Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Математический кружок

(8–9 класс)

Составители: Е. А. Асташов, Д. А. Удимов

Первое полугодие

Москва, 2015

Математический кружок (8–9 класс). Первое полугодие / Универсальная методическая разработка по решению нестандартных задач для элективных курсов в средних общеобразовательных организациях // Сост. Е. А. Асташов, Д. А. Удимов. — М.: МГУ, 2015.

Брошюра разработана в рамках совместной программы «Развитие интеллектуальных способностей математически одарённых школьников и повышение качества математического образования» МГУ и Департамента образования города Москвы.

Содержание

Общие указания по проведению кружка

Первое полугодие методической разработки состоит из пятнадцати листочков с задачами. Методическую разработку сопровождает комплект листочков для распечатывания и выдачи участникам кружка. В самой же брошюре приведены ответы и решения к задачам, указания, советы, идеи и примеры разного рода, которые могут оказаться полезными при использовании этой разработки. Конечно, мы не предлагаем буквально следовать всем этим советам!

На первых двух занятиях кружка руководителю важно примерно понять общий уровень участников и степень их знакомства с отдельными темами. Для этого на «нулевом» занятии кружка мы предлагаем провести письменную работу с задачами по разным темам, которую затем надо проверить (ниже даются критерии проверки по предложенным задачам) и подвести статистику решения задач — не только по каждому ученику, но и по каждой задаче. На первом занятии участникам выдаются проверенные работы, проводится разбор задач и типичных ошибок при решении. Затем школьникам выдаётся ещё один листочек с задачами по разным темам («Знакомство»), и занятие проводится уже по обычной схеме (см. ниже). На этом занятии школьники привыкают к формату проведения кружка, а руководитель продолжает оценивать знания и способности школьников (в частности, умение излагать свои мысли устно).

Занятие по листочку проводится по следующей схеме.
До занятия руководитель кружка решает сам все задачи, которые он собирается предложить детям. При этом важно подумать о том, как будут подходить к решению этих задач ваши ученики. Если решение задачи требует знаний по школьной программе, которых у ваших учеников пока нет, такую задачу давать на кружке ни в коем случае не следует.

В начале занятия можно **разобрать некоторые задачи предыдущего занятия** — если об этом просят школьники или если руководитель кружка считает нужным это сделать.

- Разбирать абсолютно все задачи не нужно — лучше обратить внимание на те задачи, при решении которых школьники допускали много ошибок или над которыми школьники долго думали, но не дошли до полного решения.

- Отдельные задачи, которые являются ключевыми по данной теме, стоит разбирать у доски. Если многие на них застряли, то стоит дать подсказку или даже разобрать эти задачи у доски в середине занятия. Если такую задачу не решило меньшинство школьников — с ними можно её обсудить индивидуально или разобрать её у доски в конце занятия.

- Разбор задач, по нашему мнению, лучше проводить именно в начале следующего занятия, а не на том же занятии, на котором задачи были даны: так у школьников останется возможность ещё подумать над задачами дома (в качестве необязательного домашнего задания). Обязательных домашних заданий на кружке мы не советуем задавать.

Затем руководитель кружка **объясняет новую тему**. В комментариях к каждому листочку написано, что́ мы рекомендуем рассказывать школьникам в начале каждого занятия.

- Если тема близка к школьной программе и не требует никаких дополнительных знаний, всё равно полезно бывает напомнить необходимые определения и факты.

- В начале занятия стоит не только объяснять теорию, но и разбирать две-три несложные задачи по теме у доски «для разгона» (примеры таких задач мы тоже приводим в комментариях, но вы можете подобрать и свои — по своему вкусу и в зависимости от уровня ваших учеников). Эти задачи следует подбирать так, чтобы на сравнительно простых примерах проиллюстрировать применение нового метода или использование нового понятия.

- В листочках по некоторым темам есть формулировки теорем, которые надо обсуждать и разбирать на примерах в начале занятия. Доказывать эти теоремы в начале занятия необязательно и иногда даже вредно (на это уходит много времени от занятия). Часть этих теорем доказывается в школьном курсе математики. Некоторые теоремы предлагается доказать в качестве одной из задач листочка (иногда для решения этой задачи нужно сначала решить несколько предшествующих ей «наводящих» задач, поэтому такие задачи обычно стоят ближе к концу листочка). Однако в первую очередь (особенно для не очень сильных школьников) важнее не досконально разобраться в доказательстве самой теоремы, а научиться её применять при решении задач.

После объяснения новой темы:

- каждому участнику кружка выдаётся распечатанный листок с условиями задач;
- школьники самостоятельно думают над задачами;
- руководитель кружка и его помощники (если они есть) индивидуально принимают решения задач;
- если решение неверно, школьнику предлагается подумать ещё и исправить недочёты;
- если решение верно, школьник получает «плюсик» и поздравления (Молодец!);
- **не нужно** ставить оценки.

Мы категорически не советуем:

- делать занятия кружка обязательными для посещения;
- проводить на кружке проверочные и контрольные работы;
- стремиться подготовить детей к определённому виду соревнований / олимпиад;
- стремиться объяснить детям решения абсолютно всех задач разработки;

- читать указания и решения к задачам, не прорешав их самостоятельно.

Плюсики за решённые задачи обычно записываются в специальную табличку. Без неё вполне можно и обойтись, но, во-первых, она даёт возможность руководителю кружка анализировать статистику решения задач, а во-вторых — детям приятно получить «плюсик».

Основная цель каждого занятия кружка в том, чтобы дети самостоятельно придумали решения нескольких нестандартных задач и испытали **радость**. Поэтому не стоит расстраиваться, если некоторые задачи вы не успеете разобрать или никто из детей не дойдёт до самых последних задач. Мы считаем, что если участник кружка за занятие самостоятельно решит 2-3 задачи и ещё по 1-2 задачам у него будут какие-то полезные соображения, то это уже хороший результат.

Что делать, если задачи окажутся слишком сложными для ваших учеников? Мы ни в коем случае не советуем превращать занятие кружка в разбор всех задач у доски. Иногда можно давать подсказки (как индивидуально, так и у доски) — некоторые конкретные советы мы приводим ниже. Если большинство предложенных задач слишком трудны, мы советуем подбирать к каждому занятию несколько задач попроще.

При выборе задач в первую очередь руководствуйтесь **собственным вкусом и силами ваших детей** — задачи должны нравиться вам и должны пусть и не сразу, но без существенных подсказок получаться у ваших детей.

Желаем успеха!

Письменная работа

Основная цель письменной работы — получить представление о том, какие темы и в какой степени знакомы учащимся. Если у большинства учащихся нет опыта в решении олимпиадных задач, то рекомендуется пропустить письменную работу и начать занятия сразу с «Знакомства». В этом случае письменную работу можно провести в середине учебного года для проверки того, насколько хорошо и полно учащиеся способны изложить свои решения самостоятельно. После письменной работы (например, на следующем занятии кружка) её стоит разобрать у доски.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Сын вдвое моложе отца. Родился он, когда отцу было 24 года. Сколько лет сыну?

Решение. Жизнь отца к настоящему моменту делится на две равных части: до рождения сына и после его рождения. Первая часть — 24 года, значит, и вторая тоже. Так что отцу 48, а сыну 24. Также можно составить и решить простое уравнение. □

$\boxed{\mathbf{2}}$ В равнобедренном треугольнике один из углов равен $45°$. Какой это треугольник — остроугольный, прямоугольный или тупоугольный?

Решение. Возможны два случая: указанный угол находится при вершине или при основании равнобедренного треугольника. Поскольку в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, а сумма углов в треугольнике равна $180°$, можно найти остальные углы. В первом случае треугольник имеет углы $45°, (180° - 45°) : 2 = 67.5°, 67.5°$. Во втором случае — $45°, 45°, 180° - 45° \cdot 2 = 90°$. Поэтому в первом случае треугольник остроугольный, а во втором случае — прямоугольный. □

–Если рассмотрен только один случай, то задача не считается решённой.

$\boxed{\mathbf{3}}$ В кинотеатре несколько рядов по 12 кресел. Первый ряд пронумерован от 1 до 12, второй от 13 до 24, и так далее. Номер сидения

Васи равен номеру ряда Пети. Сумма номеров их сидений равна 123. Найдите номера сидений Васи и Пети.

Решение. Обозначим за x номер сиденья Васи и номер ряда Пети. Тогда номер сиденья Пети равен $12(x-1)+y$, где $1 \leq y \leq 12$.Мы знаем, что $x+12(x-1)+y=123$, откуда $13x+y=135$. Деля 135 на 13 с остатком (помним ограничения на y), получим $135 = 13 \cdot 10 + 5$. Отсюда $y=5$, $x=10$. Значит, номер места Васи равен 10, а номер места Пети равен 113. □

4 Поля, Даша, Света и Юля были на математической олимпиаде. На вопрос «Кто из вас решил последнюю задачу?» они ответили так:

Поля: «Даша не решила задачу. Я тоже её не решила».

Даша: «Юля решила задачу. А вот Света — нет».

Света: «Да, задачу решила Юля. А вот я не смогла».

Юля: «Поля решила задачу. Света — тоже».

Кто мог решить задачу, если каждая девочка один раз сказала правду, а один раз ошиблась? Перечислите все возможные варианты.

Решение. Света и Даша утверждают одно и то же, хотя и в разной последовательности. Значит, одинаковые их утверждения либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Случай 1. Пусть утверждение о том, что Света не решила задачу, истинно, а утверждение о том, что ее решила Юля, ложно. Тогда второе утверждение Юли ложно, а ее первое утверждение истинно. Значит, второе утверждение Поли ложно, а первое истинно. В этом случае задачу решила только Поля.

Случай 2. Пусть теперь истинно утверждение о том, что Юля решила задачу, а второе утверждение Светы и Даши ложно. В этом случае задачу решили Света, Даша и Юля.

Ответ: либо только Поля, либо Света, Даша и Юля. □

5 В классе 25 человек. Может ли быть так, что 6 из них имеют ровно по 3 друга, 10 — ровно по 4 друга, а 9 — ровно по 5 друзей в этом классе?

Решение. Посчитаем количество «дружб». Оно должно быть равно $\frac{6\cdot3+10\cdot4+9\cdot5}{2}$ (если просто сложить количество друзей у всех людей, каждая «дружба» будет посчитана по два раза), но это нецелое число. Поэтому описанная в условии ситуация невозможна. $\square$

–Учащиеся, знакомые с понятием графа, могут решить эту задачу, сославшись на лемму о рукопожатиях: сумма степеней всех вершин графа должна быть чётной.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Сколькими способами можно переставить буквы в слове МЕХМАТ так, чтобы между двумя гласными буквами стояли две согласные?

Решение. Есть 3 способа выбрать место для двух гласных (первая и четвёртая позиции, вторая и пятая, третья и шестая), затем 2 способа их расставить по этим местам. На остальные 4 места расставляем 4 буквы, из которых две одинаковые. Перестановок всего 4!, при этом ровно половина из них - повторы, где мы по разному упорядочили две одинаковые буквы, не поменяв тем самым получившийся набор букв. Итого число способов равно $3 \cdot 2 \cdot 4! : 2 = 72$. $\square$

–Учащимся в качестве корректного решения можно засчитать любые верные рассуждения, приводящие к правильному ответу. В том числе и полный перебор, если он выполнен верно.

$\boxed{\mathbf{7}}$ $ABCD$ — четырёхугольник, причём $AD||BC$. Точка M лежит на прямой BC, $AM \perp BD, AM$ — биссектриса угла BAD, $\angle BMA = \angle ABD$. Докажите, что $ABMD$ — квадрат.

Решение. 1. $\angle DAM = \angle AMB$ как н/л углы при $AD||BC$ и секущей AM. Значит, $\angle DAM = \angle AMB = \angle ABD = \angle BAM$.

2. Обозначим $AM \cap BD = K$. Из прямоугольного (по условию) ΔABK по теореме о сумме углов треугольника и с учетом п. 1 получаем $\angle BAK = \angle ABK = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \angle AKB) = 45^\circ$. Отсюда (или сразу из п. 1) следует, что ΔABK — равнобедренный.

3. С помощью признаков равенства треугольников получаем, что $\Delta ABK = \Delta BKM = \Delta MKD = \Delta AKD$, откуда следует равенство их острых углов (они все равны 45°). Отсюда получаем,

что все углы четырёхугольника $ABMD$ — прямые. Кроме того, из равенства тех же треугольников следует равенство их гипотенуз, а они служат сторонами четырёхугольника $ABMD$. Таким образом, $ABMD$ — квадрат, что и требовалось доказать. $\square$

$\boxed{\mathbf{8}}$ Может ли сумма квадратов двух нечётных чисел быть квадратом целого числа?

Ответ. **Не может.**

Решение. Квадрат целого числа может давать остаток 0 или 1 при делении на 4, квадрат нечетного только остаток 1. Сумма двух чисел с остатком 1 дает число с остатком 2. $\square$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Найдите НОД всех девятизначных чисел, полученных перестановкой цифр в числе 123456789 (включая и само это число).

