

07. Производная и первообразная

Часть 1. ФИПИ (www.fipi.ru)

I) Физический смысл производной

Задание 1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 12t^2 + 4t + 27$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 2$ с.

Задание 2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 13t^2 - 2t + 44$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 2$ с.*

Задание 3. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 45t + 130$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 20 м/с?

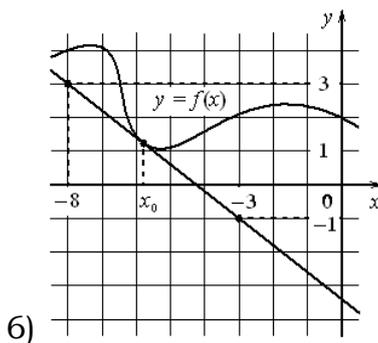
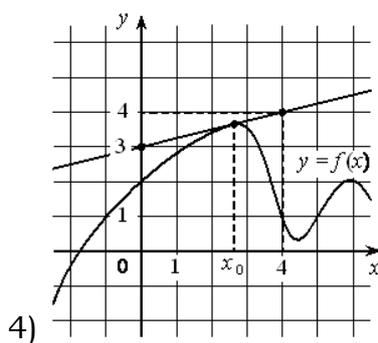
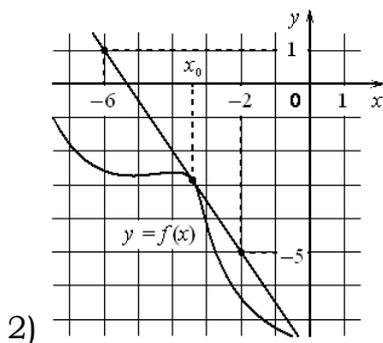
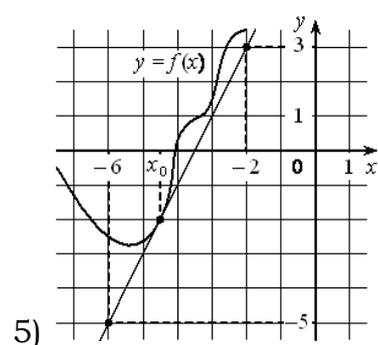
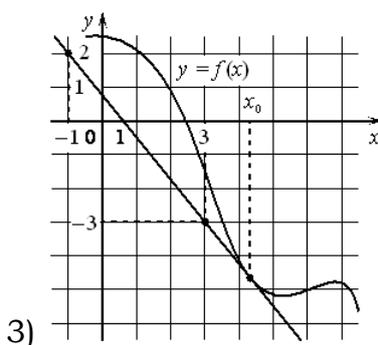
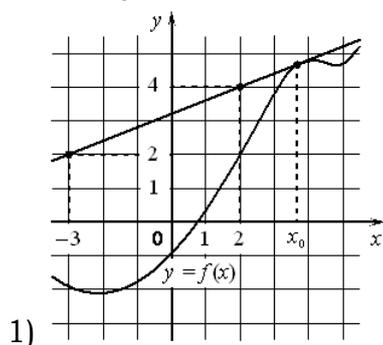
Задание 4. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{6}t^3 + t^2 - 8t + 180$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 40 м/с?

Задание 5. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t - 190$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 48 м/с?

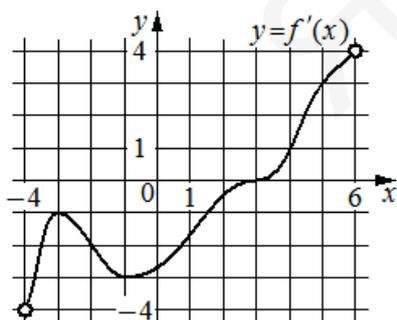
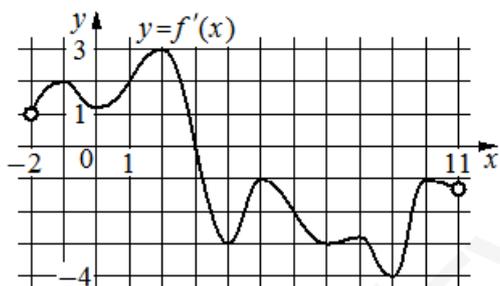
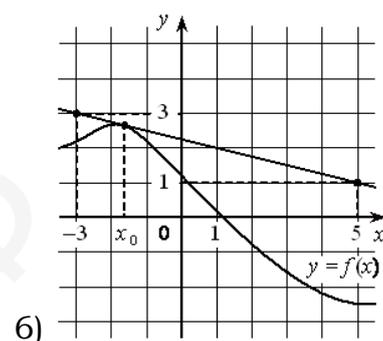
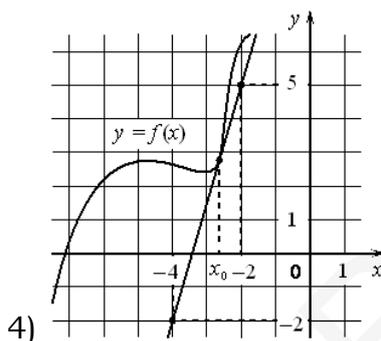
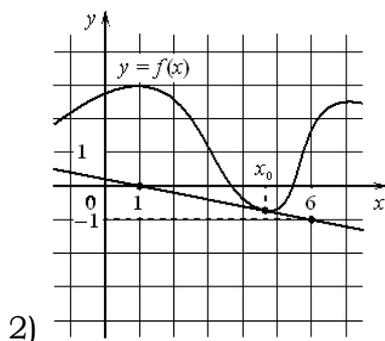
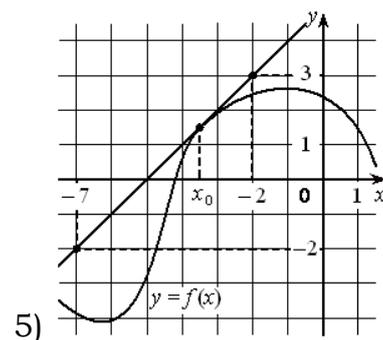
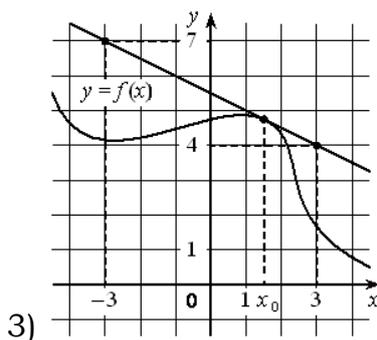
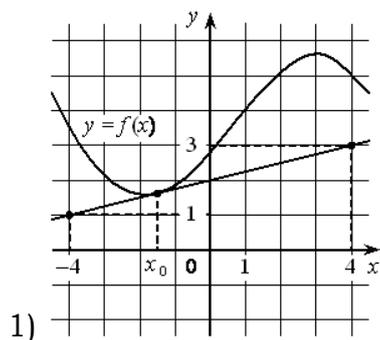
Задание 6. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{6}t^3 - 2t^2 + 6t + 250$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с момента начала движения. В какой момент времени её скорость была равна 96 м/с?

