

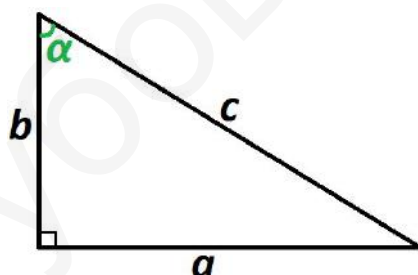
ЗАДАНИЕ 12. ФИГУРЫ НА КВАДРАТНОЙ РЕШЁТКЕ

Расстояние от точки до прямой – это кратчайшее расстояние. Оно равно перпендикуляру (90°) от этой точки до прямой.

Нужно помнить, что рисунок даётся на квадратной клетке, а в квадратной клетке все углы равны 90° . При этом сторона одной клетки равна 1.

Повторение

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

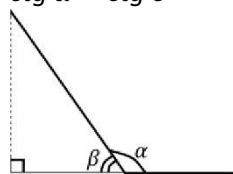


$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}}$
$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}}$	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}}$

!!! Синус, косинус, тангенс, котангенс могут быть только в **прямоугольном** треугольнике.

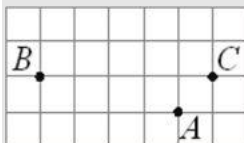
СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС ТУПЫХ УГЛОВ

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sin \beta \\ \cos \alpha &= -\cos \beta \\ \operatorname{tg} \alpha &= -\operatorname{tg} \beta \\ \operatorname{ctg} \alpha &= -\operatorname{ctg} \beta \end{aligned}$$



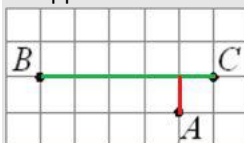
ПРИМЕР №1

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 х 1 отмечены три точки: А, В и С. Найдите расстояние от точки А до прямой ВС.



Расстояние от точки до прямой – это **кратчайшее** расстояние (**перпендикуляр**).

Соединим точки В и С. Опустим перпендикуляр от точки А к прямой ВС.

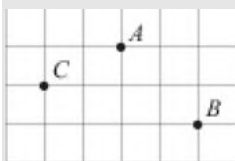


На рисунке искомое расстояние равно одной клетке.

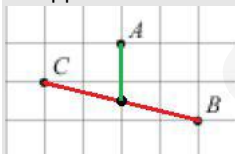
Ответ: 1.

ПРИМЕР №2

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см х 1 см отмечены точки А, В и С. Найдите расстояние от точки А до середины отрезка ВС.



Соединим точки С и В. Отметим середину этого отрезка. Она лежит ровно на половине клетки.

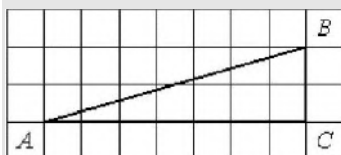


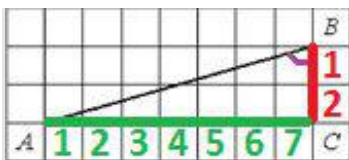
Соединим середину отрезка с точкой А. Расстояние получилось равно 1,5 клетки.

Ответ: 1,5.

ПРИМЕР №3

Найдите тангенс угла В треугольника ABC, изображённого на рисунке.



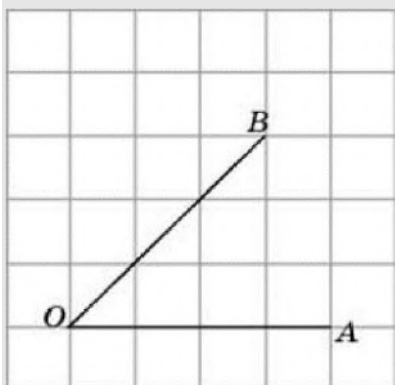


$$\operatorname{tg} B = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{AC}{BC} = \frac{7}{2} = 3,5$$

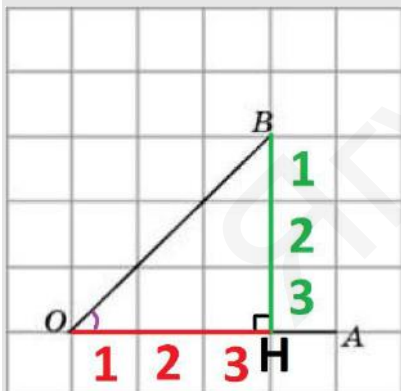
Ответ: 3,5.

ПРИМЕР №4

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 x 1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



!!! Тангенс может быть только в **прямоугольном** треугольнике. Поэтому нельзя соединять точку B с точкой A. Нужно провести перпендикуляр из точки B на прямую OA.