Ответ. **9.**

Решение. Во-первых, по признаку делимости на 9 все эти числа делятся на 9 (их сумма цифр 45). Во-вторых, на НОД всех этих чисел должна делиться и разность любых двух из них. В частности, $123456798 - 123456789 = 9$ должно делиться на этот НОД, поэтому НОД не может быть больше 9. $\square$

Листок 1. Знакомство

Данный листок содержит подборку задач по разным темам. Цель занятия — познакомить учащихся с различными типами задач, от конструирования примеров до решения содержательных задач по предстоящим темам. Устная сдача задач позволяет оценить не только качество решения задачи, но и способность устно объяснить это решение принимающему. Также это занятие можно рассматривать как дополнение или замену письменной работы — для получения представления об общем уровне учащихся и степени их знакомства с различными темами.

1 Разрежьте квадрат 4×4 на две равные части четырьмя различными способами так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток. Способы, различающиеся поворотом или отражением, считаются одинаковыми.

Ответ. **Прямоугольники $2{\times}4$, прямоугольники $2{\times}4$ с одним вырезанным и переклеенным квадратиком, прямоугольники $2{\times}3$ с приклееным прямоугольником $2{\times}1$, зацепленнные «гребёнки».**

2 Как из 15-литровой бочки отлить 8 л воды, имея две бочки вместимостью 5 л и 9 л? Переливать воду можно только в эти две бочки.

Решение. Наполняем девятилитровую бочку. Из неё переливаем 5 литров в пятилитровую. Затем из пятилитровой выливаем эти 5 литров обратно в 15-литровую, а в пятилитровую выливаем оставшиеся в девятилитровой бочке 4 литра. Снова наполняем девятилитровую бочку. Доливаем из неё пятилитровую бочку — на это уходит один литр. В девятилитровой остаётся 8 литров. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Попробуй попереливать. Посмотри, какие варианты получаются, запиши их.*

3 В записи $1*2*4*8*16*32*64 = 27$ замените знаки «$*$» знаками «$+$» и «$-$» так, чтобы равенство стало верным.

Ответ. $1 - 2 + 4 + 8 - 16 - 32 + 64 = 27$.

Решение. В задаче замаскирована двоичная запись числа. $27 = 1 + 2 + 8 + 16 = 1 + (4 - 2) + 8 + (64 - 32 - 16)$. Для решения задачи, впрочем, понимание этого факта не является необходимым. Задачу можно решить и подбором. $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Попробуй подбирать. Как ты думаешь, какой знак может стоять перед числом 64? А перед 32?

$\boxed{4}$ Сколько различных слов (не обязательно осмысленных) можно получить, переставляя буквы в слове: **а)** МАЛЫЙ; **б)** МЕХМАТ?

Ответ. **а)** $5! = 120$ **; б)** $6! : 2 = 360$**.**

Решение. **а)** На первое место можно поставить любую из 5 букв. На второе — любую из оставшихся четырёх и так далее. Получается $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$ вариантов.

б) Пусть буквы «М» различаются, например, назовём их «М-1» и «М-2». Тогда различных перестановок получается, аналогично пункту **а)**, $6!$. Но при этом варианты, которые различаются только перестановкой между собой букв «М-1» и «М-2», на самом деле совпадают. То есть каждый вариант посчитан дважды: в одном случае раньше в слове поставлена «М-1», в другом — «М-2». Поэтому получившееся количество нужно разделить на 2. Получим $6! : 2 = 360$. $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`

– Сколько способов выбрать первую букву? А вторую? А третью?

○ `Учащийся сделал пункт` **б)** `так же, как` **а)**

–Смотри, получается, что вариант МЕХМАТ ты подсчитал два раза. А почему?

○ `Учащийся сделал пункт` **а)** `и не знает, как приняться за пункт` **б)**

–А если бы все буквы были разные? Например, буквы М были бы разного цвета? И сколько лишних способов так получилось?

$\boxed{5}$ **а)** 31 декабря 2011 года возраст Евгения Александровича совпадал с суммой цифр его года рождения. Сколько лет Евгению Александровичу было 31 декабря 2014 года? **б)** Докажите единственность ответа.

Ответ. **а) 23 года.**

Решение. Максимум сумма цифр года рождения может равняться $1+9+9+9=28$, минимум — 2. Поэтому Е.А. родился самое раннее в 1983, а самое позднее — в 2009. Заметим, что если менять только последнюю цифру года рождения, то сумма цифр будет увеличиваться, а возраст — уменьшаться (и наоборот) на одну и ту же величину. Поэтому в каждом десятилетии не более одного подходящего года. Остаётся проверить возможные десятилетия. Если год рождения попадает на нулевые, получаем уравнение $2+0+0+x=11-x$. То есть $2x=9$, что не имеет решения в целых числах. Если год рождения попадает на восьмидесятые, то получаем уравнение $1+9+8+x=31-x$ или $2x=13$, что тоже не имеет решения в целых числах. Наконец, для девяностых получаем уравнение $1+9+9+x=21-x$. Решая его, получаем, единственный ответ: $x=1$. Поэтому Е.А. родился в 1991 году. Значит, в 2014 году ему исполнилось 23 года. □

○ `Учащийся подбором нашёл ответ.`

–Почему нет других вариантов? Или есть? А сколько максимум лет могло быть Е.А. в 2011 году?

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–А сколько максимум лет могло быть Е.А. в 2011 году?

6 Четыре друга пришли с рыбалки. Каждые двое сосчитали сумму своих уловов. Получилось шесть чисел: 7, 9, 14, 14, 19, 21. **а)** Сколько всего рыб было поймано? **б)** Сможете ли вы узнать, каковы были уловы?

Ответ. **а) 28, б) Да,** $1, 6, 8, 13$**.**

Решение. Заметим, что улов каждого посчитан ровно в трёх суммах. Поэтому если мы сложим все шесть чисел, то получим утроенный общий улов. Значит, всего поймано $(7+9+14+14+19+21):3=28$ рыб. Обозначим их уловы как $a \le b \le c \le d$. Попарные суммы имеют вид $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$, $c+d$. Тогда $a+b$ — минимальная сумма двух уловов. Заметим, что второй по минимальности суммой будет $a+c$ — она не превосходит любую из остальных четырёх. Поэтому $a+b=7, a+c=9$. Аналогично $b+d=19, c+d=21$. Поэтому остаются две суммы: $b+c=14=a+d$. Остаётся решить систему уравнений. $c=b+2, b+b+2=14, b=6$. Отсюда получаем $a=1, c=8, d=13$. □

○ `Учащийся считает, что ответ в пункте` **б)** `«нет», так как у него не получилось узнать.`

–*Как ты думаешь, можно ли понять, где какая пара уловов? Например, где самый большой улов? А где самый маленький? А если попробовать упорядочить рыбаков по размеру улова?*

7 Гриб называется *плохим,* если в нём не меньше 10 червей. В лукошке 91 плохой гриб и 10 хороших. Могут ли все грибы в лукошке стать хорошими после того, как некоторые червяки переползут в другие грибы?

Ответ. **Нет.**

Решение. Раз в лукошке 91 плохой гриб, значит, в лукошке не менее $91 \cdot 10 = 910$ червей. Всего в лукошке 101 гриб. По принципу Дирихле всегда найдётся гриб, в котором не менее 10 червей, т.е. плохой. Иначе, можем расписать принцип Дирихле подробнее, через метод от противного. Пусть в лукошке все грибы стали хорошими. Тогда в них всего не более, чем $101 \cdot 9 = 909$ червей. Противоречие. Значит, все грибы не могут быть хорошими. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Сколько всего червей может быть? А если все грибы будут хорошими?*

○ `Учащийся рассматривает конкретный случай. Как вариант, рассматривает самый «плохой» случай.`

–*А почему в других случаях всё будет так же?*

○ `Учащийся запутался в неравенствах, например, утверждает, что если все грибы хорошие, то всего червей меньше, чем` $10 \cdot 101 = 1010$ `червей.`

–Указать неточность: ты утверждаешь, что червей меньше, чем 1010. *Значит, максимум червей может быть* 1009*?*

8 На доске 8×8 на первой горизонтали стоят 8 белых фишек, а на последней — 8 чёрных фишек. Первыми ходят белые. За один ход можно передвинуть любую свою фишку на любое число клеток вперёд или назад по вертикали. Запрещается ходить на занятые поля, перепрыгивать через фишки соперника и пропускать ходы. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто из игроков может обеспечить себе победу?

Ответ. **Второй.**

Решение. Ему достаточно ходить симметрично первому относительно центра доски. При этом после его хода расположение фишек будет симметричным, поэтому у него всегда будет ход: первый нарушает симметрию, второй её восстанавливает. При этом никакая вертикаль не симметрична сама себе, поэтому ход всегда будет возможен. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Предложить ему сыграть с вами или с соседом по парте, посмотреть, что происходит в игре.

○ `Учащийся предлагает стратегию (за первого или за второго игрока), которая не является выигрышной.`

–Сыграть с ним, используя его стратегию, и постараться проиграть.

9 На кружке каждая девочка знакома с 5 девочками и 6 мальчиками, а каждый мальчик — с 7 девочками и с 4 мальчиками. Какое наименьшее количество школьников может быть на кружке?

Ответ. **26.**

Решение. Давайте посчитаем количество знакомств «мальчик – девочка». Если девочек d, а каждая девочка знакома с 6 мальчиками, то знакомств $6d$. С другой стороны, если мальчиков m, и каждый знаком с 7 девочками, то знакомств $7m$. Получается, $6d = 7m$. Поэтому $d \,\vdots\, 7$, $m \,\vdots\, 6$. Однако если бы девочек было семь, и у каждой из них было бы по пять знакомых девочек, то количество знакомств «девочка – девочка» было бы нецелым $(5 \cdot 7 : 2)$. Поэтому девочек не меньше 14. Для 14 девочек и 12 мальчиков можно придумать пример, удовлетворяющий условию. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Предложить посчитать количество знакомств между мальчиками и девочками. Любое ли число девочек и мальчиков может быть? Предложить попробовать построить пример.

○ `Учащийся говорит, что минимум может быть семь девочек и шесть мальчиков (у одной девочки и одного мальчика хотя бы столько друзей). Учащийся обнаружил, что` $6d = 7m$.

–Почему он уверен, что действительно в таком случае удастся всех подружить в нужном количестве? Предложить построить пример.

○ `Учащийся построил пример, но не отметил, что` $6d = 7m$.

–Почему нельзя обойтись меньшим количеством школьников? Например, взять меньше мальчиков.

○ `Учащийся построил пример, отметил, что` $6d = 7m$, `но не доказал, что не бывает случая` $d = 7$, $m = 6$.

–Почему нельзя обойтись меньшим количеством школьников? Вдруг у тебя не получилось, а в другого получится?

10 Клетчатый квадрат 2013×2013 разрезали на несколько прямоугольников (по границам клеток). Докажите, что среди них найдётся прямоугольник, периметр которого делится на 4.

Решение. Пойдём от противного: пусть такого прямоугольника не найдётся. Заметим, что периметр любого целоклеточного прямоугольника является чётным числом. Периметр будет делиться на 4 тогда, когда обе стороны прямоугольника одной чётности и не будет в противном случае. Если все прямоугольники имеют периметр, не делящийся на 4, значит они все имеют одну чётную и одну нечётную сторону. В таком случае площадь каждого прямоугольника чётна. Но тогда чётна и сумма их площадей. А сумма из площадей есть площадь квадрата, $2013 \cdot 2013$. Противоречие. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Какой остаток может давать периметр при делении на 4? От чего это зависит?*

Листок 2. Доказательства от противного и принцип Дирихле

В начале занятия нужно сформулировать принцип Дирихле и доказать с помощью рассуждения от противного: если бы во всех клетках было не более одного кролика, то всего их было бы не более n, а их $n+1$ — противоречие. Отдельно стоит обратить внимание и у доски и при приёме задач на то, как строить отрицания. Если мы хотим, чтобы нашлась клетка, в которой более 5 кроликов, то противное предположение заключается не в том, что в каждой клетке 5 кроликов и не в том, что хотя бы в одной клетке 5 кроликов, и не в том, что во всех клетках менее 5 кроликов, а в том, что во всех клетках не более пяти кроликов. Учащиеся очень любят рассматривать «худший случай». Следует просить их пояснять на языке неравенств, в чём заключается «худшесть» этого случая и почему.

Для примера у доски разбираются следующие задачи.

• Вася учится пять дней в неделю, и у него каждый день от 5 до 8 уроков. Докажите, что в какие-то два дня у него одинаковое количество уроков.

Решение. Предположим, что каждый день разное число уроков. Тогда в какой-то день их 5, в другой 6, в третий 7, в четвертый 8. На пятый день уже никаких новых вариантов не остается.

Или сразу ссылаемся на принцип Дирихле: кролики — дни недели, клетки — количества уроков. □

• Девять человек получили за контрольную оценки от 2 до 5. Докажите, что у троих из них оценки одинаковые.

Решение. Предположим, что каждую оценку получили не более двух человек, тогда всего оценок не более $2 \cdot 4 = 8$, а их 9 — противоречие.

Или обобщённый принцип Дирихле: кролики — оценки у конкретных учащихся, клетки — возможные значения оценок. □

–Первая подсказка — всегда предложить найти кроликов и клетки. Это можно делать явно из условия задачи, а можно отталкиваться от того, сколько кроликов в итоге должно оказаться в одной клетке, то есть того, что требуется доказать.