II) Геометрический смысл производной, касательная

Задание 7. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

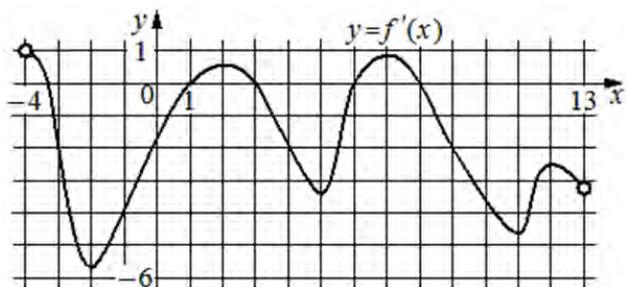


Задание 8. На рисунке изображены график дифференцируемой функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке M .



Задание 9. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 11)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

Задание 10. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 6)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x$ или совпадает с ней.

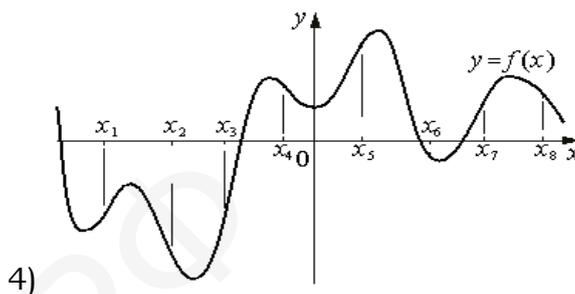
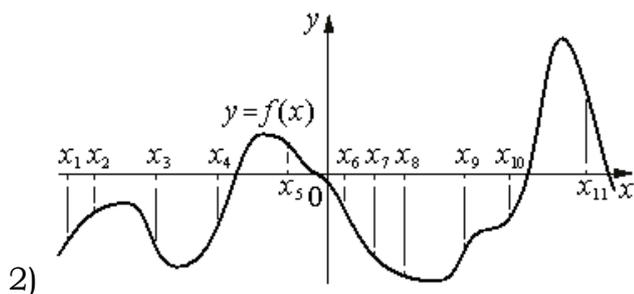
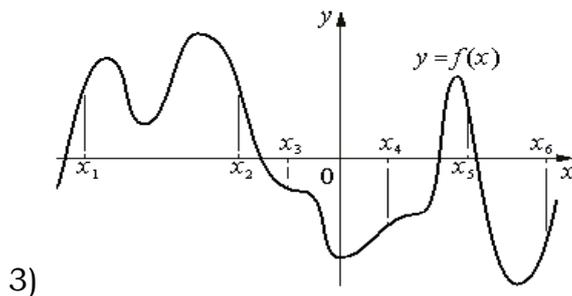
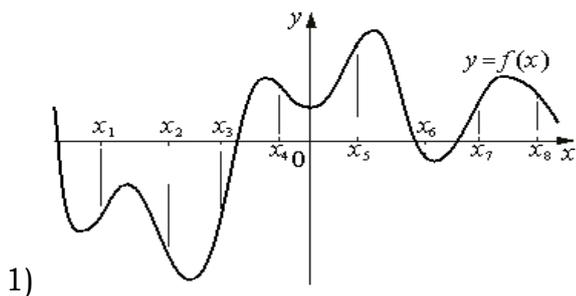


Задание 11. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$...