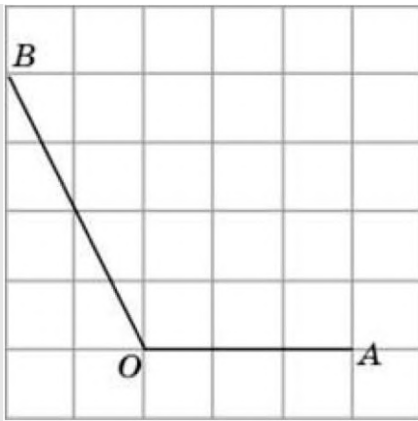


$$\operatorname{tg} O = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{BH}{OH} = \frac{3}{3} = 1$$

Ответ: 1.

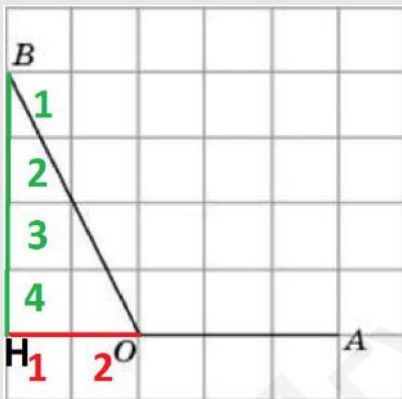
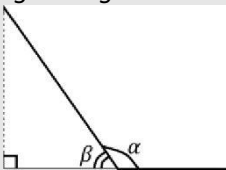
ПРИМЕР №5

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 x 1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



Угол тупой, поэтому тангенс нужно искать по **смежному** углу (там, где угол **острый**). При этом тангенс будет **отрицательным**.

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$$



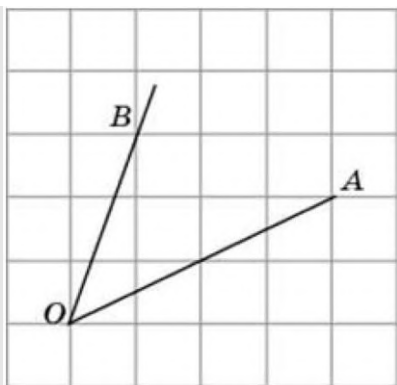
$$\operatorname{tg} BOH = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{BH}{OH} = \frac{4}{2} = 2$$

Но так как исходный угол тупой, не забываем поставить минус: $\operatorname{tg} O = -2$.

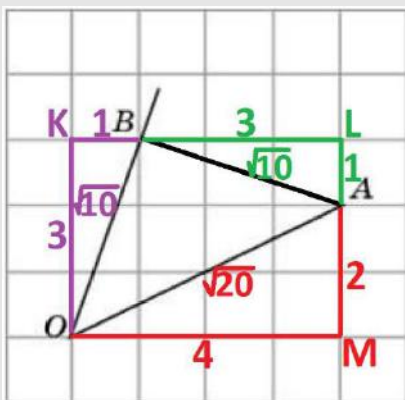
Ответ: -2.

ПРИМЕР №6

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 x 1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



Соединим точки А и В. У нас получился треугольник. Теперь нужно убедиться, что он прямоугольный. Для этого найдём каждую сторону треугольника по **теореме Пифагора**.



В треугольнике ОКВ:

$$\begin{aligned} OB^2 &= OK^2 + KB^2 \\ OB^2 &= 3^2 + 1^2 \\ OB^2 &= 10 \\ OB &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

В треугольнике ВЛА:

$$\begin{aligned} BA^2 &= BL^2 + LA^2 \\ BA^2 &= 3^2 + 1^2 \\ BA^2 &= 10 \\ BA &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

В треугольнике ОАМ:

$$\begin{aligned} OA^2 &= OM^2 + AM^2 \\ OA^2 &= 4^2 + 2^2 \\ OA^2 &= 20 \\ OA &= \sqrt{20} \end{aligned}$$

Проверка, является ли треугольник ОВА прямоугольным:

$$\begin{aligned} OA^2 &= OB^2 + BA^2 \\ (\sqrt{20})^2 &= (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 \\ 20 &= 10 + 10 \\ 20 &= 20 \end{aligned}$$

Раз теорема Пифагора в этом треугольнике верна, то этот треугольник прямоугольный.

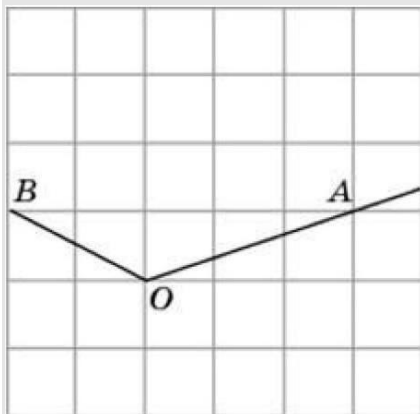
Поиск тангенса угла ВОА:

$$\operatorname{tg} BOA = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{BA}{BO} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1$$

Ответ: 1.