Теорема 1 (принцип Дирихле)**.** *Если по n клеткам рассадить хотя бы $n+1$ кроликов, то найдётся клетка, в которой сидит больше одного кролика.*

Теорема 2 (обобщённый принцип Дирихле)**.** *Если по n клеткам рассадить более $k \cdot n$ кроликов, то найдётся клетка, где сидит больше k кроликов.*

$\boxed{\mathbf{1}}$ **а)** В классе 35 учеников. Докажите, что среди них найдутся хотя бы двое, у которых фамилия начинается с одной буквы.
б) При каком наименьшем количестве учеников в школе среди них обязательно найдутся двое, у которых день и месяц рождения совпадают?

Решение. **а)** Ученики = кролики, буквы = клетки.
б) Если учеников 366, они все могут родиться в разные дни (включая 29 февраля). А вот если их хотя бы **367,** то у двоих уже будет день рождения в один день (ученики = кролики, дни рождения = клетки). □

$\boxed{\mathbf{2}}$ На 25 страницах книги 102 опечатки. Докажите, что на одной из них не менее 5 опечаток.

Решение. Если это не так, то на каждой странице не больше 4 опечаток, а всего их тогда не больше $25 \cdot 4 = 100$, что не так. □

$\boxed{\mathbf{3}}$ В мешке лежат 4 красных и 2 синих шара. Какое наименьшее число шаров надо вытащить не глядя, чтобы среди них точно были такие шары: **а)** 1 красный; **б)** 1 синий; **в)** 1 красный и 1 синий; **г)** два одноцветных?

Решение. **а) 3** шара (иначе могут оказаться только синие); **б) 5** шаров (иначе могут оказаться все красные); **в) 5** шаров (иначе могут оказаться все одноцветные, например, все красные); **г) 3** шара (иначе могут оказаться два разноцветных). □

–В этой задаче нет необходимости искать явно кроликов и клетки. Достаточно показать, что приведённые ответы и впрямь являются минимальными достаточными.

$\boxed{\mathbf{4}}$ У человека на голове не более 1 000 000 волос, а в Москве более 8 000 000 жителей. Докажите, что найдутся 8 москвичей с одинаковым числом волос.

Решение. Всего есть 1000001 вариант для числа волос. Если с каждым вариантом не более 7 человек, то всего не более 7000007 человек, а это меньше 8000000. □

$\boxed{\mathbf{5}}$ В школе 65 восьмиклассников, и все они сдают по три экзамена, за каждый из которых можно получить оценку 2, 3, 4 или 5. Верно ли, что найдутся два школьника, получившие одинаковые оценки за все экзамены?

Решение. **Верно.** Наборов оценок всего 64 (четыре экзамена по четыре варианта оценки, итого $4^4 = 64$). Так что если учеников 65, то у двоих наборы оценок совпадают. □

$\boxed{\mathbf{6}}$ 34 пассажира едут в автобусе, который делает 9 остановок, и на этих остановках новые пассажиры не заходят. Докажите, что на каких-то двух остановках выйдет одинаковое число пассажиров (может быть, ни одного).

Решение. Если на всех остановках выходит разное число человек, то на какой-то выходит минимум 0 человек, на другой минимум 1 человек, на третьей минимум 2 человека, ..., на последней минимум 8 человек. Итого минимум $0+1+2+\cdots+8 = 35$ человек, а их только 34. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Если бы на всех остановках выходило разное количество пассажиров, сколько бы минимум могло бы быть пассажиров? Почему?*

$\boxed{\mathbf{7}}$ За 5 лет обучения в университете студент сдал 31 экзамен, причём на каждом курсе он сдавал экзаменов больше, чем на предыдущем. На V курсе экзаменов было втрое больше, чем на I курсе. А сколько экзаменов было на IV курсе?

Решение. Число экзаменов на 5 курсе делится на 3, значит, это могут быть только числа 3, 6, 9, ..., 30. Если их там более 9, то всего экзаменов набирается больше 31 (надо оценить снизу количество экзаменов на 2, 3, 4 курсах). Если меньше 9 — то будет меньше 31 экзамена (оцениваем теперь сверху). Значит, на 5 курсе было 9 экзаменов, на первом — 3, на четвертом получается обязательно **8** (независимо от конкретного числа экзаменов на 2 и 3 курсе). $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Сколько могло быть экзаменов на пятом курсе? А сколько тогда экзаменов было на остальных курсах?*

$\boxed{\mathbf{8}}$ Дано 7 отрезков с длинами от $\frac{1}{10}$ до 1. Докажите, что среди этих отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник.

Решение. Чтобы из отрезков с длинами $a \leqslant b \leqslant c$ можно было составить треугольник, достаточно выполнения неравенства $a+b > c$.

Упорядочим наши отрезки по неубыванию длин: $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_7$. Если эти неравенства не выполнены для любых трех отрезков из наших семи, то $a_1 \geqslant \frac{1}{10}, a_2 \geqslant a_1 \frac{1}{10}$, $a_3 \geqslant a_1 + a_2 \geqslant \frac{2}{10}$, $a_4 \geqslant a_2 + a_3 \geqslant \frac{3}{10}, \ldots, a_7 \geqslant a_5 + a_6 \geqslant \frac{5}{10} + \frac{8}{10} = \frac{13}{10} > 1$. $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*При каком условии из отрезков можно сложить треугольник? Пусть оно не выполнено ни для каких трёх отрезков. Что мы знаем про наименьший отрезок, какой величины он больше? А самый большой отрезок?*

$\boxed{\mathbf{9}}$ Никита разрезал лист бумаги по прямой. Затем он разрезал по прямой один из получившихся кусков, потом — один из трех получившихся кусков, и т. д. Докажите, что через несколько разрезаний среди полученных многоугольников найдется 100 штук с одинаковым числом вершин.

Решение. Максимальное число вершин у имеющихся многоугольников возрастает, только если от n-угольника отрезать треугольник, и останется $(n+1)$-угольник. Если 100 раз так сделать, получится 100 треугольников. Если же так сделать не более 99 раз, то получится максимум 103-угольник. Продолжая разрезания достаточно долго так, чтобы треугольников появилось не более 99, мы получим много многоугольников с числом вершин от 3 до 103. После того, как будет еще сделано более $101 \cdot 99$ разрезаний, у нас окажется 100 многоугольников какого-то вида. $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Как изменяется число вершин у многоугольника при его разрезании? Когда оно растёт? Можно ли уменьшить число треугольников? А сколько треугольников есть в наличии, если имеется n-угольник?

Листок 3. Примеры и контрпримеры

В начале занятия нужно объяснить, что такое контрпример к утверждению и показать несколько контрпримеров. Например, к таким утверждениям:

- все натуральные числа — либо простые, либо составные;
- все прямоугольники — квадраты;
- все нечетные числа делятся на 3;

Контпример к утверждению *— это пример, который показывает, что это утверждение неверно.*

$\boxed{\mathbf{1}}$ Можно ли расположить 12 одинаковых монет вдоль стенок большой квадратной коробки так, чтобы вдоль каждой стенки лежало ровно: **а)** по 2 монеты; **б)** по 3 монеты; **в)** по 4 монеты; **г)** по 5 монет; **д)** по 6 монет; **е)** по 7 монет? Монеты можно класть друг на друга.

Решение. **а) нет:** тогда всего выйдет не более $2 \cdot 4 = 8$ монет. **б) да:** берем и кладем поровну у каждой стенки. **в) да:** по одной монете в угол и еще по две к каждой стороне. **г) да:** по стопке из двух монет в каждый угол и еще по одной монете к каждой стороне. **д) да:** по стопке из трех монет в каждый угол. **е) нет.** Заметим, что монета не может касаться двух противоположных стенок коробки. Поэтому общее число монет, касающихся двух противоположных стенок, равно $7 + 7 = 14 > 12$. $\square$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Приведите контрпример к каждому из следующих утверждений.
а) Все четырёхугольники, у которых все стороны равны, — квадраты.
б) Через любые три точки плоскости можно провести прямую.
в) Через любые три точки плоскости можно провести окружность.
г) Все простые числа — нечётные.
д) Если число делится на 2 и на 6, то оно делится и на 12.
е) Если число a делится на 15 и на b, то оно делится и на $15b$.

Решение. **а)** Ромб, не являющийся квадратом.

б) Три вершины треугольника.

в) Три точки на одной прямой. Можно требовать доказательства в духе построений циркулем и линейкой.

г) Число 2 — четное простое.

д) Числа 6, 18 и вообще все числа вида $12k + 6$ делятся на 2 и на 6, но не делятся и на 12.

е) Если b не взаимно просто с 15 (например, 3, 5, 15), то утверждение неверно (можно взять $a = b \cdot 15 : \text{НОД}(15, b)$), в противном случае — верно. Если число a делится на 15 и на b, то оно делится и на $15b$. □

3 Выберите 24 клетки в прямоугольнике 5×8 и проведите в каждой выбранной клетке одну из диагоналей так, чтобы никакие две проведенные диагонали не имели общих концов.

Решение. Берем в этом прямоугольнике первую, третью и пятую полоски 1×8 и проводим в выбранных клетках диагонали, параллельные друг другу. □

4 Вася думает, что если площадь первого прямоугольника больше площади второго, а также периметр первого больше периметра второго, то из первого прямоугольника можно вырезать второй. Прав ли он?

Решение. Из прямоугольника 1×10 нельзя вырезать квадрат 2×2. □

5 Известно, что $a = b + 1$. Может ли оказаться, что $a^4 = b^4$?

Решение. Да, например, если $a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}$. □

○ `Учащийся считает, что это невозможно: раз числа не равны, то и их четвёртые степени не равны.`

–А ты учёл, что бывают отрицательные числа? А бывает ли так, что два числа не равны, но равны их квадраты?

$\boxed{\mathbf{6}}$ Барон Мюнхгаузен утверждает, что может для некоторого N так переставить числа $1, 2, \ldots, N$ в другом порядке и затем выписать их все подряд без пробелов, что в результате получится многозначное число, которое читается одинаково слева направо и справа налево (такие числа называют *палиндромами*). Не хвастает ли барон? *Подсказка: подумайте, при каком наименьшем N такое возможно.*

Решение. **Не хвастает.** Числа от 1 до 19 можно выписать, например, так:

$$9, 18, 7, 16, 5, 14, 3, 12, 1, 10, 11, 2, 13, 4, 15, 6, 17, 8, 19.$$

Объясним, почему нужно искать пример для $N \geqslant 19$. В палиндроме количество всех цифр, кроме, быть может, одной, должно быть четным. Однако если $N = 2, \ldots, 9$, то цифры 1 и 2 встречаются в записи чисел $1, 2, \ldots, N$ по одному разу, а если $N = 10, \ldots, 18$, то по одному разу встречаются цифры 0 и 9. $\square$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Рома сформулировал теорему: *если число $88a$ делится на число b, то и число a делится на число b.*

а) Найдите хотя бы один контрпример к этой теореме (то есть число b, для которого утверждение теоремы выполняется не при всех a).

б) При каких b утверждение теоремы верно, а при каких неверно?

в) При подстановке каких чисел вместо 88 все контрпримеры останутся контрпримерами?

Решение. **а)** Берем $b = 88$, тогда при $a = 1$ утверждение теоремы нарушается.

б) Утверждение верно, только если b взаимно просто с числом 88.

в) Все контрпримеры сохранятся при подстановке вместо 88 любого числа, кратного 22. $\square$

Листок 4. Инварианты

Инвариант *— это величина или свойство, которые не меняются при разрешённых в задаче действиях или одинаковы во всех возможных по условию задачи ситуациях.*

В каждой задаче этого занятия нужно найти инвариант. Например: чётность, делимость, раскраска, сумма или произведение каких-нибудь чисел.

В начале занятия предлагается разобрать несколько задач, в каждом случае указывая на используемый инвариант.

• **Чётность.** Дядька Черномор написал на листке бумаги число 20. Тридцать три богатыря передают листок друг другу, и каждый или прибавляет к числу, или отнимает от него единицу. Может ли в итоге получиться число 10?

Решение. **Не может.** Каждый богатырь своим действием меняет чётность написанного на листке числа. Если сначала было чётное число 20, а чётность поменяется 33 раза, то получится нечётное число, то есть явно не 10. $\square$

• **Чётность, раскраска.** Может ли шахматный конь, начав движение с какой-нибудь клетки шахматной доски, вернуться в неё же через 5 ходов? А через 2015?

Решение. **Не может.** Каждым ходом конь меняет цвет поля, на котором стоит. Так что через нечётное число ходов он всегда будет на поле другого цвета, чем исходное. $\square$

• **Делимость, сумма.** Рита, Люба и Варя решали задачи. Чтобы дело шло быстрее, они купили конфет и условились, что за каждую решённую задачу девочка, решившая её первой, получает четыре конфеты, решившая второй — две, а решившая последней — одну. Девочки говорят, что каждая из них решила все задачи и получила 20 конфет, причём одновременных решений не было. Докажите, что они ошибаются.

Решение. За каждую задачу все девочки вместе получают 7 конфет (так как одновременных решений нет). Но если в итоге каждая получила по 20 конфет, то все вместе они получили 60 конфет, а 60 на 7 не делится. □

$\boxed{\mathbf{1}}$ Лягушка прыгает вдоль прямой: **а)** на 1 см вправо или влево; **б)** сначала на 1 см вправо, затем на 3 см вправо или влево, затем на 5 см вправо или влево, и т. д. Может ли она оказаться в исходной точке после своего 101-го прыжка?