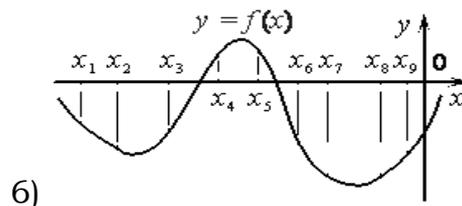
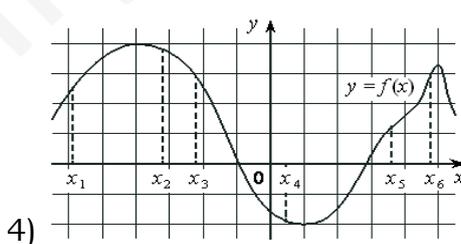
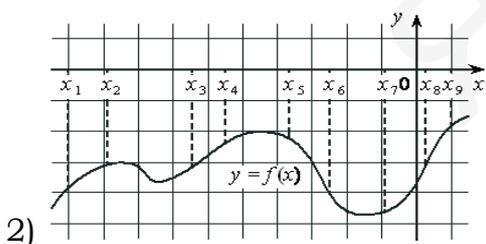
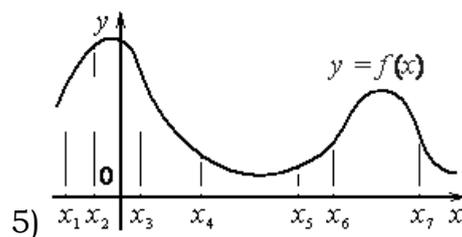
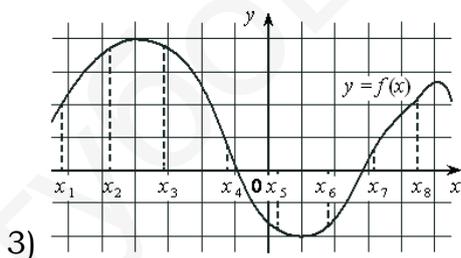
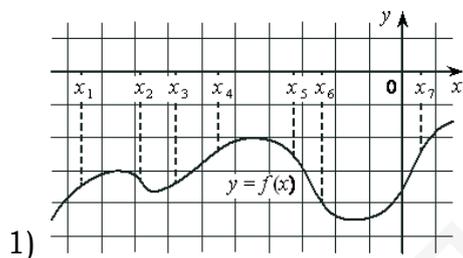
- а) параллельна прямой $y = 14$;
- б) параллельна прямой $y = -2x - 10$ или совпадает с ней.

III) Исследование функций (производная)

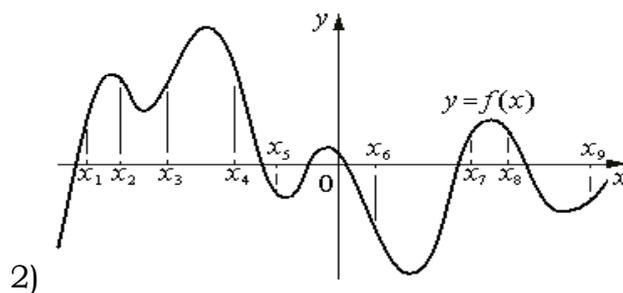
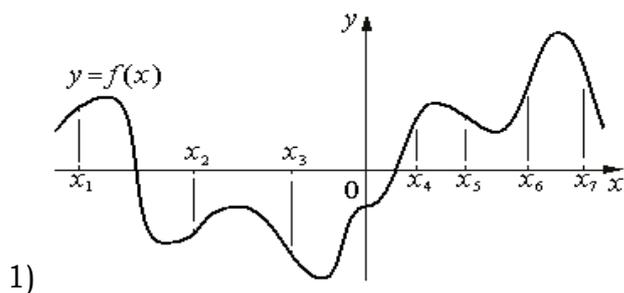
Задание 12. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



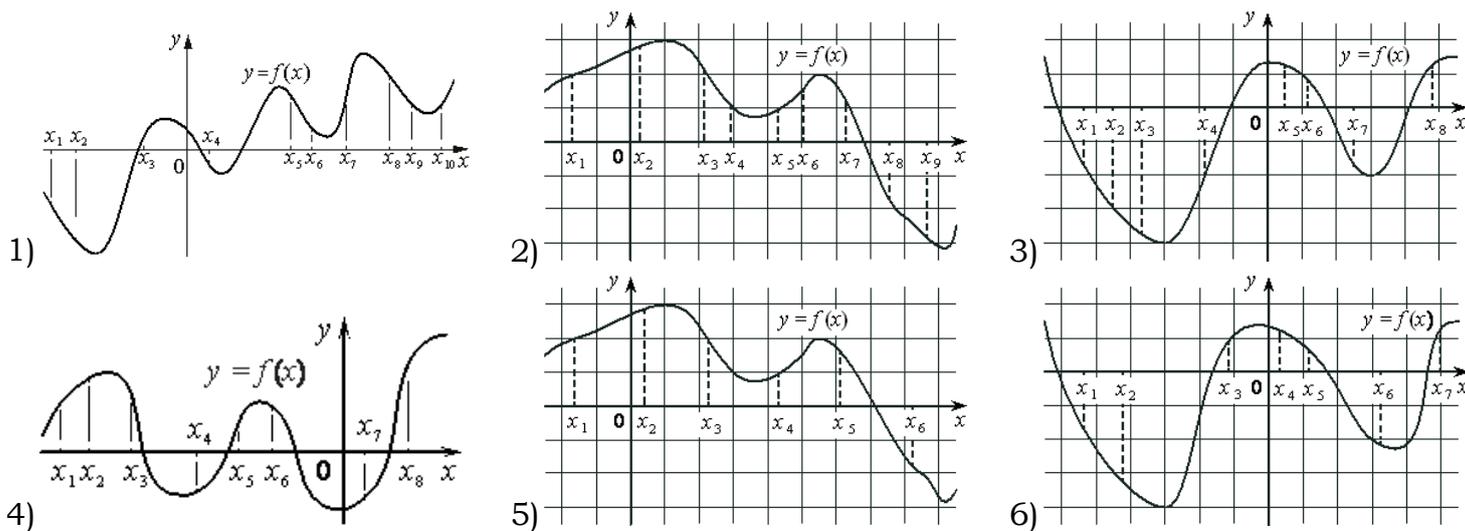
Задание 13. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