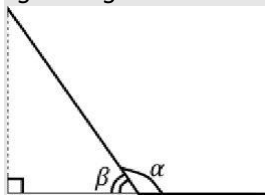
ПРИМЕР №7

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 x 1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.

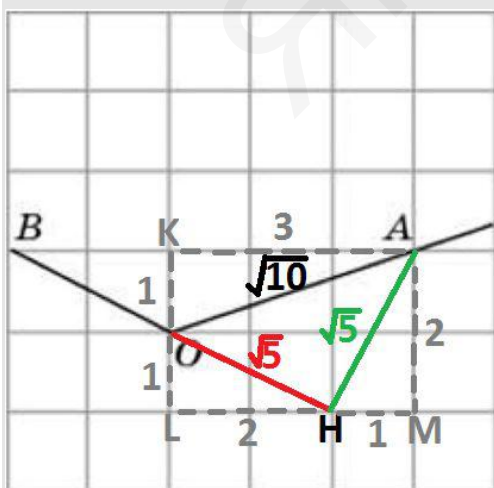


Угол тупой, поэтому тангенс нужно искать по **смежному** углу (там, где угол **острый**). При этом тангенс будет **отрицательным**.

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta$$



Построим треугольник АНО. Для этого продолжим прямую ВО и проведём к ней перпендикуляр из точки А.



Убедимся, что полученный треугольник прямоугольный. Для этого найдём каждую сторону треугольника по **теореме Пифагора**.

В треугольнике ОКА:

$$OA^2 = OK^2 + KA^2$$

$$OA^2 = 1^2 + 3^2$$

$$OA^2 = 10$$

$$OA = \sqrt{10}$$

В треугольнике OLN:

$$OH^2 = OL^2 + LH^2$$

$$OH^2 = 1^2 + 2^2$$

$$OH^2 = 5$$

$$OH = \sqrt{5}$$

В треугольнике HAM:

$$HA^2 = AM^2 + HM^2$$

$$HA^2 = 2^2 + 1^2$$

$$HA^2 = 5$$

$$HA = \sqrt{5}$$

Проверка, является ли треугольник OBA прямоугольным:

$$OA^2 = OH^2 + AH^2$$

$$(\sqrt{10})^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2$$

$$10 = 5 + 5$$

$$10 = 10$$

Раз теорема Пифагора в этом треугольнике верна, то этот треугольник прямоугольный.

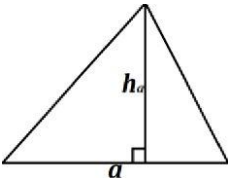
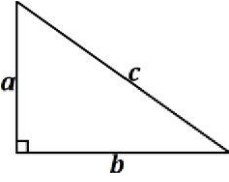
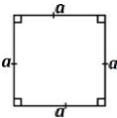
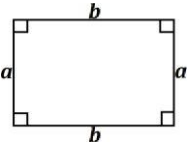
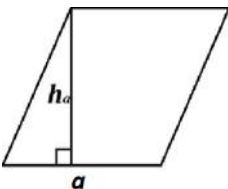
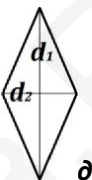
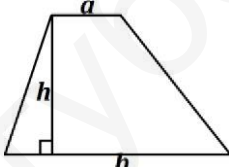
Поиск тангенса угла AOH:

$$tg AOH = \frac{\text{противолежающий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{AH}{OH} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$$

Но так как исходный угол тупой, не забываем поставить минус: $tg O = -1$.

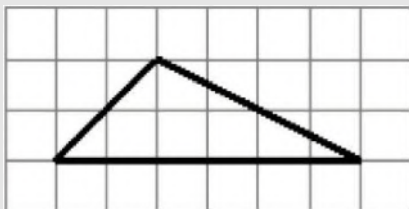
Ответ: -1.

ПЛОЩАДИ ФИГУР

ТРЕУГОЛЬНИК $S = \frac{1}{2} a h_a \vartheta$ 	ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК $S = \frac{ab}{2} \vartheta$ 
КВАДРАТ $S = a^2 \vartheta$ 	ПРЯМОУГОЛЬНИК $S = ab \vartheta$ 
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ $S = ah_a \vartheta$ 	РОМБ $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \vartheta$ 
ТРАПЕЦИЯ $S = \frac{a + b}{2} \cdot h \vartheta$ 	

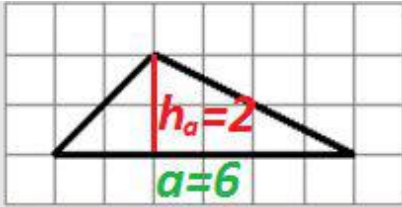
ПРИМЕР №1

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 x 1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

Проведём высоту.

