неравенству $\frac{(x-3)}{(6-x)} \leq 0$, и $x \in (1; 2)$.

Если $x \in (2; 6) \cup (6; 7)$ то приходим к неравенству $\frac{(x-3)(2x-1-(x-2)^2)}{(6-x)} \leq 0$, и

$$\frac{(x-3)(x-5)(x-1)}{(x-6)} \leq 0 \Rightarrow x \in (2; 3] \cup [5; 6).$$

Окончательно имеем $x \in (1; 2) \cup (2; 3] \cup [5; 6)$.

Ответ: $x \in (1; 2) \cup (2; 3] \cup [5; 6)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = g(g(x)) + (7 + \pi)g(x) - 3\pi - 1$ при $x \in [-0,5; 0]$, где $g(x) = 2\cos \pi x - 7x + 1$. (10 баллов)

Решение: Исследуем функцию $g(x)$ на монотонность. Так как $g'(x) = -2\pi \sin \pi x - 7 < 0$ для всех $x \in R$, то функция $g(x)$ убывает на отрезке $[-0,5; 0]$ и ее множество значений на этом отрезке совпадает с отрезком $[g(0); g(-0,5)] = [3; 4,5]$. Множество значений E_f функции $f(x) = g(g(x)) + (7 + \pi)g(x) - 3\pi - 1$ на отрезке $[-0,5; 0]$ совпадает с множеством значений E_φ функции $\varphi(t) = g(t) + (7 + \pi)t - 3\pi - 1$ на отрезке $[3; 4,5]$. Найдем E_φ . Функция $\varphi(t) = 2\cos \pi t + \pi t - 3\pi$ имеет производную

$\varphi'(t) = -2\pi \sin \pi t + \pi$. Тогда $\varphi'(t) = 0$ в том случае, если $\sin \pi t = 0,5$, т.е. при $t = \frac{1}{6} + 2k$ или $t = \frac{5}{6} + 2k$, $k \in Z$. Из точек, при которых $\varphi'(t) = 0$, в отрезок $[3; 4,5]$ попадает

только точка $t = 4\frac{1}{6}$. Вычислим значения функции φ в точках $t = 3, t = 4\frac{1}{6}, t = 4,5$:

$$\varphi(3) = -2; \varphi(25/6) = \sqrt{3} + \frac{25\pi}{6} - 3\pi = \sqrt{3} + \frac{7\pi}{6}; \varphi(4,5) = 1,5\pi.$$

Так как $\sqrt{3} + \frac{7\pi}{6} > 1,5\pi$, то $E_\varphi = \left[-2; \sqrt{3} + \frac{7\pi}{6}\right]$. Следовательно, $E_f = \left[-2; \sqrt{3} + \frac{7\pi}{6}\right]$

Ответ: $E_f = \left[-2; \sqrt{3} + \frac{7\pi}{6}\right]$.

7. Две окружности касаются друг друга и сторон треугольника ABC . Первая окружность радиуса $\frac{1}{18}$ касается сторон AB и AC в точках L и K , вторая окружность радиуса $\frac{2}{9}$ касается сторон AC и BC в точках N и M . Найдите площадь треугольника ABC , если $AL = \frac{1}{9}$, $CM = \frac{1}{6}$.

Решение:

$$a = \frac{1}{9}, \quad b = \frac{1}{6}, \quad r = \frac{1}{18}, \quad R = \frac{2}{9}, \quad KN = 2\sqrt{rR} = \frac{2}{9}, \quad AC = a + KN + b = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{a}, \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{R}{b},$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{a^2}{a^2 + r^2}, \quad \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{b^2}{b^2 + R^2},$$

$$\cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \frac{2a^2}{a^2 + r^2} - 1 = \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2} = \frac{3}{5},$$

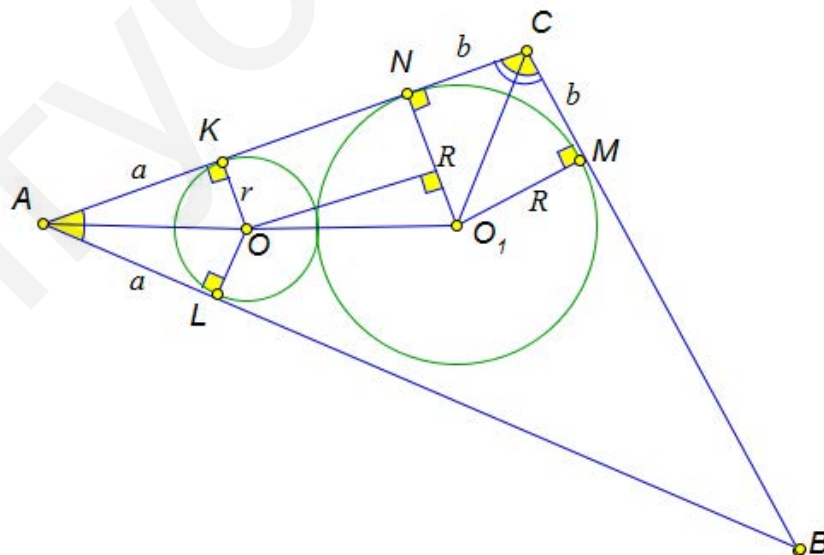
$$\cos C = 2 \cos^2 \frac{C}{2} - 1 = \frac{2b^2}{b^2 + R^2} - 1 = \frac{b^2 - R^2}{b^2 + R^2} = -\frac{7}{25}, \quad \sin A = \frac{2ar}{a^2 + r^2} = \frac{4}{5},$$

$$\sin C = \frac{2bR}{b^2 + R^2} = \frac{24}{25}, \quad \sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{44}{125}.$$

Теорема синусов: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}.$

$$AB = \frac{AC \sin C}{\sin B}, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A = \frac{AC^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{4 \cdot 24 \cdot 125}{8 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 44} = \frac{3}{11}.$$