Задание 14. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?



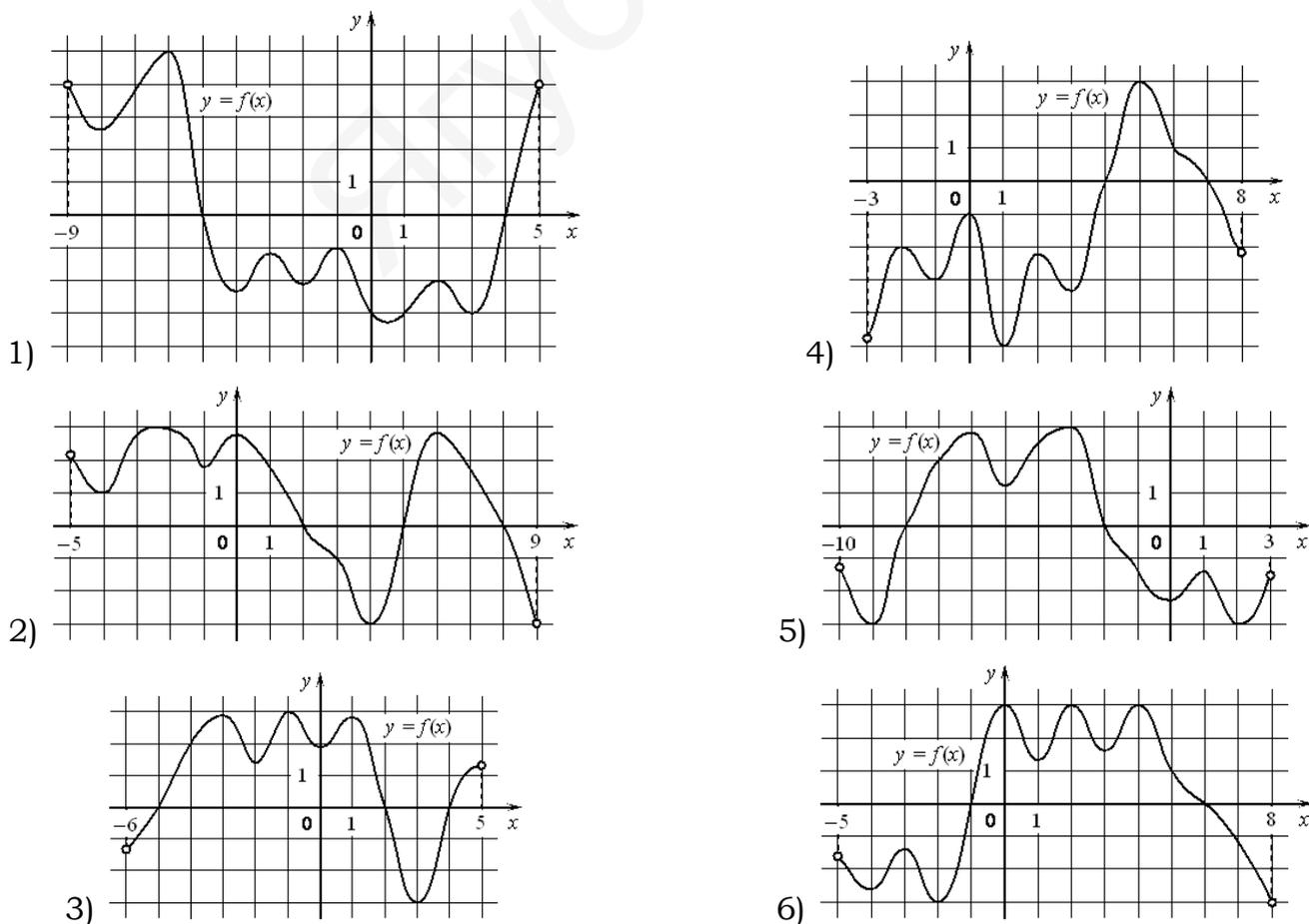
Задание 15. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

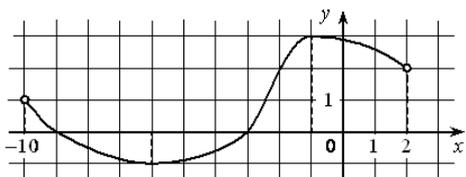


Задание 16. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции...

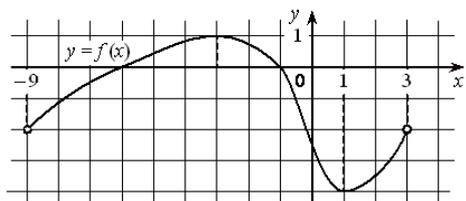
- 1) положительна;
- 2) отрицательна?