Решение. **Не может.** В обоих случаях лягушка оказывается на нечетном расстоянии от начальной точки после нечетного числа прыжков. □

–Если учащийся решает не с помощью инварианта (к примеру, перебором), то задачу у него можно принять, но обсудить, какой инвариант здесь подходит.

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–В каких точках лягушка может оказаться через два прыжка? Через три? А через четыре? Что между ними общего? Почему так получается?

$\boxed{\mathbf{2}}$ **а)** Может ли шахматный слон за миллион ходов попасть с поля A1 на поле A8? **б)** Тот же вопрос для шахматного коня.

Решение. **а) Не может.** Слон, стоящий на клетке A1, — чернопольный. Клетка A8 — белая, так что он на нее никогда не попадет. **б) Не может.** Каждым ходом конь меняет цвет поля, на котором стоит. Так что через чётное число ходов он всегда будет на поле того же цвета, что исходное. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–На какие клетки может попать слон? Как?

–На каких клетках может оказаться конь через два хода? Что между ними общего? Как так получается?

$\boxed{\mathbf{3}}$ На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 20, 21. Можно стереть любые два числа a и b и записать число **а)** $a+b$; **б)** ab; **в)** $a+b-2$. Какое число получится после 20 таких действий? **г)** Можно стереть любые два числа и записать их разность. Можно ли добиться того, чтобы в результате все числа на доске стали нулями? **д)** Вопрос пункта г), если написаны натуральные числа от 1 до 23.

Решение. **а)** $1+2+3+...+21 = 231$; **б)** $21!$; **в)** $231 - 20 \cdot 2 = 191$. **г) Нельзя.** Сумма написанных чисел нечетна и после каждого хода будет оставаться нечетной. **д) Можно.** $23-22 = 1$; дальше вычтем эту единицу из первой в ряду, получим 0. Остались числа от 2 до 21; их разобьем на пары последовательных, разность чисел в каждой паре равна 1. Таких пар 10, из них получим 10 единиц, а из них — 5 нулей. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–**г)** *Попробуй посмотреть на сумму всех чисел. Как она изменяется?*

$\boxed{\mathbf{4}}$ **а)** На столе стоят 4 стакана: три стоят правильно, а четвёртый — вверх дном. Разрешается одновременно перевернуть любые два стакана. Можно ли за несколько таких операций поставить все стаканы вверх дном?

б) На доске написаны числа 0, 0, 0, 1. За один шаг разрешается прибавлять единицу к любым двум из них. Можно ли за несколько таких операций сделать все числа равными?

Решение. **а) Нельзя.** Число стоящих вверх дном стаканов остается нечётным независимо от наших действий. **б) Нельзя.** Сумма написанных чисел остается нечётной независимо от наших действий. А если бы они все стали равными, сумма стала бы чётной. □

○ `Учащийся не знает, что делать. Учащийся пытается решить без нахождения инварианта.`

–*Попробуй последить за числом стаканов, стоящих вверх дном. Аналогично — за суммой чисел.*

$\boxed{\mathbf{5}}$ В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены цифры. Из цифр каждого столбца и каждой строки составили 10-значные числа — всего получилось 20 чисел. Может ли так быть, что из них ровно 19 делятся на три?

Решение. **Не может.** Отметим, что делимость на три числа, образованного из цифр одной строки соответствует делимости на три сумме цифр в этой строке (по признаку делимости на три). Если ровно 19 таких чисел делятся на 3 — значит есть ровно одна строка или столбец, сумма цифр в которой не делится на три. Без ограничения общности предположим, что это строка. Тогда сумма цифр в остальных строках делится на три, поэтому сумма всех цифр во всех строках не делится на три. С другой стороны, сумма цифр в каждом столбце делится на три, поэтому сумма цифр во всех столбцах делится на три. Получаем противоречие: сумма всех цифр в таблице одновременно делится и не делится на три. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Чему равна сумма всех цифр в таблице? Как она связана с 20 числами из условия задачи? Что можно ещё про неё сказать?*

$\boxed{\mathbf{6}}$ **а)** На каждой из клеток доски размером 5×5 сидел жук. В полдень каждый жук переполз на соседнюю по стороне клетку доски. Докажите, что теперь по крайней мере одна клетка на доске будет свободной.

б) На шахматной доске 5×5 расставили 25 шашек — по одной на каждой клетке. Потом все шашки сняли с доски, но запомнили, на какой клетке стояла каждая. Можно ли ещё раз расставить шашки на доске таким образом, чтобы каждая шашка стояла на клетке, соседней (по стороне) с той, на которой она стояла в прошлый раз?

Решение. **а)** Покрасим клетки доски в шахматном порядке: будет 12 белых клеток и 13 черных (или наоборот). Жуки при переползании меняют цвет клетки, на которой находятся. С 12 белых клеток 12 жуков переползут на 13 черных клеток, значит, одна из черных клеток будет свободной. **б) Нельзя.** Эта задача легко сводится к пункту а). □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Попробуй покрасить доску в шахматном порядке. Куда может переползти жук с белой клетки? С чёрной? А сколько тех и других жуков?

7 **а)** В клетках квадратной таблицы 10×10 расставлены цифры. Из цифр каждого столбца и каждой строки составили 10-значные числа — всего получилось 20 чисел. Может ли быть, что ровно 19 из них делятся на 3? **б)** Петя ввёл в компьютер число 1. Каждую секунду компьютер прибавляет к числу на экране сумму его цифр. Может ли через какое-то время на экране появиться число 123456789?

Решение. **а) Нет.** Предположим, что сумма цифр в одной строке не делится на 3, а остальные суммы делятся. Тогда сумма всех чисел, если считать по столбцам, будет делиться на 3, а их же сумма, если считать по строкам, — нет. Противоречие. **б) Не может.** Число 123456789 делится на 9, а число 1 — нет. Прибавляя к числу, не делящемуся на 9, сумму его цифр, снова получим число, не делящееся на 9, ибо число дает от деления на 9 такой же остаток, как его сумма цифр (тут надо перебрать все остатки от деления на 9). □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Чему равна сумма всех цифр в таблице? Как она связана с 20 числами из условия задачи? Что можно ещё про неё сказать?

8 По кругу стоят натуральные числа от 1 до 6 по порядку. Разрешается к любым трём подряд идущим числам прибавить по 1 или из любых трёх, стоящих через одно, вычесть 1. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать все числа равными?

Подсказка: *рассмотрите диаметрально противоположные числа.*

Решение. **Нельзя.** Рассмотрим три суммы — первого и четвертого, второго и пятого, третьего и шестого чисел. Вначале эти суммы были равны $1+4=5$, $2+5=7$ и $3+6=9$. При выполнении первой операции каждая из этих трёх сумм возрастает на 1, а при выполнении второй операции каждая из сумм уменьшается на 1. Значит, эти три суммы никогда не станут равными. Поэтому и все шесть чисел также не могут стать равными. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Что происходит с суммами противоположных чисел? Как они изменяются? Какими они должны быть в итоге?*

$\boxed{\mathbf{9}}$ В колбу поместили 133 бактерии типа A, 135 бактерий типа B и 137 бактерий типа C. Если две бактерии разных типов соприкасаются, то они обе меняют свой тип на третий. Может ли оказаться, что через некоторое время все бактерии в колбе будут одного типа? ***Подсказка:*** *подумайте про остатки от деления на 3.*

Решение. **Не может.** Посмотрим на попарные разности чисел бактерий каждого типа. При любых встречах эти разности не меняют остатка от деления на 3 (они уменьшаются/увеличиваются на 3 либо не изменяются). Изначально они не кратны 3, а если бы все бактерии стали одного типа, то все разности обратились бы в 0 и стали бы кратны 3. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Как изменяется разность количества бактерий двух типов? При чём тут делимость на 3? А какими они должны стать в итоге?*

Листок 5. Остатки

В начале занятия нужно напомнить школьникам определение деления с остатком и разобрать несколько примеров (скажем, поделить -15 на 4 с остатком: школьники не всегда понимают, как делить отрицательные числа с остатком). Затем нужно разобрать задачу, аналогичную задаче 2 (оба пункта), с какими-нибудь другими числами. Заодно обсудить, как ведут себя остатки при сложении. После этого обсудить поведение остатков при умножении и показать, как составлять таблицу умножения остатков (например, по модулю 4). Потом показать, что последняя цифра числа — это остаток от его деления на 10, и найти, например, последнюю цифру числа 3^{100}.

$\boxed{\mathbf{1}}$ Найдите все натуральные числа, при делении которых на 8 в частном получается то же число, что и в остатке.

Решение. Перебираем всевозможные остатки от деления на 8 и не забываем, что 0 не является натуральным числом. Получаем **9, 18, 27, 36, 45, 54, 63.** □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Как выглядит формула деления с остатком? Каким может быть остаток при делении на 8?

$\boxed{\mathbf{2}}$ **а)** Число делится на 44 с остатком 15. С каким остатком оно делится на 11? **б)** Число делится на 7 с остатком 5. Какой остаток оно может давать при делении на 35? Найдите все возможные варианты.

Решение. **а) С остатком 4:** $n = 44k + 15 = 11 \cdot (4k + 1) + 4$. **б)** $n = 35k + r = 7 \cdot 5k + r = 7m + 5$. Значит, r делится на 7 с остатком 5. Ну а так как $r < 35$, отсюда вытекает, что $r = \mathbf{5}, \mathbf{12}, \mathbf{19}, \mathbf{26}, \mathbf{33}$. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Как выглядит формула деления с остатком? А если её записать для 44 и для 11 и приравнять? А для 7 и 35?

3 Докажите, что произведение пяти подряд идущих натуральных чисел, даже если оно начинается не с единицы, делится **а)** на 30; **б)** на 120.

Решение. **а)** $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Из пяти подряд идущих чисел одно всегда делится на 5, одно или два — на 3 и еще два или три — на 2. **б)** $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$. К предыдущему остается только добавить, что из пяти подряд идущих чисел всегда два делятся на 2, причем одно из них делится еще и на 4. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*На что точно делится одно из таких чисел? Найдётся ли среди них чётное? А что ещё найдётся? А на что должны делиться числа, чтобы их произведение делилось на 30?*

4 Найдите остаток от деления числа $1! + 2! + 3! + \ldots + 15!$ на 15.

Решение. Из всей суммы только первые 4 слагаемых не делятся на 15 (в остальных есть множители 3 и 5). Вот их остатки от деления на 15 и надо сложить: $1+2+6+9 = 18$, а 18 делится на 15 с остатком **3**. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Какие из слагаемых на самом деле не влияют на ответ?*

5 Составьте таблицу умножения остатков от деления на **а)** 3, **б)** 5, **в)** 7. То есть таблица должна показывать, какой остаток от деления даст произведение двух чисел, если известны остатки множителей от деления.

Решение. **а)** Очевидно. **б),в)** Если убрать строку и столбец с нулями, получается:

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

1	2	3	4	5	6
2	4	6	1	3	5
3	6	2	5	1	4
4	1	5	2	6	3
5	3	1	6	4	2
6	5	4	3	2	1

□

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Напомнить пример такой таблицы, разобранный в начале занятии у доски.

–Обратите внимание учащегося, что таблицу можно составлять построчно, нет необходимости вычислять все произведения и брать их остатки.

6 Найдите последнюю цифру числа **а)** 7^7; **б)** 7^{7^7}; **в)** $7^{7^{7^7}}$.

Ответ. **3 во всех пунктах.**

Решение. Остатки от деления степеней семерки на 10 и 100 идут в цикле по 4: 7, 9, 3, 1 и 07, 49, 43, 01 соответственно. И зависят они от того, какой остаток при делении на 4 дает показатель степени. А остаток от деления на 4 определяется остатком при делении 100. Порядок действий в этой задаче подразумевается такой: **б)** $7^{7^7} = 7^{\left(7^7\right)}$; **в)** $7^{7^{7^7}} = 7^{\left(7^{\left(7^7\right)}\right)}$. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Какие бывают остатки при делении на 10 у степеней семёрки? Когда они повторяются и почему? А какие остатки нужно рассмотреть у 7^7*, чтобы определить последнюю цифру у* 7^{7^7}*?*

7 Докажите, что при любом натуральном n **а)** число $n^5 + 4n$ делится на 5; **б)** $n^2 + 1$ не делится на 3; **в)** $n^3 + 2$ не делится на 9.

Решение. Перебираем всевозможные остатки от деления n на 5, 3 и 9 соответственно и выполняем арифметические действия с остатками. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Какие могут быть остатки у числа n при делении на 5? Каким в каждом случае будет остаток у $n^5 + 4n$*?*

8 **а)** Число не делится на 4. Какие остатки от деления на 4 может давать его квадрат? Найдите все возможные варианты. **б)** Может ли являться точным квадратом сумма квадратов двух или трёх нечётных чисел?

Решение. **а) Только 0 и 1** (проверка перебором вариантов). **б) Не может:** квадраты нечетных чисел дают остаток 1 при делении на 4, а их сумма, соответственно, — остаток 2 или 3, чего квадрат себе позволить не может. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Какие остатки при делении на 4 может давать такая сумма? Воспользуйся пунктом а).