Ответ: $\frac{3}{11}.$



8. Стороны треугольника $\triangle ABC$ лежат на касательных к графику функции $y = 0,25x^2 - x + 4$; две из них проходят через точку $A(4;3)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC . Какую наибольшую площадь может иметь $\triangle ABC$?

$$y = 0,25x^2 - x + 4; \quad A(4;3).$$

Уравнение касательной к графику функции:

$$y = \frac{1}{4}x_0^2 - x_0 + 4 + \frac{x_0 - 2}{2} \cdot (x - x_0), \text{ или}$$

$$y = -\frac{1}{4}x_0^2 + 4 + \frac{x_0 - 2}{2} \cdot x.$$

Для касательных, проходящих через точку A ,

$$3 = -\frac{1}{4}x_0^2 + 4 + \frac{x_0 - 2}{2} \cdot 4. \text{ Отсюда}$$

$$x_0^2 - 8x_0 + 12 = 0, \quad x_0 = 4 \pm 2 = \begin{bmatrix} 2, \\ 6. \end{bmatrix}$$

Уравнения касательных, проходящих через точку A : 1) $y = 3$; 2). $y = 2x - 5$

Уравнение прямой CB :

$$y = -\frac{1}{4}x_*^2 + 4 + \frac{x_* - 2}{2} \cdot x,$$

где x_* – абсцисса точки касания с графиком функции.

В точке $C(x_C; y_C)$ $y_C = 3$. Тогда

$$3 = -\frac{1}{4}x_*^2 + 4 + \frac{x_* - 2}{2} \cdot x_C. \text{ Отсюда } x_C = \frac{0,25x_*^2 - 1}{x_* - 2} \cdot 2 = \frac{x_* + 2}{2}.$$

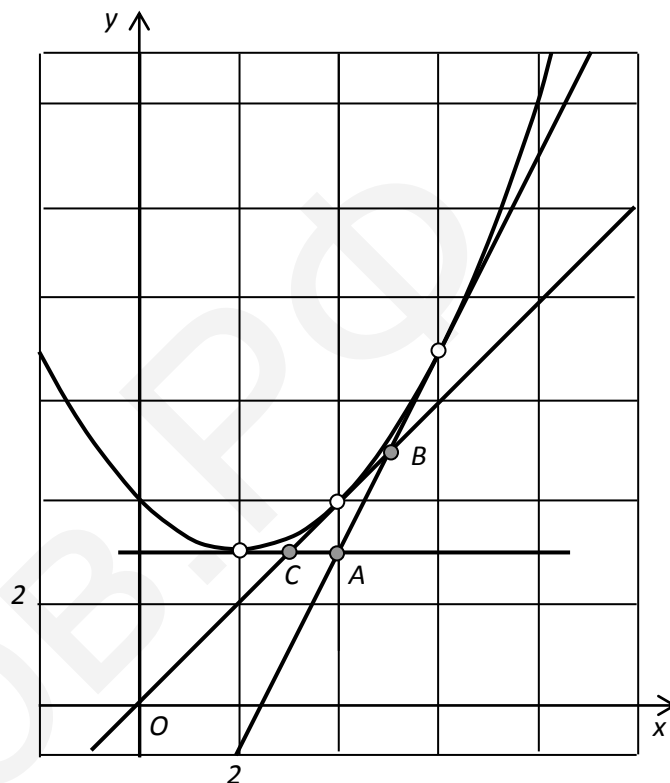
$$\text{В точке } B(x_B; y_B) \quad -\frac{1}{4}x_*^2 + 4 + \frac{x_* - 2}{2} \cdot x_B = 2x_B - 5, \quad \frac{x_* - 6}{2} \cdot x_B = \frac{x_*^2 - 36}{4}, \quad x_B = \frac{x_* + 6}{2}.$$

$y_B = 2x_B - 5 = x_* + 1$. Площадь треугольника ABC равна

$$S_{\triangle ABC} = 0,5 \cdot (x_A - x_C) \cdot (y_B - y_A) = \frac{1}{2} \cdot \left(4 - \frac{x_* + 2}{2}\right) \cdot (x_* + 1 - 3) = \frac{1}{4}(-12 + 8x_* - x_*^2) = S(x_*).$$

$$S'(x_*) = 0,25(8 - 2x_*) = 0 \text{ при } x_* = 4. \quad \max S_{\triangle ABC} = S(4) = 0,25 \cdot (-12 + 8 \cdot 4 - 16) = 1.$$

Ответ: 1 ед².



9. Укажите все значения a , при которых система уравнений

$$3(x-a)^2 + y = 2-a, \quad y^2 + \left(\frac{x-2}{|x|-2}\right)^2 = 1 \text{ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при}$$

каждом a .

Решение. Преобразуем второе уравнение:

$$y^2 = \frac{x^2 - 4|x| + 4 - x^2 + 4x - 4}{(|x| - 2)^2}; \quad y^2 = -\frac{4(|x| - x)}{(|x| - 2)^2}.$$

При $x < 0$ уравнение решений не имеет, так как правая часть меньше нуля; при $x \geq 0$ оно равносильно системе: $x \geq 0, x \neq 2, y = 0$. Подставляя $y = 0$ в первое уравнение, получаем; $3(x - a)^2 = 2 - a$, или $3x^2 - 6ax + 3a^2 + a - 2 = 0$ (*), у которого $D/4 = 9a^2 - 9a^2 - 3a + 6 = 6 - 3a$.

Корень $x = 2$ квадратного уравнения может получиться, когда $3(2 - a)^2 = 2 - a$, т.е. если 1) $a = 2$, уравнение имеет вид $(x - 2)^2 = 0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $3(2 - a) = 1$, т.е. $a = 5/3$, тогда для x получаем уравнение $3(x - 5/3)^2 = 2 - 5/3$, $x = 5/3 \pm 1/3$, у которого, кроме постороннего корня $x_1 = 2$, есть еще один корень $x_2 = 4/3$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(4/3; 0)$.

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

1. $\begin{cases} D/4 = 6 - 3a = 0, \\ a > 0, \quad a \neq 2. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $3a^2 + a - 2 < 0$, т.е. при $-1 < a < 2/3$ $x = (3a + \sqrt{6 - 3a})/3$.