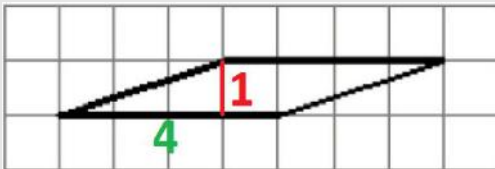
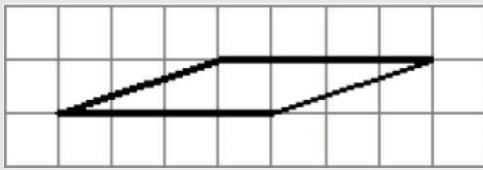


$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6$$

Ответ: 6.

ПРИМЕР №2

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 x 1 изображён параллелограмм. Найдите его площадь.

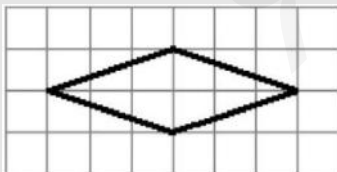


$$S = ah_a = 4 \cdot 1 = 4$$

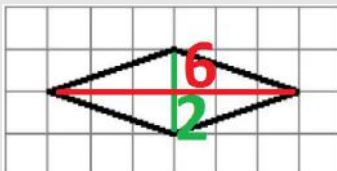
Ответ: 4.

ПРИМЕР №3

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 x 1 изображён ромб. Найдите длину его большей диагонали.



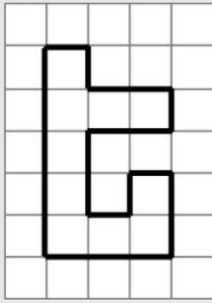
У ромба большая диагональ равна 6 клеток, а меньшая – 2.



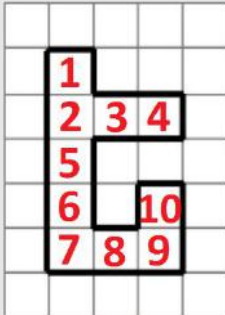
Ответ: 6.

ПРИМЕР №4

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 x 1 изображена фигура. Найдите её площадь.



Площадь одного квадрата равна 1. Подсчитаем количество квадратов.

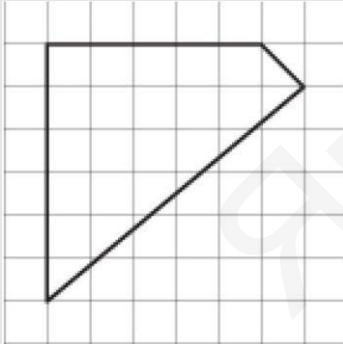


Всего 10 квадратов с площадью 1. Значит, общая площадь равна 10.

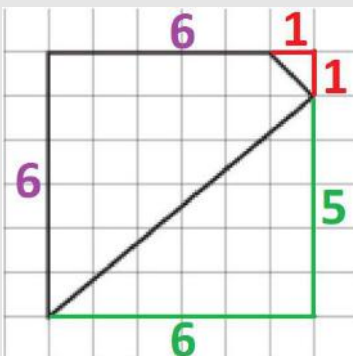
Ответ: 10.

ПРИМЕР №5

Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке.



Дорисуем фигуру до квадрата. У квадрата сторона равна 6. Значит, площадь всего квадрата равна $6 \cdot 6 = 36$.



Найдём площадь образовавшихся «лишних» треугольников. По формуле площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

Площадь мелкого красного треугольника равна $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 0,5$.

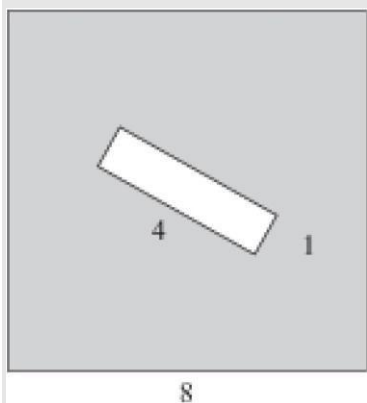
Площадь большого зелёного треугольника равна $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15$.

Теперь вычтем из площади всего квадрата площадь «лишних треугольников»: $36 - 0,5 - 15 = 20,5$.

Ответ: 20,5.

ПРИМЕР №6

Из квадрата вырезали прямоугольник (см. рисунок). Найдите площадь получившейся фигуры.