$\boxed{\textbf{9}}$ Урюпинская Городская Дума переехала в новое здание. Если в новом зале для заседаний сажать депутатов по трое за стол, то один депутат окажется лишним. Если сажать по четверо за стол, то двое окажутся лишними. Если сажать по пять за стол, то трое окажутся лишними. В старом же здании депутаты сидели по семь за столом, и лишних не оставалось. Какое наименьшее число депутатов может быть в Урюпинской Городской Думе?

Решение. Число депутатов делится с «остатком» (-2) на 3, на 4 и на 5. Так что оно должно иметь вид $3 \cdot 4 \cdot 5k - 2$. А вот на 7 оно делится без остатка. Перебирая различные k, найдем, что наименьшее подходящее нам $k = 4$, при этом число депутатов равно $60 \cdot 4 - 2 = 238 = 34 \cdot 7$. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Какой остаток у числа депутатов при делении на 3, 4, 5? Как тогда должно выглядеть это число?

$\boxed{\textbf{10}}$ Приведите пример: **а)** пяти; **б)** десяти; **в)** 2013 подряд идущих составных чисел.

Решение. **а)** $(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 2), (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 3), \ldots, (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + 6)$ — составные, ибо делятся, соответственно, на 2, 3, 4, 5, 6. **б)** Аналогично: $(2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 11 + 2), (2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 11 + 3), \ldots, (2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 11 + 11)$. **в)** Аналогично: $(2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2014 + 2), (2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2014 + 3), \ldots, (2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2013 + 2014)$. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Как можно записать подряд идущие числа через одну переменную? А какой должна быть эта переменная, чтобы они были точно составными?

11 **а)** Существует ли точный квадрат (то есть квадрат некоторого натурального числа) более 9000, в записи которого нет цифр, отличных от единицы, пятёрки и девятки? **б)** Существует ли точный квадрат, в записи которого 100 нулей, 101 единица, 102 двойки и более никаких других цифр?

Решение. **а) Нет.** Число, большее 9 и состоящее только из 1, 5 и 9, будет давать остаток 3 при делении на 4 (проверка перебором). А квадрат себе такого позволить не может (см. задачу 8а). Можно чуть сократить перебор, если заметить, что все возможные хвосты получаются из 11 прибавлением одной-двух четвёрок и/или однойдвух 40 **б) Нет.** Такое число делится на 3 с остатком 2 (по признаку делимости на 3). А квадрат может делиться на 3 только с остатком 0 или 1 (проверка перебором). □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Вспомни задачу 8а. Что из неё известно про квадраты?

○ `Учащийся сделал пункт а), не знает, что делать в пункте б).`

–Здесь уже остатки при делении на 4 не помогут. А какие остатки могут помочь? Остаток при делении на что у такого числа точно известен?

Листок 6. Графы-1: ГеоГРАФия

В этом листочке подобраны задачи на знакомство с графами. Учащиеся должны узнать (вспомнить), что такое граф, как связаны в нём количество рёбер и степени вершин.

В начале занятия у доски нужно дать определение графа, нарисовать несколько примеров графов (например, граф знакомств), обсудить и показать на конкретных графах определения, данные в листочке.

Граф — это набор точек (**вершин**), некоторые из которых соединены линиями (**рёбрами**). *Простой граф* — граф без кратных рёбер и петель. В таком графе ребро соединяет две различные вершины. По умолчанию мы имеем дело с простыми графами. *Степень вершины* — количество рёбер, выходящих из данной вершины. *Компонента связности графа* — все вершины, из которых по рёбрам можно добраться друг до друга. Если в графе одна компонента связности, то он называется **связным**.

$\boxed{\mathbf{1}}$ В деревне 9 домов. Известно, что у Гоши соседи Иван и Роман, Максим сосед Ивану и Михаилу, Виктор — Алексею и Андрею, а также по соседству живут Константин с Андреем, Иван с Михаилом, Константин с Алексеем, Михаил с Романом, и больше соседей в означенной деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Гоша огородами пробраться к Андрею за яблоками?

Решение. **Не может.** Рисуем граф соседств и обнаруживаем, что Андрей живет в одной компоненте связности, а Гоша — в другой. □

$\boxed{\mathbf{2}}$ В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если сумма цифр-названий этих городов, делится на 4. Можно ли добраться из города 2 в город 8?

Решение. **Нельзя.** Видно, что город 2 соединён только с городом 6, а город 6 — только с городом 2. Значит, долететь из города 2 в город 8 нельзя. □

$\boxed{\mathbf{3}}$ В Исландии 24 города. Сколько в ней дорог, если **а)** из каждого города выходит 5 дорог; **б)** каждый город связан дорогой с каждым?

Решение. **а)** $5 \cdot 24 : 2 = 60$; **б)** $23 \cdot 24 : 2 = 276$. □

–Учащиеся должны заметить, что каждая дорога подсчитана дважды, с двух концов: в одном городе и в другом.
–Эту задачу имеет смысл разобрать в середине занятия. Или персонально помочь тем, кто на тот момент с ней ещё не справится.

$\boxed{\mathbf{4}}$ На Кубе из каждого города выходит по 5 дорог и всего дорог 140. Сколько на Кубе городов?

Решение. $140 \cdot 2 : 5 = 56$ □

$\boxed{\mathbf{5}}$ Есть 7 марсиан, у каждого из которых: **а)** по одной руконожке; **б)** по три руконожки. Могут ли они взяться за руконожки так, чтобы свободных руконожек не было?

`○ Учащийся нарисовал конкретный пример или пытается действовать перебором.`

–Ты уверен, что разобрал все варианты? А если бы марсиан было 1007? А если бы руконожен было 13? Тоже будешь перебирать варианты?

Решение. **Не могут.** Если бы смогли, то в графе рукопожатий было бы $7 \cdot 1 : 2$ или $7 \cdot 3 : 2$ ребер, а это все нецелые числа. □

$\boxed{\mathbf{6}}$ Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 5 дорог, быть ровно 2013 дорог?

Решение. **Не может.** Представим граф, в котором вершины — города, а ребра — дороги. Если вершин n, то, аналогично предыдущим задачам, ребер должно быть $5 \cdot n : 2$. Если дорог 2013, отсюда получаем $5 \cdot n : 2 = 2013$, а это уравнение имеет нецелое решение. □

$\boxed{\mathbf{7}}$ Петя утверждает, что каждый учащийся его класса имеет разное число друзей в классе. Если известно, что в его классе больше одного человека, то может ли Петя быть прав?

Решение. Нет. Пусть в классе n человек. Число друзей у каждого — от 0 до $n-1$. Так как в этом диапазоне n различных чисел, то если у всех учащихся разное число друзей, то найдётся и тот, кто дружит со всеми, и тот, кто не дружит ни с кем. Но тогда друг с другом эти двое должны и дружить, и не дружить. Противоречие. $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`
–Сколько максимум друзей может быть у одного человека? А минимум? Сколько всего разных количеств друзей может быть? А сколько школьников?

$\boxed{\mathbf{8}}$ В графе каждая вершина покрашена в синий или зеленый цвет. При этом каждая синяя вершина связана с пятью синими и десятью зелеными, а каждая зеленая — с девятью синими и шестью зелеными. Каких вершин больше — синих или зеленых?

Решение. Пусть синих вершин b, а зелёных g. Посчитаем количество рёбер, соединяющих вершины разных цветов. С одной стороны, их будет $10b$, с другой стороны — $9g$. Поэтому $10b = 9g$, значит, $b < g$. $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`
–Как посчитать рёбра, которые соединяют вершины разных цветов? Как это число связано с числом вершин каждого цвета?

$\boxed{\mathbf{9}}$ Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников. Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми. Сколько лоскутов белого цвета?

Решение. Пусть белых лоскутков n, тогда черных $32 - n$. Считаем количество склеек разноцветных лоскутков. С одной стороны, их $5 \cdot (32 - n)$, так как каждый черный склеен с пятью белыми. С другой стороны, их $3 \cdot n$, потому что каждый белый склеен с тремы черными. Получаем уравнение $5 \cdot (32 - n) = 3 \cdot n$, откуда $n =$ **20.** $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Вспомни предыдущую задачу. Что здесь будет вершинами, что рёбрами? Сколько будет каких рёбер?

○ `Учащийся нарисовал мяч и посчитал вручную. Доказательства нет или оно переборное.`

–Почему такой вариант склейки лоскутов единственный? А если изменить условие задачи и сделать больше лоскутов?

Листок 7. Графы-2: лемма о рукопожатиях

В начале занятия у доски следует напомнить основные определения из предыдущего листочка. Напомнить на примере какого-нибудь графа связь степеней вершин и количества рёбер. Также у доски разбирается лемма о рукопожатиях — и дальше учащиеся могут в решениях ссылаться на неё.

Граф — это набор точек (**вершин**), некоторые из которых соединены линиями (**рёбрами**). *Простой граф* — граф без кратных рёбер и петель. В таком графе ребро соединяет две различные вершины. По умолчанию мы имеем дело с простыми графами. *Степень вершины* — количество рёбер, выходящих из данной вершины. *Компонента связности графа* — все вершины, из которых по рёбрам можно добраться друг до друга. Если в графе одна компонента связности, то он называется **связным**.

Лемма о рукопожатиях. Количество людей, когда-либо живших на земле и сделавших нечётное число рукопожатий — чётно. (Количество вершин нечётной степени в графе — чётно.)

Решение. Сумма степеней всех вершин должна равна удвоенному количеству рёбер, поскольку каждое ребро входит в две вершины, увеличивая тем самым степени их обеих на один. Значит, сумма степеней всех вершин чётна. Поэтому в этой сумме должно быть чётное число нечётных слагаемых, то есть вершин нечётных степеней. □

$\boxed{\mathbf{1}}$ Сколько всего ребер в графе, степени вершин которого равны 3, 4, 5, 3, 4, 5, 3, 4, 5?

Решение. $(3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3) : 2 = 18$ □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Вспомни, как связано количество рёбер и степени вершин.*

–*Ещё раз объяснить, как связаны количества рёбер и степени вершин.*

2 Существуют ли графы со степенями вершин: **а)** 9, 8, 8, 7, 6, 6, 3, 2, 1; **б)** 8, 8, 7, 7, 6, 5, 4, 2, 1; **в)** 8, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 1; **г)** 8, 7, 5, 4, 4, 3, 2, 2, 2; **д)** 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0?

Если да — постройте, если нет — докажите, почему.

Ответ. **а) нет; б) нет; в) да; г) нет; д) нет.**

Решение. **а)** степень 9 невозможна, остальных вершин только 8, граф простой; **б)** должны быть две вершины, соединённые со всеми, но тогда не может быть вершины степени 1; **в)** строится пример; **г)** по лемме; **д)** должны быть и вершина, соединённая со всеми, и вершина, не соединённая ни с кем. □

○ `Учащийся нашёл противоречие с леммой, а про остальные говорит, что они существуют, т.к. не противоречат лемме.`

–*Напомните ему, что существующие графы нужно построить и что мы имеем дело с простыми графами (без петель и кратных рёбер).*

3 Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Решение. **Нельзя.** Попробуем построить граф, в котором вершины — отрезки, а рёбра — их пересечения. Получим 9 вершин степени 3 — противоречие с леммой. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Подумай, какой граф можно построить для этой задачи. Что осмысленно взять в качестве вершин, если ты хочешь применить лемму?*

–*Учащиеся могут пробовать построить граф, взяв части отрезков в качестве рёбер. Нужно показать им, что в таком случае они не могут знать точно количество вершин. Более того, на самом деле попытка подсчитать количество вершин в такой модели приведёт как раз к тому же противоречию: необходиомости поделить нечётное число пополам.*

$\boxed{\mathbf{4}}$ В конференции участвовали 19 ученых. После конференции каждый из них отправил 2 или 4 письма участникам этой конференции. Могло ли случиться, что каждый получил ровно по 3 письма?

Решение. Пусть учёные будут вершинами графа, а письма — рёбрами. Тогда степень каждой вершины нечётная: пять или семь. Но всего вершин 19, получаем противоречие с леммой. □

–Учащийся может решить задачу просто через чётность, указав, что отправлено чётное число писем, а получено должно быть нечётное.

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Какой здесь получается граф, что в нём вершины, а что рёбра? Как применить здесь лемму о рукопожатиях?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Из столицы Тридевятого царства выходит 39 дорог, из крепости Дальняя выходит одна дорога, а из всех остальных городов царства выходит по 20 дорог (любые два города соединяются не более чем одной дорогой, и дорог с началом и концом в одном и том же городе нет). Доказать, что гонец царя может проехать по дорогам из столицы в крепость Дальнюю.

Решение. Предположим, что это неверно. Тогда граф городов–дорог распадается как минимум на две компоненты связности: в одной будет столица, а в другой — Дальний. В первой компоненте число дорог должно быть равно $(39+20n) : 2$, где n — число нестоличных городов в этой компоненте. А это число дорог при любом целом n будет нецелым, чего не может быть. Аналогичная проблема будет и во второй компоненте связности. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Пусть гонец не может добраться до Дальней. Как тогда выглядит граф? Как применить лемму?