3. $3a^2 + a - 2 = 0$, отсюда $a = 2/3$, $3x^2 - 4x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4/3$ удовлетворяют условиям, или $a = -1$, $3x^2 + 6x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -2$ — посторонний корень.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных неотрицательных корня $x_{1,2} = (3a \pm \sqrt{6 - 3a})/3$, если

$$\begin{cases} 6 - 3a > 0, \\ a > 0, \\ 3a^2 + a - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 2, \\ \left[\begin{array}{l} a \leq -1, \\ a \geq 2/3 \end{array} \right] \end{cases} \Leftrightarrow 2/3 \leq a < 2. \text{ Из этого промежутка надо убрать}$$

рассмотренную ранее точку $a = 5/3$. Объединяя найденные значения a , получим ответ.

Ответ: $a \in [-1; 2/3)$, $x = (3a + \sqrt{6 - 3a})/3$, $y = 0$;

$$a \in [2/3; 5/3) \cup (5/3; 2), \quad x_{1,2} = (3a \pm \sqrt{6 - 3a})/3, \quad y = 0;$$

$$a = 5/3, \quad x = 4/3, \quad y = 0.$$

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит равносторонний треугольник ABC , а высота пирамиды, равная $\sqrt{2}$, совпадает с боковым ребром TA . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной медиане AD боковой грани TAB и проходящей через середину стороны основания AB и центр сферы радиуса $\sqrt{11/6}$, описанной около пирамиды.

Решение: Центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания H ; $OH = AT/2$. Через вершину B проведем прямую $BE \parallel AT$. Через середину стороны AB точку M проведем прямую $MN \parallel AD$, $N \in TB$, $TB = 4NB$, и продолжим ее до пересечения с BE в точке F . Очевидно, MF лежит в секущей плоскости и $BF = AT/2$. Прямая FO лежит в секущей плоскости, она параллельна медиане основания BG и пересекает боковое ребро TC в его середине – точке P . Проведем $MK \parallel BG$, $K \in AC$; MK – линия пересечения секущей плоскости с основанием пирамиды. Значит, $MNPK$ – искомое сечение. Пусть S – точка пересечения прямых MK и NP ; очевидно $S \in (BC)$. Из того, что $\triangle PSG \sim \triangle NSL$ и $NL = 1/2 PG$,

следует $NS = \frac{1}{2} PS$. Кроме того, $MS = \frac{2}{3} KS$. Тогда площадь треугольника MSN

$$S_{\triangle MSN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} S_{\triangle KSP} = \frac{1}{3} S_{\triangle KSP}, \text{ а площадь сечения } S_{MNPK} = \frac{2}{3} S_{\triangle KSP}.$$

Обозначим $AB = a$, $TA = h$, $OA = R$. В $\triangle AOH$ $OH = h/2$, $AH = a/\sqrt{3}$. Так как $OA^2 = OH^2 + AH^2$, $R^2 = (h/2)^2 + (a/\sqrt{3})^2$, $a = \sqrt{3} \sqrt{R^2 - (h/2)^2}$. Заметим, что $PK \perp KS$,