На рисунке показано, что сторона квадрата равна 8. Значит, **площадь квадрата** равна:

$$S_1 = a^2 = 8^2 = 64$$

Также нам даны стороны прямоугольника. Найдём **площадь прямоугольника**:

$$S_2 = ab = 4 \cdot 1 = 4$$

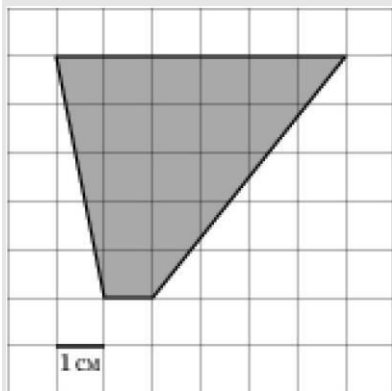
Из всего квадрата убрали прямоугольник. Значит, **площадь оставшейся фигуры** равна:

$$S = S_1 - S_2 = 64 - 4 = 60$$

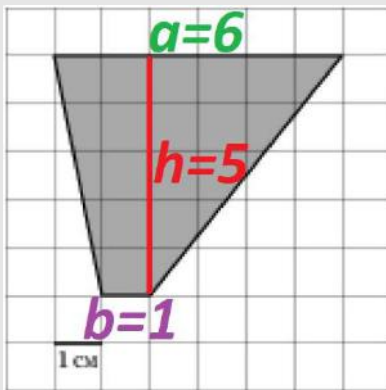
Ответ: 60.

ПРИМЕР №7

Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см x 1 см (см. рис.).



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

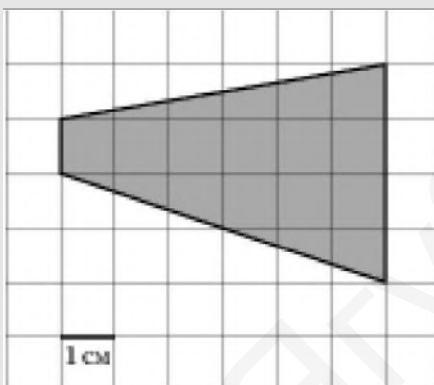


$$S = \frac{6+1}{2} \cdot 5 = 17,5$$

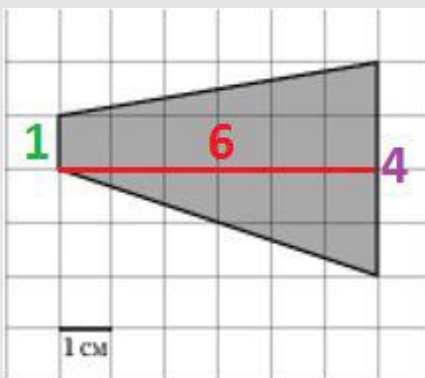
Ответ: 17,5.

ПРИМЕР №8

Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см x 1 см (см. рис.).



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

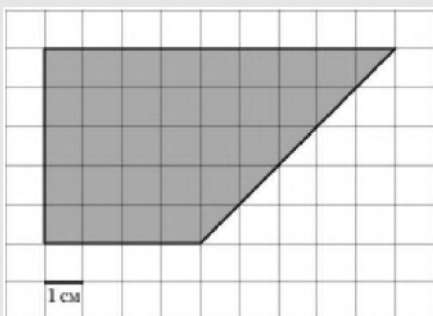


$$S = \frac{1+4}{2} \cdot 6 = 15$$

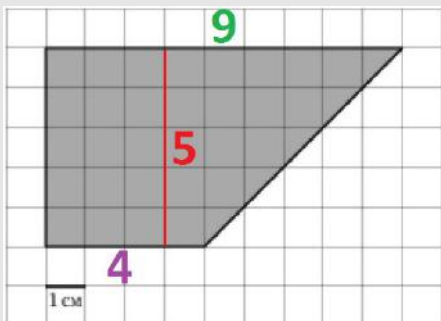
Ответ: 15.

ПРИМЕР №9

Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см х 1 см (см. рис.).



$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

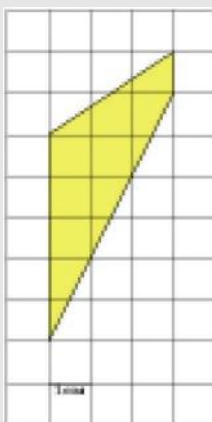


$$S = \frac{9 + 4}{2} \cdot 5 = 32,5$$

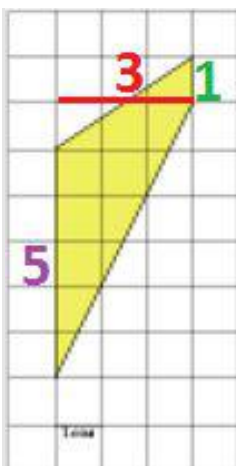
Ответ: 32,5.