$\boxed{\mathbf{6}}$ При каком $n > 1$ может случиться так, что в компании из $n+1$ девочек и n мальчиков все девочки знакомы с разным числом мальчиков, а все мальчики — с одним и тем же числом девочек?

Ответ. **При нечётном.**

Решение. Каждая девочка может быть знакома минимум с 0, максимум с n мальчиками. Так как все девочки знакомы с разным числом мальчиков, то представлены все возможные количества знакомых мальчиков. Поэтому мы можем посчитать количество знакомств между мальчиками и девочками: $0+1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Получается, что каждый мальчик тогда знаком с $\frac{(n+1)}{2}$ девочками. Это возможно, только если n нечётное. Теперь убедимся, что любое нечётное n подходит, построив пример. Пусть для каждого k девочка, у которой k знакомых мальчиков, и девочка, у которой $n-k$ знакомых мальчиков, дружат с разными мальчиками. Тогда в сумме они дружат со всеми мальчиками. И каждый мальчик тогда дружит ровно с половиной девочек (с одной девочкой из каждой такой пары). □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Сколько может быть максимум знакомых мальчиков у девочки? А минимум? А сколько всего девочек? Сколько тогда знакомств мальчик-девочка?*

○ `Учащийся доказал, что чётным число девочек быть не может и утверждает, что тогда оно нечётное.`

–*Почему подойдёт любое нечётное число? Как могут быть устроены знакомства при нечётном числе девочек?*

$\boxed{\mathbf{7}}$ Каждый из 102 учеников одной школы знаком не менее, чем с 68 другими. Докажите, что среди них найдутся четверо, имеющие одинаковое число знакомых.

Решение. Пойдём от противного: пусть таких четверых нет. Тогда одинаковое число знакомых имеют не более, чем трое учеников. Но возможное число знакомых — от 68 до 101, всего 34 варианта. $102 = 34 \cdot 3$, поэтому при нашем предположении получается, что одинаковое число знакомых имеет ровно по трое учеников. Но в таком случае нечётное число знакомых имеют $34 : 2 \cdot 3 = 51$ — нечётное число учеников. Противоречие с леммой. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Попробуй предположить противное — что нет четверых, имеющих поровну знакомых. А сколько различных значений может принимать количество знакомых?

$\boxed{\mathbf{8}}$ В некотором городе на любом перекрёстке сходятся ровно 3 улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрёстке сходятся улицы трёх разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они имеют разные цвета.

Решение. Обозначим число перекрёстков через n. Предположим, что все три выходящие из города дороги одного цвета. Тогда дорог этого цвета внутри города будет $(n-3):2$ (от каждого перекрёстка, кроме тех трёх, от которых дороги идут наружу, отходит по одной дороге этого цвета, и каждая дорога соединяет два перекрёстка). Чтобы это число было целым, n должно быть нечётным. А дорог остальных цветов в городе будет по $n:2$, и чтобы это число было целым, n должно быть чётным.

Аналогично разбирается случай, когда из города выходят две дороги первого цвета и одна второго. В этом случае внутри города дорог первого цвета должно быть $(n-2):2$, а дорог второго — $(n-1):2$. Эти два числа одновременно не могут быть целыми ни при каком целом n. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Чётно или нечётно число перекрёстков в городе? Попробуй рассмотреть разные варинты, каких цветов могут быть выходящие из города три дороги.

Листок 8. Просто о простых

На этом занятии учащимся предстоит вспомнить, что такое простые и составные числа, вспомнить разложение составного числа на простые множители, понять, как устроены делители составного числа и сколько их может быть.

В начале занятия необходимо напомнить определения простых и составных чисел, схему проверки числа на простоту. К примеру, можно разобрать, является ли простым число 89. Для этого достаточно проверить, есть ли у него простые делители: если есть составные делители, то есть и простые, если нет простых делителей — то нет и составных. Простые числа 2, 3, 5, 7, 11 не являются его делителями. Если бы был простой делитель больше 11, то, разделив 89 на этот делитель, получили бы другой делитель, меньший $89 : 11$, а следовательно, не превосходящий 8. Значит, нашелся бы и простой делитель меньше 8. А такого не нашлось, значит, нет и простых делителей больше 11. Стало быть, число 89 простое.

Доказательство основной теоремы арифметики на этом занятии не предусматривается. Но предлагается сформулировать её, привести пример разложения числа на простые множители, обсудить смысл единственности разложения.

Определение. *Простое число* — это натуральное число, большее единицы, которое делится нацело <u>только</u> на единицу и на само себя. Остальные натуральные числа, большие единицы, называют *составными.* Единицу не относят ни к простым, ни к составным числам.

Теорема 1. *Чтобы проверить, является ли натуральное число n составным, достаточно проверить, делится ли оно на какое-нибудь из простых чисел, не превосходящих $\sqrt{n}$. (По определению $\sqrt{n}$ — это такое <u>неотрицательное</u> число, что $(\sqrt{n})^2 = n$.)*

Теорема 2 (основная теорема арифметики)**.** *Каждое натуральное число можно разложить на простые множители, причём такое разложение единственно с точностью до перестановки этих множителей.*

$\boxed{\mathbf{1}}$ Являются ли простыми следующие числа: 79; 461; 1001; 2817? Составные числа разложите на простые множители.

Ответ. **79 и 461 простые;** $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$**;** $2817 = 3^2 \cdot 313$**.**

Решение. Решение подразумевается такое же, как в разобранном у доски примере с 89. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Понятен ли был пример с 89? Сможешь аналогично перебрать возможные простые множители в этих случаях? Если нет — стоит ещё раз разобрать с учащимся алгоритм действий на примере какого-нибудь числа.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Представьте число 200000 в виде произведения двух чисел, в десятичной записи которых нет нулей.

Решение. $200000 = 2 \cdot 10^5 = 2 \cdot 2^5 \cdot 5^5 = 2^6 \cdot 5^5$. Ноль на конце числа получается, когда число делится на $10 = 2 \cdot 5$, поэтому двойки и пятерки надо разнести в разные сомножители. Получится так: $200000 = 2^6 \cdot 5^5 = 64 \cdot 3125$. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Попробуй разложить 200000 на множители. Когда число имеет на конце 0? Какие множители оно должно иметь?

$\boxed{\mathbf{3}}$ **а)** Может ли число 2^n оканчиваться нулём при каком-нибудь натуральном n? **б)** Может ли квадрат натурального числа оканчиваться ровно пятью нулями?

Ответ. а) **Не может.** б) **Не может.**

Решение. **а)** Число 2^n не содержит в своём разложении на простые множители пятёрок, а потому не может делиться на 10. **б)** Если в разложении числа на простые множители ровно пять нулей, то оно делится на $10^5 = 2^5 \cdot 5^5$ и не делится на 10^6. Но тогда или двойка, или пятерка входит в разложение на простые пятой степени, а в разложение квадрата на простые множители все множители должны входить в чётных степенях. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Когда число имеет на конце 0? Какие множители оно должно иметь? А когда число имеет ровно пять нулей на конце?

○ `Учащийся понял, что квадрат должен делиться на` $10^5 = 2^5 \cdot 5^5$`, но не заметил или не доказал, что разложение квадрата на простые множители имеет чётные степени.`

–Рассмотри какой-нибудь квадрат. Что можно сказать про его простые множители? А про их степени? А почему для любого квадрата это верно? А какие простые множители у корня из такого квадрата?

$\boxed{\mathbf{4}}$ Натуральное число умножили на произведение его цифр и получили: **а)** 1533; **б)** 366. Найдите исходное число в каждом из этих случаев.

Ответ. **а) 73; б) 61.**

Решение. **а)** $1533 = 3 \cdot 7 \cdot 73$; **б)** $366 = 2 \cdot 3 \cdot 61$. В каждом случае искомое число делится на простой множитель, больший 9. В обоих случаях это оказывается сам этот множитель, но другие варианты тоже надо проверять. Не надо забывать, что в произведении может участвовать и единица. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Попробуй разложить эти числа на множители. Какие из них могут быть произведением цифр, а какие — самим числом? А почему нет других вариантов?

$\boxed{\mathbf{5}}$ Сколько различных делителей у числа: **а)** 81; **б)** 36; **в)** $2^4 \cdot 5^7 \cdot 11^5$; **г)** $p^a \cdot q^b \cdot r^c$ (p, q, r — различные простые числа, a, b, c — натуральные)?

Ответ. **а) 5, б) 9, в) 240, г)** $(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)$**.**

Решение. **а)** Число $81 = 3^4$ имеет 5 делителей: $3^0, 3^1, \ldots, 3^4$. **б)** Число $36 = 2^2 \cdot 3^2$ имеет $(2+1)\cdot(2+1) = 9$ делителей: каждый простой сомножитель входит в делитель в степени от 0 до той, в которой он входит в разложение самого числа 36. **в)** Аналогично пункту **б)**, число $2^4 \cdot 5^7 \cdot 11^5$ имеет $(4+1)\cdot(7+1)\cdot$

$(5+1) = 240$ делителей. **г)** Аналогично предыдущим пунктам, число$p^a \cdot q^b \cdot r^c$ имеет $(a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)$ делителей. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Попробуй перечислить делители. Как они связаны с разложением числа на простые множители? Как они выглядят? А как их перечислить все?

6 Приведите пример целого числа, у которого ровно 2014 делителей.

Решение. По аналогии с предыдущей задачей: например, число 2^2013 имеет $2013+1 = 2014$ делителей: $2^0, 2^1, \ldots, 2^2013$. Так же и число p^2013 для любого простого p. Есть и такой вариант: $p \cdot q^18 \cdot r^52$, поскольку $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$. Также есть и другие варианты, зависящие от разбиения числа 2014 в произведение множителей: количество таких множителей соответствует количеству простых множителей искомого числа. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Вспомни пятую задачу. От чего зависит число делителей? Как может выглядеть разложение на простые множители для 2014 делителей?

7 Число $2n$ имеет ровно 15 различных натуральных делителей. Сколько различных натуральных делителей может иметь число n?

Ответ. **10, 12 или 14**

Решение. Действуем по аналогии с задачей 5г. $15 = (2+1)\cdot(4+1) = (14+1)\cdot 1$. Поэтому число $2n$ может иметь либо два различных простых множителя (тогда один из них двойка), либо всего один простой множитель (и это двойка). В первом случае может быть $2n = 2^4 \cdot p^2$ или $2n = 2^2 \cdot p^4$, где $p \neq 2$ простое, а во втором случае $2n = 2^14$. Соответственно, имеем $n = 2^3 \cdot p^2$, $n = 2 \cdot p^4$ или $n = 2^13$. Тогда число n имеет, соответственно,

$(3+1)\cdot(2+1) = 12$, $(1+1)\cdot(4+1) = 10$ или $13+1 = 14$ делителей. $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Вспомни пятую задачу. От чего зависит число делителей? Как может выглядеть разложение на простые множители для 15 делителей?

$\boxed{\mathbf{8}}$ Сколько существует различных натуральных чисел, у которых самый большой делитель, не считая самого числа, равен 55?

Ответ. **Три.**

Решение. Пусть искомое число n представимо в виде $n = 55d$, $d \neq 1$. Если $d > 5$, то у числа n есть еще делитель $11d$, $55 < 11d < n$; что противоречит условию. Значит, есть только варианты $d = 2$, $d = 3$, $d = 4$, $d = 5$. В случае $d = 4$ имеем $n = 220 \vdots 110$, $110 > 55$. Итого остается 3 различных числа. Это числа 110, 165, 275. $\square$

$\boxed{\mathbf{9}}$ Докажите, что натуральное число является полным квадратом тогда и только тогда, когда оно имеет нечётное число делителей.

Решение. Если число делителей числа n нечетно, значит, все степени простых множителей числа n были четными, и, поделив их на два, получим разложение числа $\sqrt{n}$ на простые множители. Обратно, если n — квадрат, то все степени простых множителей должны быть чётны, а потому количество делителей числа n — нечётно. $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Вспомни задачи 5г и 3б. Как выглядит разложение квадрата на простые множители? А как считается количество делителей?

$\boxed{\mathbf{10}}$ Квадрат натурального числа умножили на куб другого натурального числа. Могло ли в результате получиться: **а)** 112? **б)** 175830?

Ответ. **а) Нет. б) Нет.**

Решение. **а)** $112 = 2^4 \cdot 7$, а семёрка должна встречаться либо в разложении квадрата в чётной степени, либо в разложении куба в степени, кратной 3. **б)** Повторяем рассуждение предыдущего пункта с пятёркой. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Какие простые множители у итогового числа? Как они могли бы входить в квадрат и в куб?*

$\boxed{\mathbf{11}}$ Вычеркните из произведения $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 99! \cdot 100!$ один из факториалов, чтобы оставшееся произведение было квадратом целого числа.