Задание 17. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(a; b)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

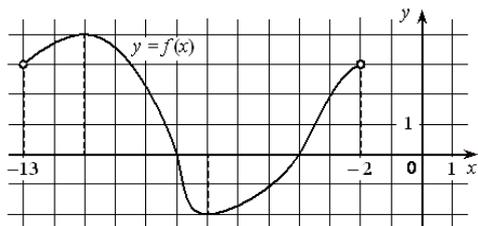




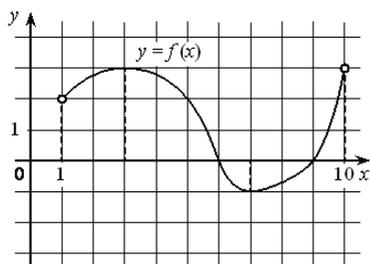
Задание 18. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-10; 2)$. Найдите точку из отрезка $[-9; -2]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



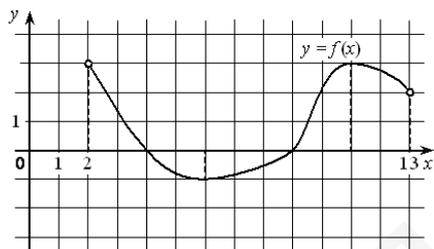
Задание 19. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 3)$. Найдите точку из отрезка $[-8; 0]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



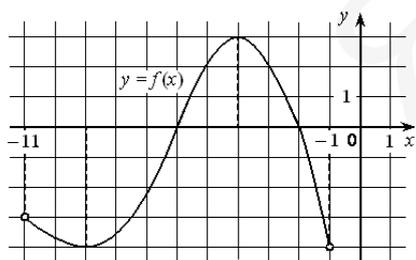
Задание 20. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-13; -2)$. Найдите точку из отрезка $[-10; -3]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.



Задание 21. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(1; 10)$. Найдите точку из отрезка $[2; 6]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.

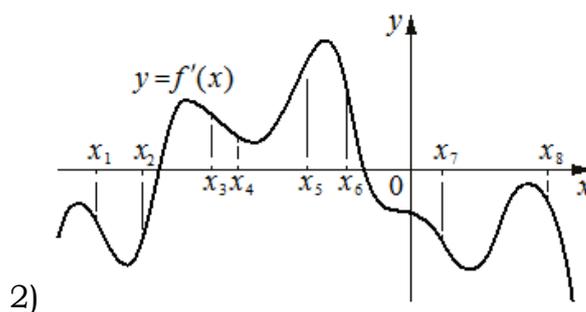
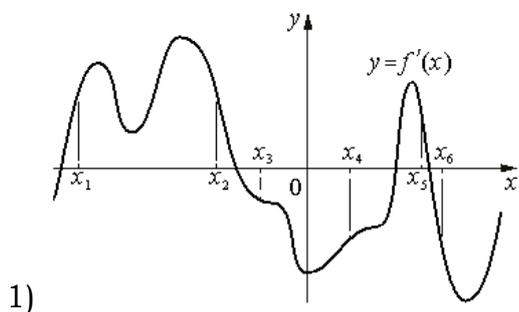


Задание 22. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(2; 13)$. Найдите точку из отрезка $[7; 12]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.

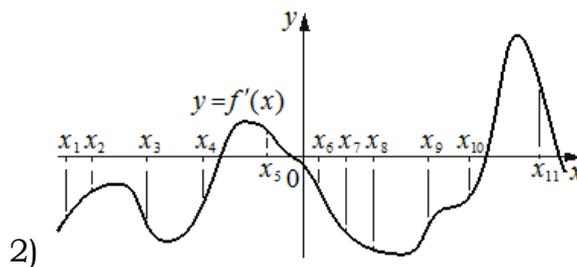
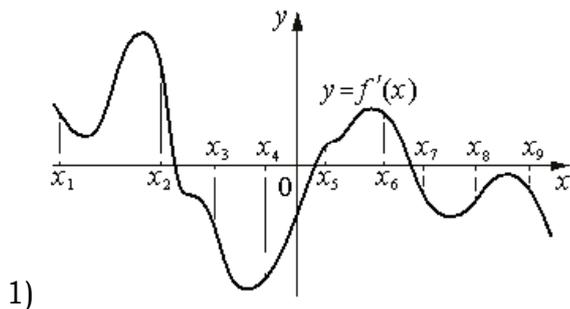


Задание 23. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-11; -1)$. Найдите точку из отрезка $[-7; -2]$, в которой производная функции $f(x)$ равна 0.