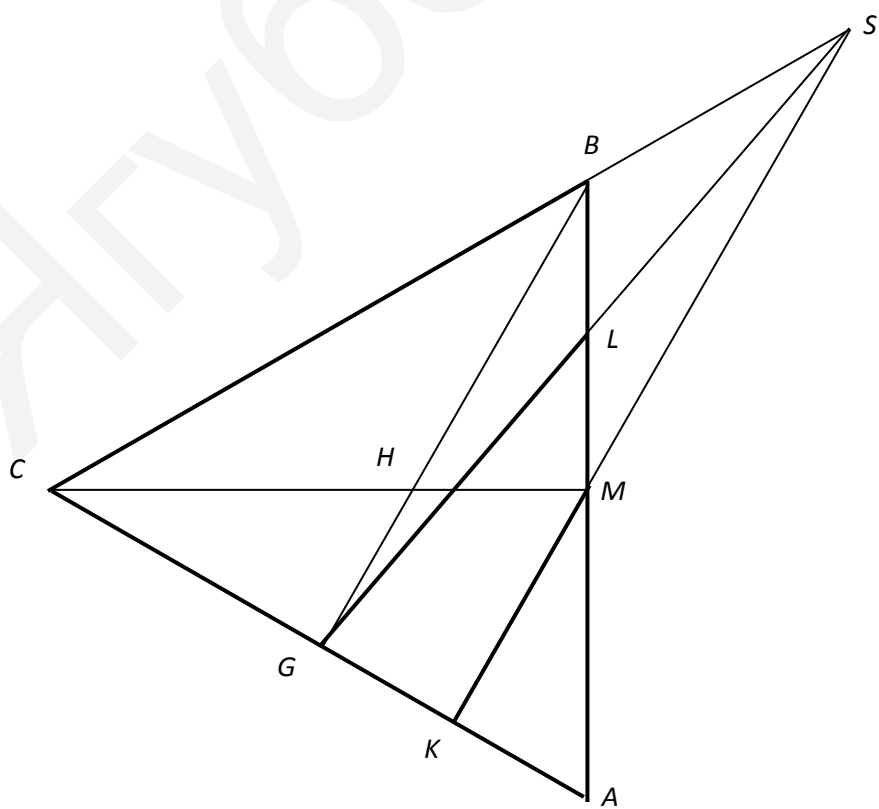
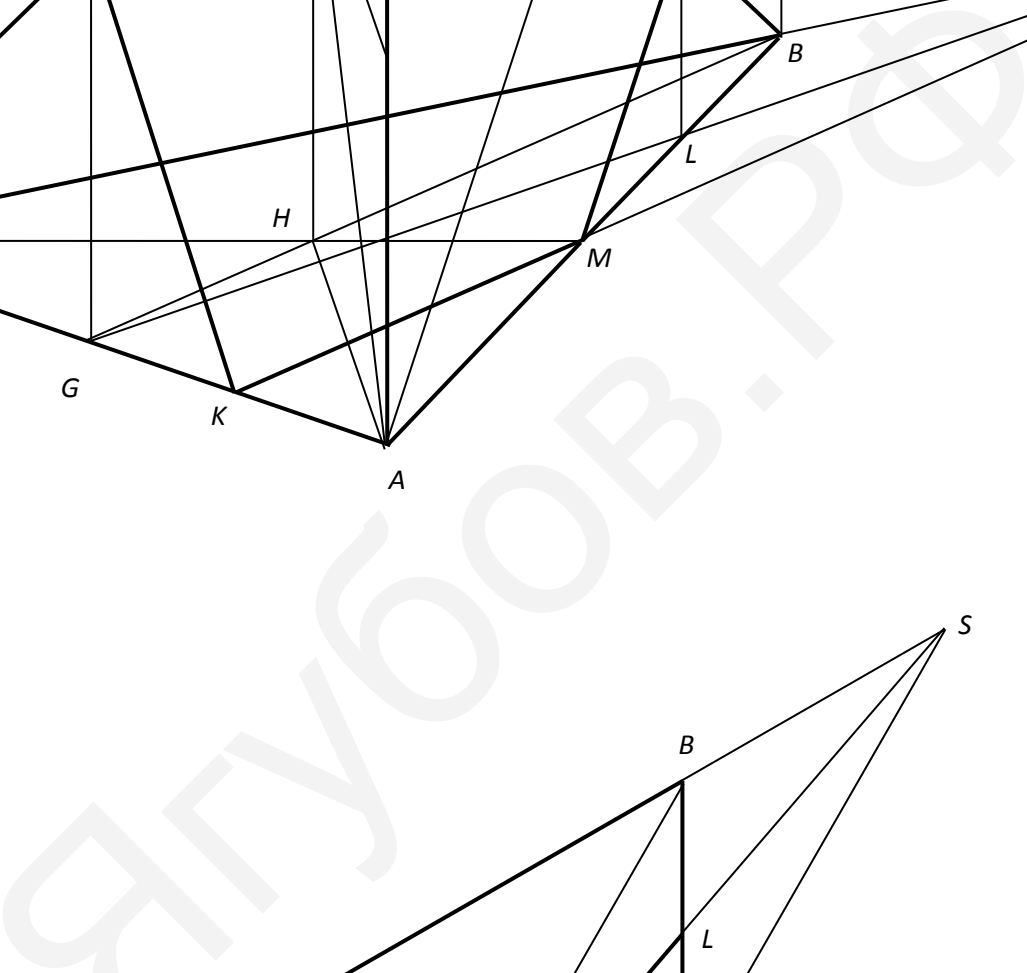
так как $KM \perp AC$, тогда $S_{\triangle KSP} = \frac{1}{2} KS \cdot PK$. Так как $KS = \frac{3}{2} BG$, $KS = \frac{3\sqrt{3}a}{4}$. В

треугольнике PKG $PK = \sqrt{GK^2 + PG^2} = \sqrt{(a/4)^2 + (h/2)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{a^2 + 4h^2}$. Площадь

треугольника $S_{\triangle KSP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}a}{4} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + 4h^2}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a\sqrt{a^2 + 4h^2}}{32}$. Площадь сечения

$$S_{MNPK} = \frac{2}{3} S_{\triangle KSP} = \frac{\sqrt{3}a\sqrt{a^2 + 4h^2}}{16}.$$

Ответ: $R = \sqrt{\frac{11}{6}}$, $h = \sqrt{2}$, $a = \sqrt{3 \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{2} \right)} = 2$, $S = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{4 \cdot 2 + 4}}{16} = \frac{3}{4}$.



Заключительный этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика» в 2014 г.

Вариант № 15

1. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3,5 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 3 км/ч и 9 км/ч, а Пети – 4 км/ч и 12 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется. (8 баллов)

2. Решите уравнение $(\log_2 x) \cdot \log_{27}(4x) = \log_3 2$. (8 баллов)

3. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии S_3 относится к сумме первых двух членов S_2 как 21:20, а сумма первого и третьего членов равна 17. Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n . (8 баллов)

4. Найдите все удовлетворяющие условию $|x| + |y| \leq 8$ решения уравнения $(\sin^8(x/4) - \cos^8(x/4))(5 - \cos 4y - 4 \cos 2y) = \cos^2(x/2) + \cos(x/2)$. (8 баллов)

5. Решите неравенство $\frac{(9^x - 12 \cdot 3^x + 27)(\sqrt{x+5} - x + 1)}{\log_3 x \cdot \log_4(6-x)} \leq 0$. (10 баллов)

6. Для функции $f(x) = g(g(x)) + (7 - \pi)g(x) - 2 + (\pi/2)$ найдите множество значений при $x \in [0; 0,5]$, где $g(x) = 2 \sin \pi x - 7x + 2$. (10 баллов)

7. Две окружности внешним образом касаются друг друга и сторон треугольника ABC . Первая окружность радиуса $2/3$ касается сторон AB и AC в точках L и K , вторая окружность радиуса $1/6$ касается сторон AC и BC в точках N и M . Найдите площадь треугольника ABC , если $AL=1$, $CM=1/3$. (12 баллов)

8. Стороны треугольника $\triangle ABC$ лежат на касательных к графику функции $y = -0,25x^2 + 2x - 1$; две из них проходят через точку $A(2;3)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC . Какую наибольшую площадь может иметь $\triangle ABC$? (12 баллов)

9. Укажите все значения a , при которых система уравнений $2(x-a)^2 + y = 10-a$, $y^2 + ((x-10)/(|x|-10))^2 = 1$ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при каждом a . (12 баллов)

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит равносторонний треугольник ABC , а высота пирамиды, равная 2, совпадает с боковым ребром TA . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной медиане AD боковой грани TAB и проходящей через середину стороны основания AB и центр сферы радиуса $\sqrt{17}$, описанной около пирамиды. (12 баллов)

Решение варианта №15

1. Васе и Пете, участвующим в школьной спортивно-развлекательной игре, необходимо, имея на двоих лишь одну пару роликов, как можно быстрее преодолеть дистанцию в 3,5 км. Они стартуют одновременно, один просто бежит, другой бежит на роликах. В любой момент времени бегущий на роликах может оставить их своему товарищу и продолжить бег без них. Такой обмен можно провести сколько угодно раз. Найдите минимальное время прохождения дистанции друзьями (определяется по последнему прибежавшему), если скорости Васи при простом беге и беге на роликах равны 3 км/ч и 9 км/ч, а Пети – 4 км/ч и 12 км/ч. Считать, что при переходе на ролики и обратно время не теряется.