Решение. Разобьем факториалы на пары: $1!\ 2!$, $3!\ 4!$, $\ldots$, $99!\ 100!$. В каждой паре при перемножении соответствующих одинаковых сомножителей будут получаться квадраты, а оставаться будут множители, соответственно, $2, 4, 6, \ldots, 98, 100$. Их произведение равно $2 \cdot (2 \cdot 2) \ldots (2 \cdot 49)(2 \cdot 50) = 2^{50} \cdot 50! = (2^{25})^2 \cdot 50!$. Поэтому, поделив произведение на $50!$, получим число, представленное в виде произведения большого числа сомножителей, каждый из которых стоит в четной степени. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Попробуй поискать множители, которые будут в чётных степенях. Может быть, удобнее иметь дело с целыми группами множителей?*

Листок 9. НОД и НОК

В начале занятия следует напомнить определения НОД и НОК. Затем обсудить на примерах, как их вычислять через разложение на простые множители. Общую формулу можно пока не писать и не доказывать: для этого есть отдельная задача, а вот проделать все рассуждения полезно. Стоит разобрать примеры, когда: **а)** у обоих чисел только один простой делитель (например, 27 и 81); **б)** у чисел одинаковые простые делители, но в разных степенях (например, 36 и 24); **в)** у чисел изначально разные наборы простых делителей (например, 15 и 42).

Наконец, разобрать у доски следующую задачу.

• Коля, Серёжа и Ваня регулярно ходят в кинотеатр: Коля бывал в нём каждый 3-й день, Серёжа — каждый 5-й, Ваня — каждый 7-й. Сегодня все ребята были в кино. Когда все трое встретятся в кино в следующий раз?

Решение. Начнем нумеровать дни, начиная с завтрашнего (сегодняшний день — «нулевой»). Коля будет ходить в кино в те дни, номера которых делятся на 3, Сережа — в те дни, номера которых делятся на 5, Ваня — в те дни, номера которых делятся на 7. Чтобы они все вместе оказались в кино, номер дня должен делиться и на 3, и на 5, и на 7. Раньше всего это произойдет в день с номером НОК$(3,5,7) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$. $\square$

Определение. *Наибольший общий делитель целых чисел a и b* — это наибольшее натуральное число c со свойством $a \vdots c$, $b \vdots c$. Обозначается НОД(a,b) или просто (a,b). Аналогично определяется НОД нескольких целых чисел.

Определение. *Наименьшее общее кратное целых чисел a и b* — это наименьшее натуральное число c со свойством $c \vdots a$, $c \vdots b$. Обозначается НОК(a,b) или $[a,b]$. Аналогично определяется НОК нескольких целых чисел.

Теорема 1. *Пусть числа a и b разложены на простые множители: $a = p_1^{m_1} \dots p_k^{m_k}$, $b = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$, где $m_i \geqslant 0$, $n_i \geqslant 0$. Тогда их НОД и НОК можно найти по формулам:*

$$\begin{aligned} \text{НОД}(a,b) &= p_1^{\min\{m_1,n_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min\{m_k,n_k\}}, \\ \text{НОК}(a,b) &= p_1^{\max\{m_1,n_1\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{m_k,n_k\}}. \end{aligned}$$

Теорема 2. *Для любых двух целых чисел a и b имеет место равенство*

$$\text{НОД}(a,b) \cdot \text{НОК}(a,b) = a \cdot b.$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ Вычислите (без калькулятора!): **а)** (8, 64) и [8, 64]; **б)** (36, 60) и [36, 60]; **в)** (125, 1 534 569) и [54, 163]; **г)** $(2^3 \cdot 3^{15} \cdot 7^{19},\ 2^{31} \cdot 3^2 \cdot 11^3)$ и $[2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2,\ 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3]$.

Решение. **а)** (8, 64) = 8, [8, 64] = 64; **б)** (60, 36) = 12, [60, 36] = 180; **в)** (125, 1 534 569) = 1, ибо $125 = 5^3$, а $5 \nmid 1\,534\,569$; $[54,\ 163] = 54 \cdot 163 = 8802$, ибо 163 — простое число; **г)** $(2^3 \cdot 3^{15} \cdot 7^{19},\ 2^{31} \cdot 3^2 \cdot 11^3) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$, $[2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2,\ 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3] = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3 = 27000$. □

–Учащиеся должны доводить решение до числового ответа без калькулятора!

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Повторить пример, разобранный у доски, по шагам или разобрать с ним вместе аналогичный.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Бак был полон воды. Эту воду поровну перелили в три бидона. Оказалось, что в первом бидоне вода заняла половину его объёма, во втором — $\frac{2}{3}$ объёма, а в третьем — $\frac{3}{4}$ его объёма. Бак и все три бидона вмещают по целому числу литров. При каком наименьшем объёме бака это возможно?

Решение. Пусть бак вмещает x литров воды. Тогда $2 \cdot \frac{1}{3}x$ литров — целое число, так как это объем первого бидона. Аналогично $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}x$ и $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}x$ — тоже целое число литров. Отсюда $x \,\vdots\, 9$ и $x \,\vdots\, 2$. Минимальное число – 18, оно подходит, можно проверить. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Сколько литров могло быть в баке? Например, 5 могло быть? А почему? Какой бы тогда был объём бидонов?

○ `Учащийся подобрал пример.`

–Почему этот объём наименьший? А вдруг бывает меньше?

3 Ровно в полдень Клайв закрасил число 12 на циферблате часов красным цветом и решил через каждые 57 часов закрашивать текущий час в красный цвет. **а)** Сколько чисел окажутся покрашенными через месяц? **б)** А если Клайв будет красить их каждый 1913-й час в течение всей жизни?

Решение. $(12{,}57) = 3$, $(12{,}1913) = 1$, поэтому в первом случае закрашены будут 3-ий, 6-ой, 9-ый и 12-ый часы, а во втором — все часы. $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Какие числа он мог покрасить? Например, какое он покрасит вторым? А третьим? А что между ними общего?

○ `Учащийся доказал, что 12 и 1913 взаимно просты, но не доказал, что все часы будут закрашены.`

–А почему будут закрашены все 12 чисел? Как ты думаешь, когда он попадёт на уже закрашенный час? Сколько для этого времени должно пройти? Сколько оборотов сделает при этом стрелка?

4 **а)** Про натуральные числа a и b известно, что $15a = 14b$ и $(a, b) = 13$. Найдите a и b. **б)** Пусть a и b — целые числа, удовлетворяющие равенству $56a = 65b$. Докажите, что $a + b$ — составное число.

Ответ. **а)** $a = 14 \cdot 13, b = 15 \cdot 13$

Решение. **а)** $a = 14m, b = 15n$. Больше того, раз $(a, b) = 13$, а 14 и 15 взаимно просты, то $a = 13 \cdot 14k, b = 13 \cdot 15l$, причем $(k, l) = 1$. Подставляем в исходное равенство, получаем что $k = l$, что вкупе с фактом $(k, l) = 1$ дает ответ. **б)** Поскольку

$(56,65)=1$, то $56|b$ и $65|a$. Отсюда $a=65m, b=56n$. Подставим это в исходное равенство: $56\cdot 65m = 65\cdot 56n \Rightarrow m=n \Rightarrow a+b = (65+56)n = 121n$. Доказали требуемое. $\square$

$\circ$ `Учащийся не знает, что делать.`

–На что точно делится a? А b? В каком виде их можно записать? А если учесть равенство?

$\circ$ `Учащийся утверждает, что если` $a\cdot x = b\ cdoty$`, то` $a\vdots y, b\vdots x$.

–Уверен, что это всегда верно? Если $35a = 21b$*, то обязательно* $a\vdots 21$*? А почему в этой задаче так? А если разложить на простые множители?*

$\boxed{5}$ **а)** Объясните, почему в теореме 1 можно считать, что числа a и b имеют один и тот же набор простых множителей $p_1,\ldots,p_k$. (Обратите внимание, что некоторые m_i и n_i могут быть равны нулю!) **б)** Докажите теорему 1. **в)** С помощью теоремы 1 докажите теорему 2. **г)** Когда НОК$(a,b)=ab$?

Решение. **а)** Если не так, то дописываем к разложению обоих чисел недостающие множители в нулевых степенях. **б)** Нетрудно убедиться в том, что $p_1^{\min\{m_1,n_1\}}\cdot\ldots\cdot p_k^{\min\{m_k,n_k\}}$ и впрямь общий делитель, а $p_1^{\max\{m_1,n_1\}}\cdot\ldots\cdot p_k^{\max\{m_k,n_k\}}$ — общее кратное. Также отметим, что если в делителе присутствуют другие простые множители в ненулевых степенях (которых нет в обоих исходных числах), то он не может быть общим делителем, а если в кратном присутствуют другие простые множители в ненулевых степенях (которых нет в обоих исходных числах), то на без них общее кратное останется общим, но станет меньше. Поэтому можно рассматривать только числа вида $p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$. Наконец, остаётся убедиться, что каждая степень не меньше (для НОК) и не больше (для НОД), чем в теореме. **в)** Нужно применить теорему 1 и воспользоваться тем, что $\min\{x,y\}\cdot\max\{x,y\} = x\cdot y$. **г)** Как следует из теоремы 2, НОК$(a,b)=ab \Leftrightarrow$ НОД$(a,b)=1$. $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`

– (а) А если наборы разные, как сделать их одинаковыми? Как добавить множители в каких-то степенях, не изменив при этом числа? (б) Как выглядит общий делитель двух таких чисел? Как выглядит делитель одного из них? А общий? А почему указанный в теореме будет наибольшим? А как теперь поступить с НОК? (в) Чему, как ты думаешь, равно $\min\{x, y\} \cdot \max\{x, y\}$*?*

–Эта задачу стоит разобрать у доски. В конце или в середине занятия — в зависимости от того, насколько бодро пошло решение задач у учащихся.

6 Докажите, что среди любых десяти последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными.

Решение. Максимум общий делитель у двух таких чисел не превосходит их разности, то есть девяти. При этом простой общий делитель не превосходит семи. Среди 10 последовательных чисел есть такое, которое не делится на числа 2, 3, 5, 7, а значит, не имеет общих делителей с остальными. Действительно, среди этих чисел 5 делятся на 2. Среди оставшихся чисел не более 2 делятся на 3, и не более одного — на 5 и 7. Таким образом исключается не более 9 чисел, остаётся хотя бы одно. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Чему может быть равен НОК у двух чисел из такого десятка? А когда можно точно сказать, что они взаимно просты? Есть ли число, у которого не будет такого делителя?

7 Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное равно 2 000?

Решение. Пусть $\text{НОК}(a, b) = 2000$. Рассмотрим две возможности.

1) Одно из чисел равно 2000. Тогда другое число может быть любым делителем числа 2000. Поскольку $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, оно имеет 20 делителей.
2) Ни одно из двух чисел a, b не равно 2000. Тогда в разложении одного из этих чисел a, b (для определенности, a) на простые сомножители должен присутствовать множитель 2^4, а в разложении другого — множитель 5^3. Таким образом, $a = 2^4 \cdot 5^m$, $b = 2^n \cdot 5^3$, где m может принимать 3 значения (0, 1, 2) и независимо от этого n может принимать 4 значения (0, 1, 2, 3). Таким образом, в этом случае имеется $3 \cdot 4 = 12$ возможностей. Итак, имеется $20 + 12 = 32$ пары натуральных чисел, имеющие НОК $= 2000$. $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Как могут выглядеть числа, у которых такой НОК? Примени формулу из теоремы.

Листок 10. Алгоритм Евклида

В начале занятия нужно напомнить определение НОД и взаимно простых чисел. Затем пояснить, как и почему работает алгоритм Евклида (сослаться на задачи 1 и 2, не решая их), на примерах: скажем, НОД(256, 320) и НОД(713, 1024). В частности нужно объяснить, почему алгоритм всегда сходится к паре $(d, 0)$.

В середине занятия стоит разобрать задачи 1 и 2, предупредив об этом заранее.

Определение. *Наибольший общий делитель целых чисел a и b —* это наибольшее натуральное число c со свойством $a \vdots c$, $b \vdots c$. Обозначается НОД(a, b) или просто (a, b). Аналогично определяется НОД нескольких целых чисел.
Целые числа a и b называются *взаимно простыми,* если НОД$(a, b) = 1$.

Во всех задачах этого занятия латинскими буквами обозначаются целые числа (и даже натуральные, если не оговаривается иное).

$\boxed{\mathbf{1}}$ Пусть $a \geqslant b$. Докажите, что НОД$(a, b) =$ НОД$(a - b, b)$.

Решение. Всякий общий делитель чисел a и b является также делителем числа $a-b$, а всякий общий делитель чисел a и $a-b$ является также делителем числа b. Поэтому НОД$(a, b) \vdots$ НОД$(a-b, b)$, НОД$(a-b, b) \vdots$ НОД(a, b). Отсюда следует, что НОД$(a, b) =$ НОД$(a - b, b)$. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`
–Попробуй доказать, что левая часть делится на правую, а правая — на левую. Кстати, как из этого следует, что они равны?

$\boxed{\mathbf{2}}$ (шаг алгоритма Евклида) Пусть a и b — натуральные числа и $a > b$. Поделим a на b с остатком: $a = bq + r$, $0 \leqslant r < b$.

Докажите, что

$$\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(b, r).$$

Решение. Применяем результат предыдущей задачи q раз. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Воспользуйся задачей 1.*

Алгоритм Евклида. Для вычисления НОД(a, b) начнём с пары чисел (a, b) и будем применять шаги, описанные в предыдущей задаче. При каждом переходе от пары (*делимое, делитель*) к паре (*делитель, остаток*) оба числа в паре уменьшаются, а их НОД сохраняется. В некоторый момент получим пару $(d, 0)$, где $d =$ НОД(a, b).