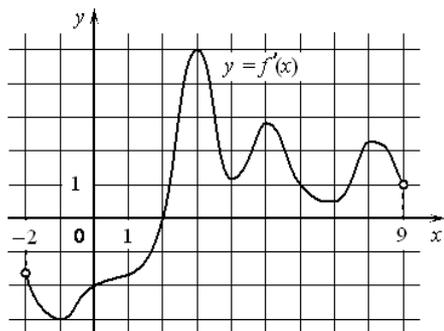
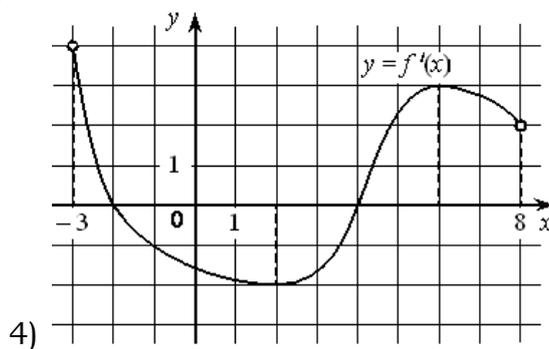
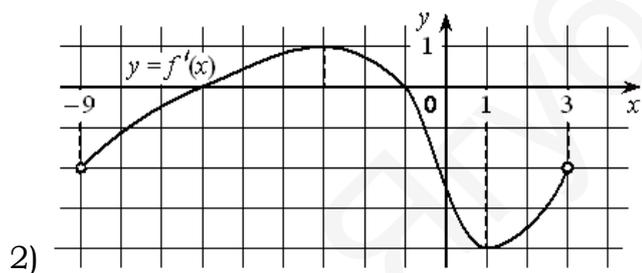
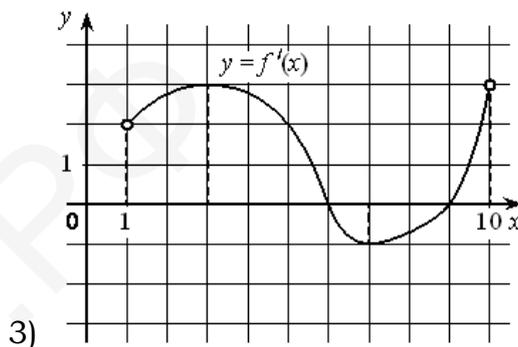
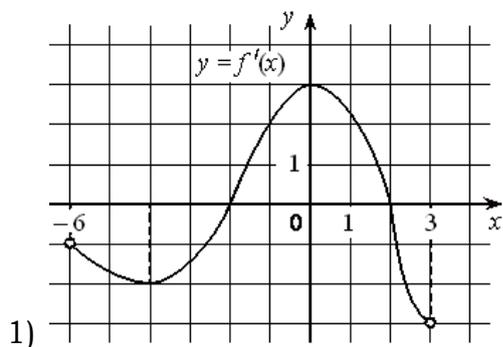
Задание 24. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



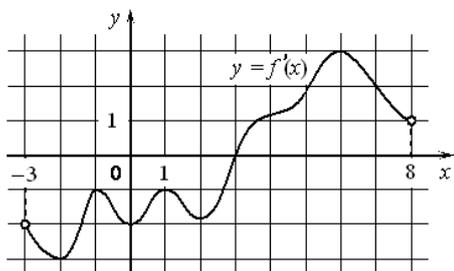
Задание 25. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены n точек: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



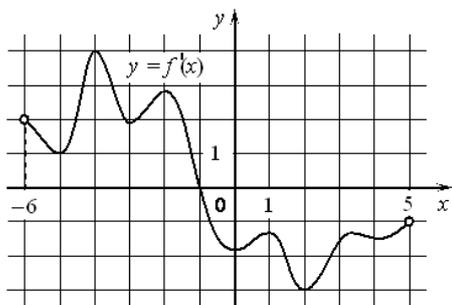
Задание 26. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(a; b)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



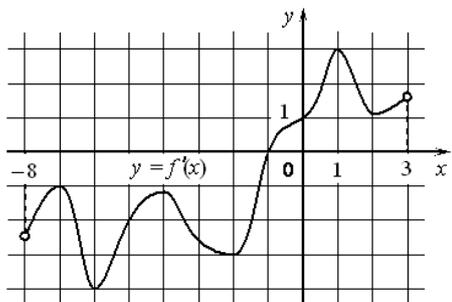
Задание 27. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$. В какой точке отрезка $[2; 8]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Задание 28. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