Решение: Вся дистанция делится на несколько этапов, которые один из школьников бежит без роликов, другой на роликах. Пусть x – сумма длин этапов, которые Вася пробегает на роликах, t_1 – время, затраченное им на пробег всей дистанции, а t_2 – время,

которое затрачивает Петя на пробег всей дистанции, тогда $t_1 = \frac{x}{12} + \frac{3,5-x}{4} = \frac{10,5-2x}{12}$ и

$t_2 = \frac{3,5-x}{9} + \frac{x}{3} = \frac{3,5+2x}{9}$. Отметим, что функция $t_1(x)$ убывающая, а функция $t_2(x)$

возрастающая. Укажем значение x , при котором $t_1 = t_2$, то есть, бегуны закончили бы

пробег одновременно. Из $\frac{10,5-2x}{12} = \frac{2x+3,5}{9} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$, $t_1 = t_2 = \frac{2}{3}$ часа. Если $x < 5/4$, то

$t_1(x) > \frac{2}{3} > t_2(x)$, если $x > 5/4$, то $t_1(x) < \frac{2}{3} < t_2(x)$. Следовательно, минимальное время

прохождения дистанции друзьями (по последнему прибежавшему), равно $2/3$ часа.

Ответ: $2/3$ ч.

2. Решите уравнение $(\log_2 x) \cdot \log_{27}(4x) = \log_3 2$.

Решение: $(\log_2 x) \cdot \log_{27}(4x) = \log_3 2$; $\frac{\log_2(4x)}{3 \log_2 3} \cdot \log_2 x = \frac{1}{\log_2 3}$;

$$(2 + \log_2 x) \log_2 x = 3; \log_2^2 x + 2 \log_2 x - 3 = 0.$$

1) $\log_2 x = -3$, $x = 1/8$, 2) $\log_2 x = 1$, $x = 2$. Ответ: $\{1/8; 2\}$.

3. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии S_3 относится к сумме первых двух членов S_2 как $21:20$, а сумма первого и третьего членов равна 17 . Найдите первый член и знаменатель прогрессии и определите, в каких пределах может изменяться сумма n членов прогрессии S_n .

Решение:

$$\frac{S_3}{S_2} = \frac{a(1+q+q^2)}{a(1+q)} = \frac{21}{20}. \quad 20q^2 + 20q + 20 = 21q + 21; \quad 20q^2 - q - 1 = 0;$$

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{1+80}}{40} = \frac{1 \pm 9}{40} = \begin{cases} 1/4, \\ -1/5. \end{cases} \quad \text{Возможны два решения.}$$

1) Если $q = \frac{1}{4}$, из условия $a(1+q^2) = 17 \Rightarrow a = 16$.

$$S_n = 16 \frac{1 - (1/4)^n}{1 - 1/4} = \frac{64}{3} (1 - (1/4)^n); \quad 16 \leq S_n < \frac{64}{3}.$$

$$2) \text{ Если } q = -\frac{1}{5}, a \left(1 + \frac{1}{25}\right) = 17, \quad a = \frac{25 \cdot 17}{26} = \frac{425}{26}.$$

$$\text{Так как } q < 0, |q| < 1, \quad S_2 \leq S_n \leq S_1. \quad \frac{425}{26} \left(1 - \frac{1}{5}\right) \leq S_n \leq \frac{425}{26}, \quad \frac{340}{26} \leq S_n \leq \frac{425}{26}.$$

$$\text{Ответ: 1) } q = \frac{1}{4}, a = 16, \quad 16 \leq S_n < \frac{64}{3}; \quad 2) \quad q = -\frac{1}{5}, \quad a = \frac{425}{26}, \quad \frac{340}{26} \leq S_n \leq \frac{425}{26}.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$\left(\sin^8 \frac{x}{4} - \cos^8 \frac{x}{4}\right)(5 - \cos 4y - 4 \cos 2y) = \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}, \text{ удовлетворяющие условию } |x| + |y| \leq 8.$$

Решение: После равносильных преобразований имеем

$$\begin{aligned} & \left(\cos^4 \frac{x}{4} - \sin^4 \frac{x}{4}\right) \left(\sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4}\right) (2 \cos^2 2y + 4 \cos 2y - 6) = \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \quad \Leftrightarrow \\ & \left(\cos^2 \frac{x}{4} - \sin^2 \frac{x}{4}\right) \left(\sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4}\right) (2 \cos^2 2y + 4 \cos 2y - 6) = \cos \frac{x}{2} \left(1 + \cos \frac{x}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \\ & \cos \frac{x}{2} \left(\sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4}\right) (\cos^2 2y + 2 \cos 2y - 3) = \cos \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{4} \end{aligned}$$

$$1) \quad \cos \frac{x}{2} = 0, \quad y \in R \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z. \text{ Выберем решения, удовлетворяющие условию } |x| + |y| \leq 8: \quad x = \pi, \quad x = -\pi, \quad |y| \leq 8 - \pi. \text{ В итоге имеем } (\pm\pi; y), \quad y \in [\pi - 8; 8 - \pi].$$

$$2) \quad \left(\sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4}\right) ((\cos 2y + 1)^2 - 4) = \cos^2 \frac{x}{4}$$