ПРИМЕР №10

Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см х 1 см (см. рис.).



$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

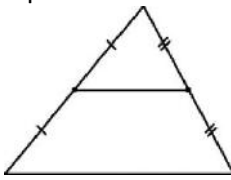
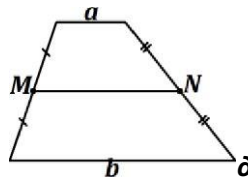


$$S = \frac{1+5}{2} \cdot 3 = 9$$

Ответ: 9.

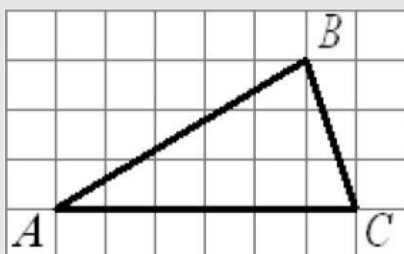
Ягубов.РФ

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ

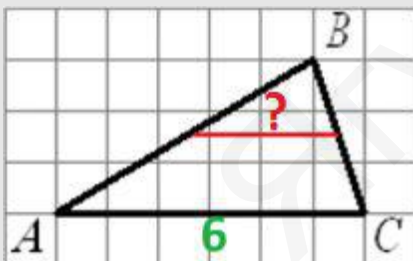
СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА	СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ
• лежит на серединах сторон • параллельна основанию • равна половине основания 	$MN = \frac{a + b}{2}d$  • лежит на серединах сторон d • параллельна основаниям d • равна полусумме оснований d

ПРИМЕР №1

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 x 1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AC.



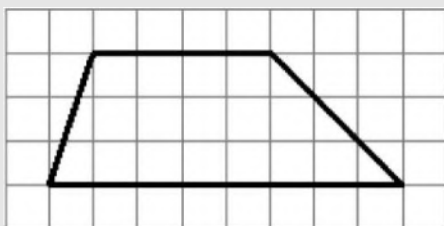
Средняя линия треугольника равна половине основания. Основание равно 6. Значит, средняя линия равна $6 : 2 = 3$.

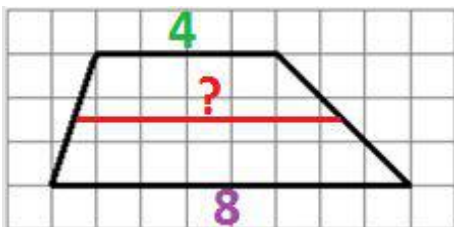


Ответ: 3.

ПРИМЕР №2

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 x 1 изображена трапеция. Найдите длину её средней линии.





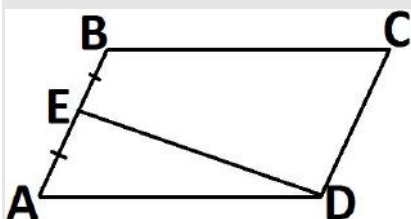
Средняя линия трапеции равна полусумме оснований:

$$MN = \frac{a + b}{2} = \frac{4 + 8}{2} = 6$$

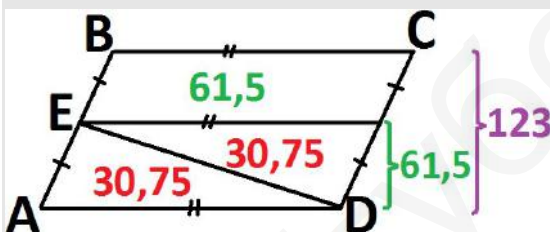
Ответ: 6.

ПРИМЕР №3

Площадь параллелограмма ABCD равна 123. Точка E – середина стороны AB. Найдите площадь трапеции EBCD.



Проведём среднюю линию. Она делит весь параллелограмм на два равных параллелограмма, площадь каждого из которых равна $123 : 2 = 61,5$.



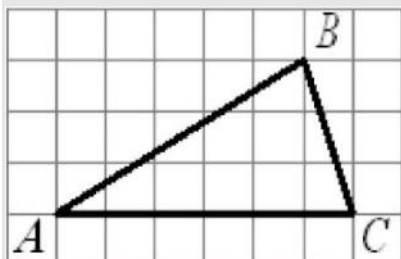
Нижний параллелограмм делится на два равных треугольника (признак равенства треугольников по трём сторонам). У каждого из треугольников площадь равна $61,5 : 2 = 30,75$.