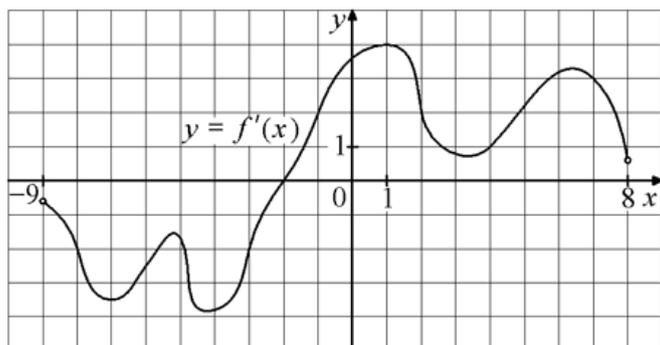
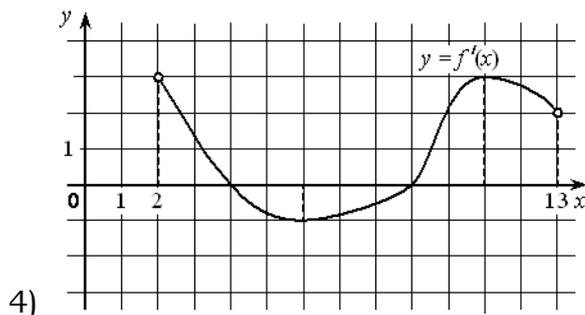
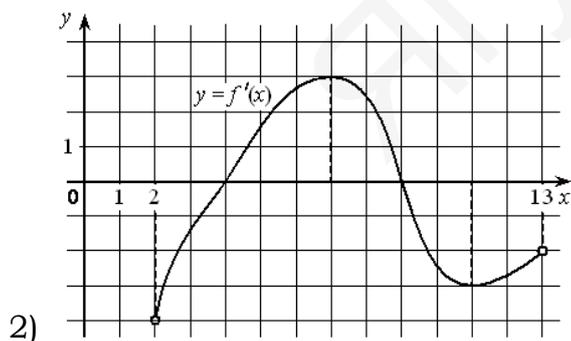
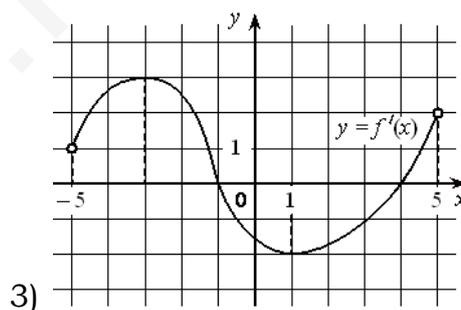
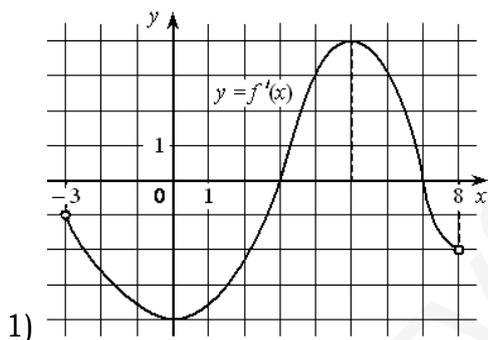


Задание 29. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-5; -1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

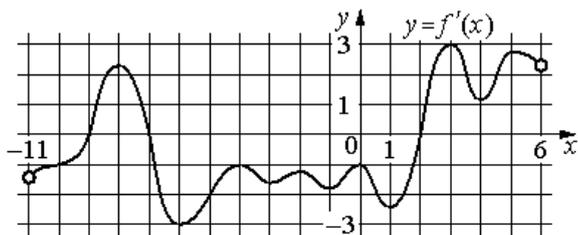


Задание 30. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-6; -1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

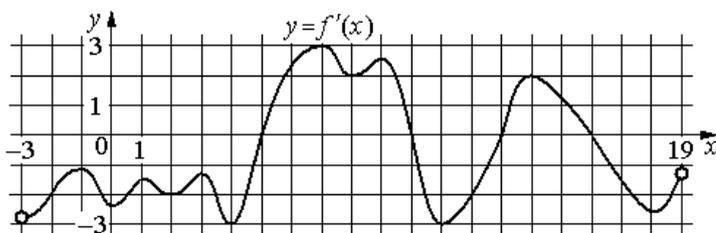
Задание 31. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(a; b)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



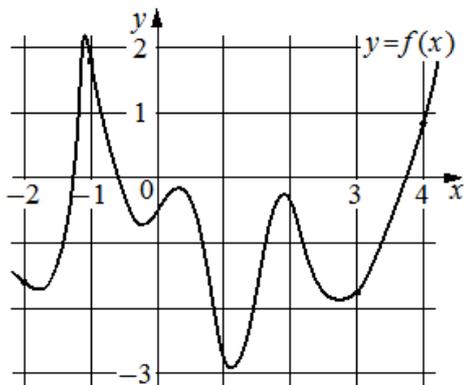
Задание 32. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 3]$.



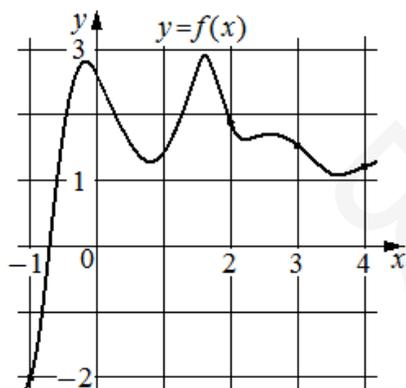
Задание 33. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6; 4]$.



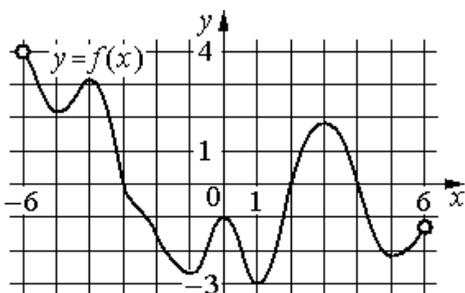
Задание 34. На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 19)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 15]$.



Задание 35. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-2, -1, 3, 4$. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Задание 36. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-1, 2, 3, 4$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

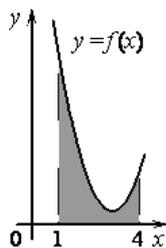


Задание 37. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-6; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[-4, 5; 2, 5]$.