$$\text{Так как } \sin^4 \frac{x}{4} + \cos^4 \frac{x}{4} > 0, \quad \cos^2 \frac{x}{4} \geq 0 \text{ для любых } x \in R, \text{ то } (\cos 2y + 1)^2 \geq 4, \text{ или}$$

$$\cos 2y \geq 1. \text{ Откуда получаем } \cos 2y = 1, \quad \cos \frac{x}{4} = 0, \text{ или } x = 2\pi + 4\pi n, \quad y = \pi k, \quad n, k \in Z.$$

$$\text{Поскольку } x \in [-8; 8], \text{ то } n = 0; -1. \text{ Тогда } 2\pi - 8 \leq \pi k \leq 8 - 2\pi, \text{ и } k = 0. \text{ В итоге имеем решения: } (2\pi; 0), \quad (-2\pi; 0).$$

$$\text{Ответ: } (\pm\pi; y), \quad y \in [\pi - 8; 8 - \pi]; \quad (2\pi; 0), \quad (-2\pi; 0).$$

$$5. \text{ Решите неравенство } \frac{(9^x - 12 \cdot 3^x + 27)(\sqrt{x+5} - x + 1)}{\log_3 x \cdot \log_4 (6-x)} \leq 0.$$

Решение:

$$\text{ОДЗ: } x + 5 \geq 0, \quad x > 0, \quad 6 - x > 0, \quad x \neq 1, \quad x \neq 5 \Rightarrow x \in (0; 1) \cup (1; 5) \cup (5; 6).$$

$$\text{Имеем } \frac{(3^x - 9)(3^x - 3)(\sqrt{x+5} - x + 1)}{(\log_3 x - \log_3 1)(\log_4 (6-x) - \log_4 1)} \leq 0.$$

На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\frac{(x-2)(x-1)(\sqrt{x+5}-(x-1))}{(x-1)(5-x)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-2)(\sqrt{x+5}-(x-1))}{(5-x)} \leq 0.$$

Если $x \in (0; 1)$, то $x-1 < 0 \Rightarrow \sqrt{x+5}-(x-1) > 0$. Следовательно, приходим к неравенству $\frac{(x-2)}{(5-x)} \leq 0$, и $x \in (0; 1)$.

Если $x \in (1; 5) \cup (5; 6)$ то приходим к неравенству $\frac{(x-2)(x+5-(x-1)^2)}{(5-x)} \leq 0$, и

$$\frac{(x-2)(x+1)(x-4)}{(x-5)} \leq 0 \Rightarrow x \in (1; 2] \cup [4; 5).$$

Окончательно имеем $x \in (0; 1) \cup (1; 2] \cup [4; 5)$.

Ответ: $x \in (0; 1) \cup (1; 2] \cup [4; 5)$.

6. Найдите множество значений функции $f(x) = g(g(x)) + (7 - \pi)g(x) - 2 + \frac{\pi}{2}$ при $x \in [0; 0,5]$, где $g(x) = 2 \sin \pi x - 7x + 2$. (10 баллов)

Решение: Исследуем функцию $g(x)$ на монотонность. Так как $g'(x) = 2\pi \cos \pi x - 7 < 0$ для всех $x \in R$, то функция $g(x)$ убывает на отрезке $[0; 0,5]$ и ее множество значений на этом отрезке совпадает с отрезком $[g(0,5); g(0)] = [0,5; 2]$.

Множество значений E_f функции $f(x) = g(g(x)) + (7 - \pi)g(x) - 2 + \frac{\pi}{2}$ на отрезке

$[0; 0,5]$ совпадает с множеством значений E_φ функции $\varphi(t) = g(t) + (7 - \pi)t - 2 + \frac{\pi}{2}$ на

отрезке $[0,5; 2]$. Найдем E_φ . Функция $\varphi(t) = 2 \sin \pi t - \pi t + \frac{\pi}{2}$ имеет производную

$\varphi'(t) = 2\pi \cos \pi t - \pi$. Тогда $\varphi'(t) = 0$ в том случае, если $\cos \pi t = 0,5$, т.е. при $t = \frac{1}{3} + 2k$

или $t = -\frac{1}{3} + 2k$, $k \in Z$. Из точек, при которых $\varphi'(t) = 0$, в отрезок $[0,5; 2]$ попадает

только точка $t = \frac{5}{3}$. Вычислим значения функции φ в точках $t = 0,5, t = \frac{5}{3}, t = 2$:

$$\varphi(0,5) = 2; \quad \varphi(5/3) = -\sqrt{3} - \frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = -\sqrt{3} - \frac{7\pi}{6}; \quad \varphi(2) = -1,5\pi.$$

Так как $\sqrt{3} + \frac{7\pi}{6} > 1,5\pi$, то $E_\varphi = \left[-\sqrt{3} - \frac{7\pi}{6}; 2\right]$. Следовательно, $E_f = \left[-\sqrt{3} - \frac{7\pi}{6}; 2\right]$.

Ответ: $E_f = \left[-\sqrt{3} - \frac{7\pi}{6}; 2\right]$.

7. Две окружности внешним образом касаются друг друга и сторон треугольника ABC . Первая окружность радиуса $\frac{2}{3}$ касается сторон AB и AC в точках L и K , вторая окружность радиуса $\frac{1}{6}$ касается сторон AC и BC в точках N и M . Найдите площадь треугольника ABC , если $AL = 1$, $CM = \frac{1}{3}$.