На рисунке видно, что, чтобы найти площадь трапеции EBCD, нужно сложить 61,5 и 30,75. Получится 92,25.

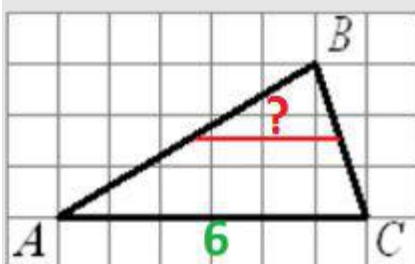
Ответ: 92,25.

ПРИМЕР №4

На клетчатой бумаге с размером клетки 1 x 1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его средней линии, параллельной стороне AC.



Средняя линия треугольника равна половине основания. Основание равно 6. Значит, средняя линия равна $6 : 2 = 3$.



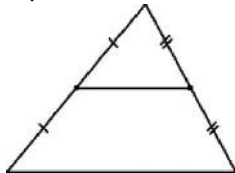
Ответ: 3.

Ягубов.РФ

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ. КОЭФФИЦИЕНТ ПОДОБИЯ

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

- лежит на серединах сторон
- параллельна основанию
- равна половине основания



ОТНОШЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

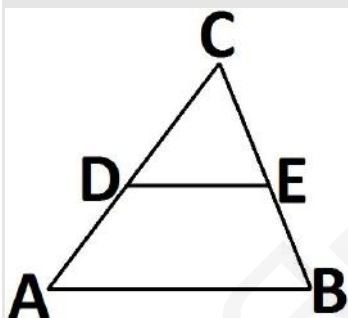
$$\frac{S_{\text{большого треугольника}}}{S_{\text{меньшего треугольника}}} = k^2$$

ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

1. По двум углам.
2. По двум пропорциональным сторонам и углу между ними.
3. По трём пропорциональным сторонам.

ПРИМЕР №1

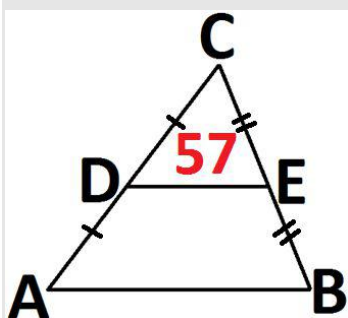
В треугольнике ABC DE – средняя линия треугольника. Площадь треугольника CDE равна 57. Найдите площадь треугольника ABC.



Треугольник CDE подобен треугольнику ABC.

Доказательство подобия по **двум** углам:

- 1) У обоих треугольников угол C общий.
- 2) Раз средняя линия DE параллельна основанию AB, то угол CDE равен углу CAB (как соответственные углы).



Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CDE}} = k^2$$

Коэффициент подобия показывает, во сколько раз у большого треугольника всё больше, чем у маленького. Например:

- 1) Во сколько раз AC больше DC? В 2 раза.
- 2) Во сколько раз BC больше EC? В 2 раза.
- 3) Во сколько раз AB больше DE? В 2 раза (как средняя линия).

Получается, что коэффициент подобия $k = 2$.

Подставим имеющиеся значения в формулу.

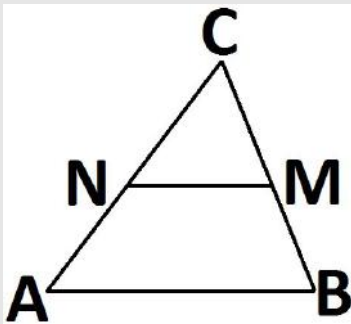
$$\frac{S_{ABC}}{57} = 2^2$$

$$S_{ABC} = 57 \cdot 4 = 228$$

Ответ: 228.

ПРИМЕР №2

В треугольнике отмечены середины M и N сторон BC и AC соответственно. Площадь треугольника CNM равна 57. Найдите площадь четырёхугольника ABMN.

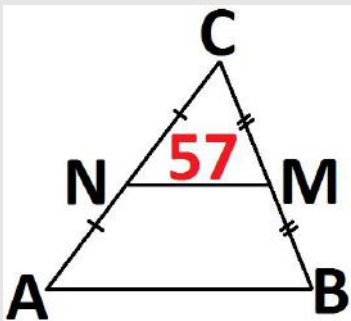


Раз M и N – середины боковых сторон треугольника, то NM – средняя линия треугольника.

Треугольник CNM подобен треугольнику ABC.

Доказательство подобия по **двум** углам:

- 1) У обоих треугольников угол C общий.
- 2) Раз средняя линия DE параллельна основанию AC, то угол CNM равен углу CAB (как соответственные углы).



Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{CNM}} = k^2$$

Коэффициент подобия показывает, во сколько раз у большего треугольника всё больше, чем у маленького. Например:

- 1) Во сколько раз AC больше NC? В 2 раза.
- 2) Во сколько раз BC больше MC? В 2 раза.
- 3) Во сколько раз AB больше NM? В 2 раза (как средняя линия).

Получается, что коэффициент подобия $k = 2$.

Подставим имеющиеся значения в формулу.

$$\frac{S_{ABC}}{57} = 2^2$$

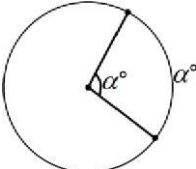
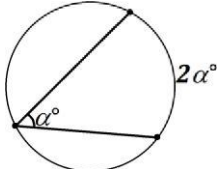
$$S_{ABC} = 57 \cdot 4 = 228$$

Если вычесть из площади большого треугольника ABC площадь маленького CNM, то останется площадь четырёхугольника ABMN. Её нам и нужно найти.

$$S_{ABMN} = S_{ABC} - S_{CNM} = 228 - 57 = 171$$

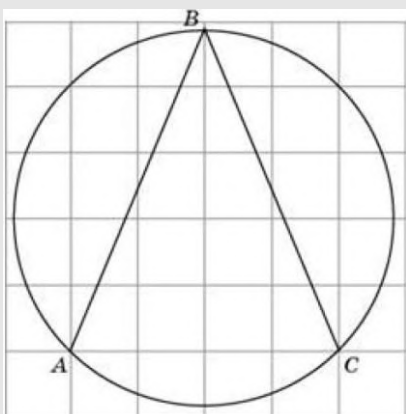
Ответ: 171.

ОКРУЖНОСТЬ

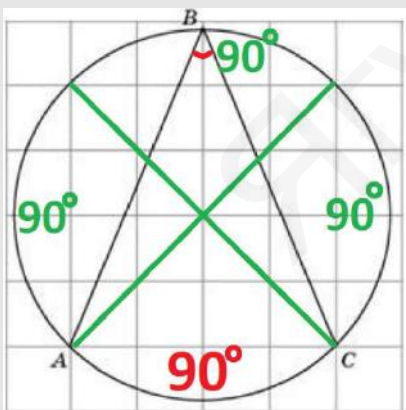
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГОЛ	ВПИСАННЫЙ УГОЛ
Центральный угол равен дуге , на которую он опирается (в градусах)	Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается (в градусах)
	

ПРИМЕР №1

Найдите угол ABC.



Заметим, что вся окружность равна 360° , а дуга AC составляет его четвертую часть.



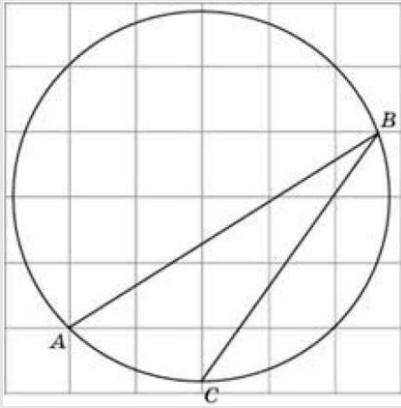
Если мы поделим всю окружность на четыре части, то каждая из четырёх дуг будет равна $360^\circ : 4 = 90^\circ$.

Однако угол ABC – **вписанный**, поэтому он равен **половине** дуги, на которую опирается (AC).
 $\angle ABC = 90^\circ : 2 = 45^\circ$

Ответ: 45.

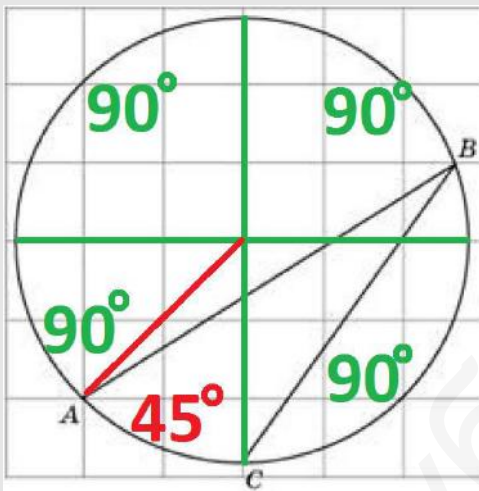
ПРИМЕР №2

Найдите градусную меру дуги AC окружности, на которую опирается угол ABC.



Стоит отметить, что угол ABC в этой задаче нам не нужен. Нам нужна дуга AC.

Вся окружность равна 360° . Если мы её поделим на 4 части, то получим четыре дуги по 90° .



Поделим четверть ещё напополам и получим градусную меру дуги AC: $90^\circ : 2 = 45^\circ$.

Ответ: 45