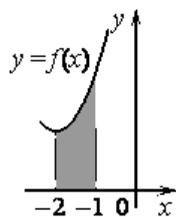
IV) Первообразная

Задание 38. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры:

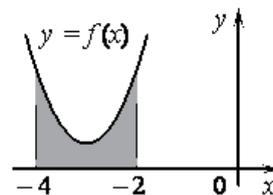
1) $F(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 14x - 10$



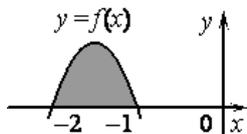
3) $F(x) = \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{15}{2}x + \frac{7}{2}$



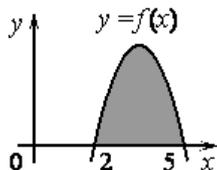
5) $F(x) = \frac{1}{2}x^3 + 9x^2 + 14x + 8$



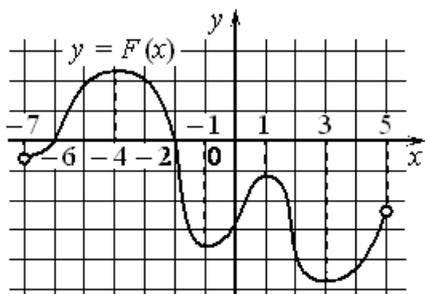
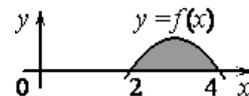
2) $F(x) = -x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 6x + 2$



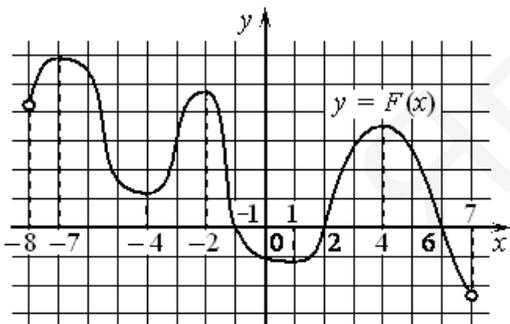
4) $F(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{21}{4}x^2 - 15x - 4$



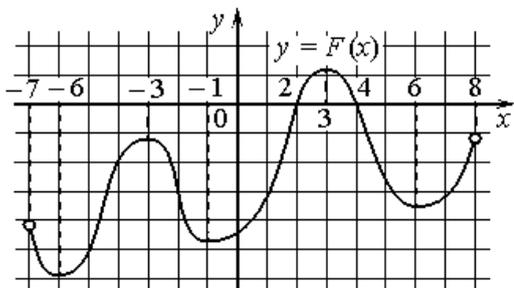
6) $F(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 6x + 5$



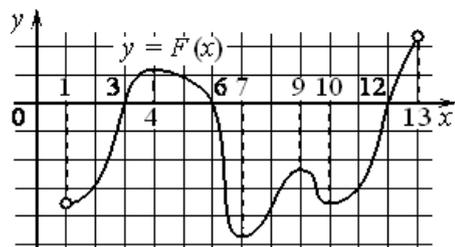
Задание 39. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 5)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5; 2]$.



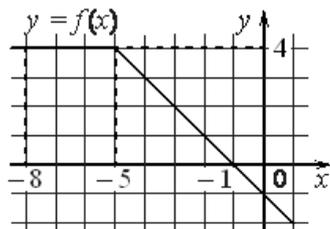
Задание 40. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-5; 5]$.



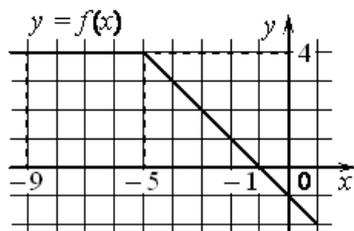
Задание 41. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(-7; 8)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[0; 5]$.



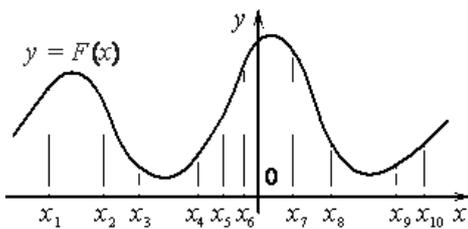
Задание 42. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале $(1; 13)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[2; 11]$.



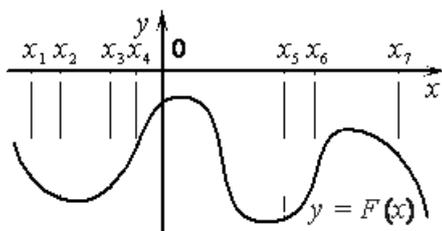
Задание 43. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(-1) - F(-8)$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.



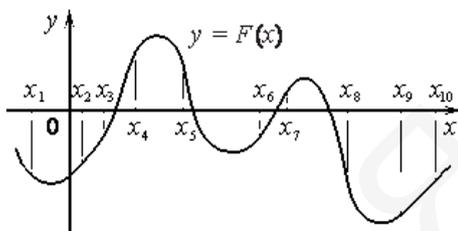
Задание 44. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(-1) - F(-9)$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.



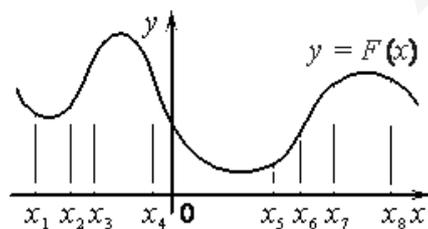
Задание 45. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены n точек на оси абсцисс: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



Задание 46. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены n точек на оси абсцисс: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



Задание 47. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены n точек на оси абсцисс: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?



Задание 48. На рисунке изображён график $y = F(x)$ одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ и отмечены n точек на оси абсцисс: $x = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?