Решение:

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{3}, \quad r = \frac{2}{3}, \quad R = \frac{1}{6}, \quad KN = 2\sqrt{rR} = \frac{2}{3}, \quad AC = a + KN + b = 2$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{r}{a}, \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{R}{b},$$

$$\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{a^2}{a^2 + r^2}, \quad \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{b^2}{b^2 + R^2},$$

$$\cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 = \frac{2a^2}{a^2 + r^2} - 1 = \frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2} = \frac{5}{13},$$

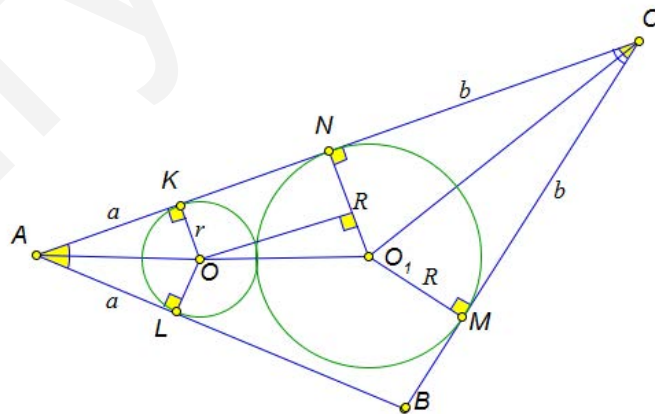
$$\cos C = 2 \cos^2 \frac{C}{2} - 1 = \frac{2b^2}{b^2 + R^2} - 1 = \frac{b^2 - R^2}{b^2 + R^2} = \frac{3}{5}, \quad \sin A = \frac{2ar}{a^2 + r^2} = \frac{12}{13},$$

$$\sin C = \frac{2bR}{b^2 + R^2} = \frac{4}{5}, \quad \sin B = \sin(A + C) = \sin A \cos C + \cos A \sin C = \frac{56}{65}.$$

Теорема синусов: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}.$

$$AB = \frac{AC \sin C}{\sin B}, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A = \frac{AC^2 \sin A \sin C}{2 \sin B} = \frac{4 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 65}{2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 56} = \frac{12}{7}.$$

Ответ: $\frac{12}{7}.$



8. Стороны треугольника $\triangle ABC$ лежат на касательных к графику функции $y = -0,25x^2 + 2x - 1$; две из них проходят через точку $A(2;3)$, а точка касания графика с третьей касательной лежит на стороне BC . Какую наибольшую площадь может иметь $\triangle ABC$?

Решение:

$$y = -0,25x^2 + 2x - 1; \quad A(2;3).$$

Уравнение касательной к графику функции:

$$y = -\frac{1}{4}x_0^2 + 2x_0 - 1 + \frac{4-x_0}{2} \cdot (x-x_0),$$

или

$$y = \frac{1}{4}x_0^2 - 1 + \frac{4-x_0}{2} \cdot x.$$

Для касательных, проходящих через точку A ,

$$3 = \frac{1}{4}x_0^2 - 1 + \frac{4-x_0}{2} \cdot 2. \text{ Отсюда}$$

$$x_0^2 - 4x_0 = 0, \quad x_0 = \begin{cases} 4, \\ 0. \end{cases} \text{ Уравнения}$$

касательных, проходящих через точку A : 1) $y = 3$; 2) $y = 2x - 1$

Уравнение прямой CB :

$$y = \frac{1}{4}x_*^2 - 1 + \frac{4-x_*}{2} \cdot x,$$

где x_* — абсцисса точки касания с графиком функции.

В точке $C(y_C; x_C)$ $y_C = 3$. Тогда $3 = \frac{1}{4}x_*^2 - 1 + \frac{4-x_*}{2} \cdot x_C$. Отсюда

$$x_C = \frac{0,25x_*^2 - 4}{x_* - 4} \cdot 2 = \frac{x_* + 4}{2}.$$

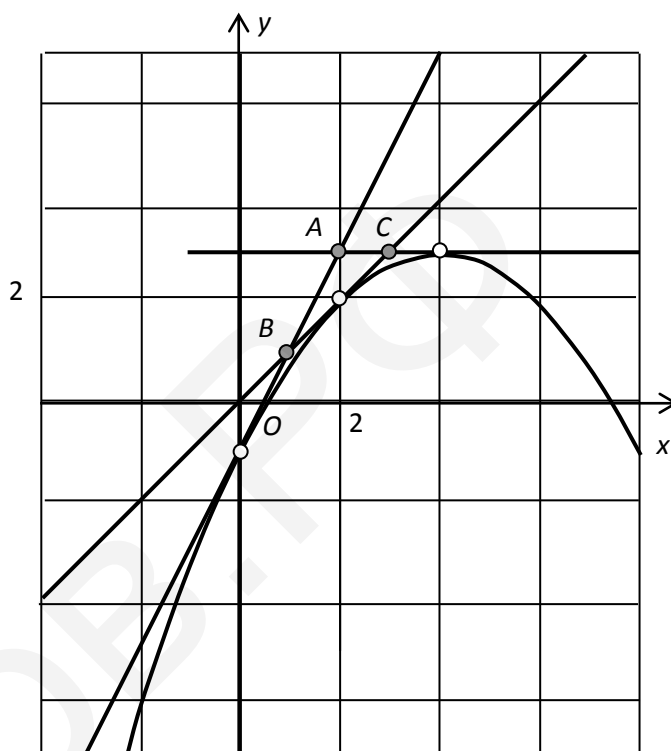
В точке $B(x_B; y_B)$ $\frac{1}{4}x_*^2 - 1 + \frac{4-x_*}{2} \cdot x_B = 2x_B - 1$, $x_B = \frac{x_*}{2}$, $y_B = 2\frac{x_B}{2} - 1 = x_* - 1$.

Площадь треугольника ABC равна

$$S_{\triangle ABC} = 0,5 \cdot (x_C - x_A) \cdot (y_A - y_B) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x_* + 4}{2} - 2 \right) \cdot (3 + 1 - x_*) = \frac{1}{4} (4x_* - x_*^2) = S(x_*).$$

$$S'(x_*) = 0,25(4 - 2x_*) = 0 \text{ при } x_* = 2. \max S_{\triangle ABC} = S(2) = 0,25 \cdot (8 - 4) = 1.$$

Ответ: 1 ед^2 .



9. Укажите все значения a , при которых система уравнений

$$2(x-a)^2 + y = 10 - a, \quad y^2 + \left(\frac{x-10}{|x|-10} \right)^2 = 1 \text{ имеет хотя бы одно решение, и решите ее при}$$

каждом a .

Решение: Преобразуем второе уравнение:

$$y^2 = \frac{x^2 - 20|x| + 100 - x^2 + 20x - 100}{(|x| - 10)^2}; \quad y^2 = -\frac{20(|x| - x)}{(|x| - 10)^2}.$$

При $x < 0$ уравнение решений не имеет, так как правая часть меньше нуля; при $x \geq 0$ оно равносильно системе: $x \geq 0, x \neq 10, y = 0$. Подставляя $y = 0$ в первое уравнение, получаем; $2(x - a)^2 = 10 - a$, или $2x^2 - 4ax + 2a^2 + a - 10 = 0$ (*), у которого $D/4 = 4a^2 - 4a^2 - 2a + 20 = 20 - 2a$.

Корень $x = 10$ квадратного уравнения может получиться, когда $2(10 - a)^2 = 10 - a$, т.е. если 1) $a = 10$, уравнение имеет вид $(x - 10)^2 = 0$, тогда этот корень единственный и заданная система решений не имеет, или 2) $2(10 - a) = 1$, т.е. $a = 19/2$, тогда для x получаем уравнение $2(x - 19/2)^2 = 10 - 19/2$, $x = 19/2 \pm 1/2$, у которого, кроме постороннего корня $x_1 = 10$, есть еще один корень $x_2 = 9$, удовлетворяющий условиям, и заданная система имеет единственное решение $(9; 0)$.

Рассмотрим остальные случаи, когда решение системы будет единственным.

1. $\begin{cases} D/4 = 20 - 2a = 0, \\ a > 0, \quad a \neq 10. \end{cases}$ Система решений не имеет.

2. $2a^2 + a - 10 < 0$, т.е. при $-5/2 < a < 2$ $x = (2a + \sqrt{20 - 2a})/2$.

3. $2a^2 + a - 10 = 0$, отсюда $a = 2$, $2x^2 - 8x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$ удовлетворяют условиям, или $a = -5/2$, $2x^2 + 10x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -5$ – посторонний корень.

Рассмотрим случаи, когда система будет иметь два различных решения. Квадратное уравнение (*) будет иметь два различных неотрицательных корня $x_{1,2} = (2a \pm \sqrt{20 - 2a})/2$, если

$$\begin{cases} 20 - 2a > 0, \\ a > 0, \\ 2a^2 + a - 10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 10, \\ \left[a \leq -5/2, \Leftrightarrow 2 \leq a < 10. \right. \\ \left. a \geq 2 \right] \end{cases}$$

Из этого промежутка надо убрать

рассмотренную ранее точку $a = 19/2$. Объединяя найденные значения a , получим ответ.

Ответ: $a \in [-5/2; 2)$, $x = (2a + \sqrt{20 - 2a})/2$, $y = 0$;

$$a \in [2; 19/2) \cup (19/2; 10), \quad x_{1,2} = (2a \pm \sqrt{20 - 2a})/2, \quad y = 0;$$

$$a = 19/2, \quad x = 9, \quad y = 0.$$

10. Основанием пирамиды $TABC$ служит равносторонний треугольник ABC , а высота пирамиды, равная 2, совпадает с боковым ребром TA . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, параллельной медиане AD боковой грани TAB и проходящей через середину стороны основания AB и центр сферы радиуса $\sqrt{17}$, описанной около пирамиды.

Решение: Центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр основания H ; $OH = AT/2$. Через вершину B проведем прямую $BE \parallel AT$. Через середину стороны AB точку M проведем прямую $MN \parallel AD$, $N \in TB$, $TB = 4NB$, и продолжим ее до пересечения с BE в точке F . Очевидно, MF лежит в секущей плоскости и $BF = AT/2$. Прямая FO лежит в секущей плоскости, она параллельна медиане основания BG и пересекает боковое ребро TC в его середине – точке P . Проведем $MK \parallel BG$, $K \in AC$; MK – линия пересечения секущей плоскости с основанием пирамиды. Значит, $MNPK$ – искомое сечение. Пусть S – точка пересечения прямых MK и NP ; очевидно $S \in (BC)$. Из того, что $\triangle PSG \sim \triangle NSL$ и $NL = 1/2 PG$,

следует $NS = \frac{1}{2} PS$. Кроме того, $MS = \frac{2}{3} KS$. Тогда площадь треугольника MSN

$$S_{\triangle MSN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} S_{\triangle KSP} = \frac{1}{3} S_{\triangle KSP}, \text{ а площадь сечения } S_{MNPK} = \frac{2}{3} S_{\triangle KSP}.$$

Обозначим $AB = a$, $TA = h$, $OA = R$. В $\triangle AOH$ $OH = h/2$, $AH = a/\sqrt{3}$. Так как $OA^2 = OH^2 + AH^2$, $R^2 = (h/2)^2 + (a/\sqrt{3})^2$, $a = \sqrt{3} \sqrt{R^2 - (h/2)^2}$. Заметим, что $PK \perp KS$,

так как $KM \perp AC$, тогда $S_{\triangle KSP} = \frac{1}{2} KS \cdot PK$. Так как $KS = \frac{3}{2} BG$, $KS = \frac{3\sqrt{3}a}{4}$. В

треугольнике PKG $PK = \sqrt{GK^2 + PG^2} = \sqrt{(a/4)^2 + (h/2)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{a^2 + 4h^2}$. Площадь

треугольника $S_{\triangle KSP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}a}{4} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + 4h^2}}{4} = \frac{3\sqrt{3}a\sqrt{a^2 + 4h^2}}{32}$. Площадь сечения

$$S_{MNPK} = \frac{2}{3} S_{\triangle KSP} = \frac{\sqrt{3}a\sqrt{a^2 + 4h^2}}{16}.$$

Ответ: $R = \sqrt{17}, h = 2, a = \sqrt{3(17-1)} = 4\sqrt{3}, S = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \sqrt{16 \cdot 3 + 4 \cdot 4}}{16} = 6.$