$\boxed{\mathbf{3}}$ Не раскладывая числа на простые множители, вычислите: **а)** НОД(861, 637); **б)** НОД(2014, 7813); **в)** НОД(121, 759).

Ответ. **а) 7; б) 1; в) 11.**

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Стоит ещё раз разобрать пример на применение алгоритма по шагам.*

$\boxed{\mathbf{4}}$ Сократите дробь $\dfrac{5840383}{34173679}$.

Решение. $\dfrac{1217}{7121}$. Наибольший общий множитель 4799 числителя и знаменателя, на который и надо сократить, ищем с помощью алгоритма Евклида. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Что нам нужно, чтобы сократить дробь? А как нам это сделать?*

$\boxed{\mathbf{5}}$ Найдите: **а)** НОД$(n,\ n+1)$; **б)** НОД$(2n,\ 2n+2)$; **в)** НОД$(3n,\ 6n+3)$; **г)** НОД$(2n+13,\ n+7)$.

Решение. **а)** НОД$(n,\ n+1) =$ НОД$(n,\ 1) = 1$; **б)** НОД$(2n,\ 2n+2) =$ НОД$(2n,\ 2) = 2$; **в)** НОД$(3n,\ 6n+3) =$ НОД$(3n,\ 3) = 3$;

г) НОД$(2n+13,\ n+7) = $ НОД$(n+6,\ n+7) = $ НОД$(n+6, 1) = 1$. $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Попробуй использовать задачи 1 и 2.

$\boxed{\textbf{6}}$ На доске написаны числа a и b. Ваня заменяет одно из чисел на сумму или разность написанных чисел. Какое минимальное натуральное число он может получить за несколько таких операций, если:
а) $a = 1001,\ b = 759$; **б)** $a = 7n + 3,\ b = 11n + 5$.

Решение. В обоих случаях получится НОД(a, b), поскольку числа на доске всё время будут делиться на НОД(a, b), а минимальное натуральное число, делящееся на НОД(a, b) — сам НОД(a, b). **а)** НОД$(1001, 759) = 11$; **б)** НОД$(7n + 3, 11n + 5) = $ НОД$(7n+3, 4n+2) = $ НОД$(3n+1, 4n+2) = $ НОД$(3n+1, n+1) = $ НОД$(n - 1, n + 1) = $ НОД$(n - 1, 2)$. Это 2, если n нечетно, и 1, если n четно. $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Что будет оставаться неизменным при таких операциях? Вспомни задачу 1.

$\boxed{\textbf{7}}$ Возьмём прямоугольник $m \times n$ клеточек и будем раз за разом отрезать по клеточкам от него квадрат с максимально возможной стороной. В итоге получится квадрат. С какой стороной?

Решение. НОД(m, n). Длины сторон получающихся прямоугольников будут образовывать такие же пары чисел, как в алгоритме Евклида для пары (m, n). $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Попробуй рассмотреть конкретный прямоугольник. Что с ним будет происходить? На что это похоже? Возможно, тебе помогут задачи 1 и 2.

$\boxed{8}$ Найдите:
а) НОД$(10^7-1,\ 10^5-1)$; **б)** НОД$(\underbrace{11\ldots1}_{m},\ \underbrace{11\ldots1}_{n})$; **в)** НОД$(a^m-1,\ a^n-1)$.

Решение. **а)** НОД$(10^7-1,\ 10^5-1) = 10^{\text{НОД}(7,5)}-1 = 9$;

б) НОД$(\underbrace{11\ldots1}_{m},\ \underbrace{11\ldots1}_{n}) =$ НОД$(\underbrace{99\ldots9}_{m},\ \underbrace{99\ldots9}_{n}) : 9 =$ НОД$(10^m-1,\ 10^n-1) : 9 = (10^{\text{НОД}(m,n)}-1) : 9$;

в) НОД$(a^m-1,\ a^n-1) =$ НОД$(a^m-a^n, a^n-1) =$ НОД$(a^n(a^{m-n}-1), a^n-1) =$ НОД$(a^{m-n}-1, a^n-1) = \ldots$ (типа алгоритма Евклида со степенями) $= a^{\text{НОД}(m,n)}-1$. □

○ Учащийся не знает, что делать.
–Попробуй применить алгоритм Евклида к эти парам. Ведь общий множитель двух чисел можно вынести за скобки НОДа, не так ли? А почему? А если одно из чисел имеет множитель, которого не имеет другое, то в НОД этот множитель всё равно не попадёт?

$\boxed{9}$ Докажите, что НОД$(5a+3b,\ 13a+8b) =$ НОД(a,b).

Решение. НОД$(5a+3b,\ 13a+8b) =$ НОД$(5a+3b, 3a+2b) =$ НОД$(2a+b, 3a+2b) =$ НОД(a,b). □

○ Учащийся не знает, что делать.
–Вспомни задачи 1 и 2.

Листок 11. Математические игры-1: явные стратегии

В начале занятия предлагается подробно разобрать что такое выигрышная стратегия: алгоритм, который приводит к выигрышу в любой ситуации и при любых ходах соперника. Можно разобрать стратегию, например, для следующей игры.

• Имеются две кучки по 10 спичек. Двое по очереди берут спички, причём за один ход разрешается брать любое количество спичек, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Выигрышная стратегия для второго игрока: брать из кучки, нетронутой первым на предыдущем ходе, столько же спичек, сколько взял до этого первый. При этом после его хода в обеих кучках остаётся поровну спичек. Поэтому если у первого получилось сделать ход, то он нарушил эту симметрию, и второй сможет сделать ход, восстановив её. Раз у второго ответный ход есть всегда, значит, при игре второго по такой стратегии проиграет первый. □

– Важно объяснить, что для игр, где стратегия имеет смысл (кроме игр-шуток), важно показать, что стратегия и впрямь всегда позволяет сделать ход и приводит к выигрышу. Например, для симметричных стратегий важно показать, что симметричная ситуация всё время будет восстанавливаться. Необходимо указывать на это учащимся, чтобы их решения содержали эти рассуждения.

–Первый совет каждому учащемуся — поиграть в игру с соседом по парте и попробовать «нащупать» стратегию. Если числа в игре слишком велики, можно их уменьшить.

–Если учащийся предлагает неверную стратегию, лучше всего сыграть по его стратегии и проиграть.

В приведённых ниже задачах описаны правила различных игр. Требуется указать выигрышную стратегию для одного из иг-

роков. ***Стратегия*** *— это набор правил, по которым игрок должен делать свои ходы в зависимости от предыдущих ходов противника и текущей позиции. Для игрока, делающего первый ход, стратегия должна включать в себя и выбор первого хода.*

Игры-шутки (исход игры не зависит от ходов противников)

$\boxed{\mathbf{1}}$ В строчку выписано 100 единиц. Кирилл и Даниил по очереди ставят между какими-нибудь двумя соседними единицами знак плюс или минус. Когда между всеми соседними числами поставлены знаки, вычисляется результат. Если полученное число чётно, то выигрывает Кирилл, в противном случае — Даниил. Кто выиграет, если начинает Кирилл?

Решение. Как при прибавлении единицы, так и при вычитании четность числа изменяется. Так как было выписано четное число единиц (100 штук), то результат будет четным (вне зависимости от расстановки плюсов и минусов). Поэтому выиграет Кирилл вне зависимости от ходов противников. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Как изменится итоговый результат, если в одном месте поменять плюс на минус или наоборот? Что из этого следует?

$\boxed{\mathbf{2}}$ На доске написано 10 единиц и 10 двоек. Двое играют по следующим правилам: за ход разрешается стереть две любые цифры и, если они были одинаковыми, написать двойку, а если разными — единицу. Если последняя оставшаяся на доске цифра — единица, то выиграл первый игрок, если двойка — то второй. Кто выиграет?

Решение. Будем следить за суммой чисел, написанных на доске. Заметим, что при каждом ходе ее четность не меняется, т. к. либо вычитается четное число и прибавляется двойка, либо вычитается нечетное число и прибавляется единица. Т. к.

вначале сумма чисел была четной, то последняя цифра, оставшаяся на доске, четна — т.е это двойка. Поэтому выигрывает второй. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Как изменяется сумма всех чисел на доске? Что остаётся неизменным? А какой она будет в итоге?*

3 Маша и Ваня по очереди ломают шоколадку «Алёнка» размером 6×8. За один ход можно сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет, если первый разлом делает Маша?

Решение. Шоколадка состояла из одного куска. После каждого хода количество кусков увеличивается на один. В конце игры стало 48 кусков, поэтому было сделано 47 разломов – нечетное число. Т. к. Маша делает каждый нечетный разлом, то она сделает и последний ход, поэтому выиграет. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Сколько всего максимум ходов можно сделать? А минимум?*

Симметричные стратегии

4 Остап Бендер провел сеанс одновременной игры в шахматы с двумя гроссмейстерами, причем с одним из соперников он играл чёрными фигурами, а с другим — белыми. За этот сеанс Остап получил 1 очко. (За победу в шахматной партии дается 1 очко, за ничью пол-очка, за поражение — 0 очков.) Как он смог этого добиться?

Решение. Первым ходил соперник Остапа, играющий белыми. После этого Остап повторил его ход на другой доске. Таким образом в каждой из партий Остап Бендер повторял ходы соперника из другой партии так, что фактически гроссмейстеры играли друг с другом на разных досках. Если один из соперников Бендера получил 1 очко, то Бендер получил 1 очко в партии с другим. В случае ничьей каждый игрок получил за каждую сыгранную партию по 0,5 очка, т. е. Бендер в сумме набрал 1 очко. □

5 Двое по очереди кладут пятаки на круглый стол, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. Первый игрок первым ходом кладет пятак в центр стола. Затем делает ходы симметрично ходам первого относительно центра стола. Поэтому первый всегда сможет сделать ответный ход. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Подумай, какую симметрию здесь можно использовать.*

6 Имеются две кучки: в одной 20, в другой 30 спичек. Двое по очереди берут спички, причём за один ход разрешается брать любое количество спичек, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Выигрышная стратегия для первого игрока: первым ходом взять из большей кучки 10 спичек, а затем воспользоваться стратегией из игры, разобранной у доски в начале занятия. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Вспомни задачу, которая была разобрана у доски. Как свести эту задачу к той?*

7 В каждой клетке доски 7×7 стоит шашка. Двое по очереди снимают с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает снявший последнюю шашку. Укажите выигрышную стратегию для первого игрока.

Решение. Стратегия: первым ходом необходимо снять шашку из центра доски, а затем делать ходы, симметричные относительно центра доски ходам второго. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`
–*Вспомни пятую задачу. Чем похожи эта и та задача?*

Дополнение ходов соперника

8 В куче лежит 50 камней. Двое по очереди добавляют в нее от 1 до 9 камней. Выигрывает тот, кто доведет число камней до 200. Кто это будет — первый или второй?

Решение. У второго есть выигрышная стратегия. Второй всегда может дополнить ход первого до 10 в сумме. Поэтому после хода первого последняя цифра будет ненулевая, а после хода второго — нулевая. При такой стратегии у второго всегда есть ход, пока камней меньше 200, кроме того, всякий раз если после хода второго камней осталось меньше 200, то и после следующего хода первого их по прежнему будет меньше 200. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`
–*Как можно отвечать на ход соперника так, чтобы в сумме вы клали всё время одно и то же число камней?*

9 Преподаватели Аня и Таня поедают 40 школьников. За ход разрешается съесть двоих, троих или четверых школьников. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет в поедании школьников, если начинает Аня?

Решение. Всегда можно дополнить ход соперника до шести съеденных школьников в сумме. Поэтому у Ани есть выигрышная стратегия: съесть четверых школьников, сделать тем самым количество оставшихся школьников кратным шести, дополнять ход Тани до шести. При этом у Ани всегда будет ход, так как если Таня начала очередную шестёрку, то от этой шестёрки что-то осталось, что сможет доесть Таня. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Как можно отвечать на ход соперника так, чтобы в сумме обе всё время ели одно и то же число школьников?*

$\boxed{\mathbf{10}}$ *Игра «Баше».* **а)** Имеется полоска клетчатой бумаги длиной 10 клеток. В крайней правой её клетке стоит шашка. Двое играющих по очереди передвигают ее влево на одну или две клетки. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

б) Кто выигрывает в игре «Баше», если длина полоски составляет 11 клеток? 12 клеток? 13 клеток? 2000 клеток?

в) Изменим правила игры «Баше»: теперь за один ход можно сдвигать шашку на 1, 2, 3, 4 или 5 клеток, а длина полоски — 13 клеток.

г) А теперь в игре «Баше» можно сдвигать шашку на 3, 6, 9 или 12 клеток, а длина полоски — 40 клеток.

Решение. **а)** Ходы можно дополнять до сдвига на три клетки. Всего сдвинуть нужно на 9 клеток, поэтому выиграшная стратегия есть у второго.

б) Ходы можно дополнять до сдвига на три клетки. Всего сдвинуть нужно на 10, 11, 12, 1999 клеток. В случае 12 дополняющая стратегия принесёт победу второму. В остальных случаях первым ходом первый сдвинет шашку число клеток равное остатку от деления 10, 11, 1999 на 3. После этого уже он сможет выиграть, дополняя каждый сдвиг второго до трёх.

в) Ходы можно дополнять до сдвига на 6 клеток. Всего сдвинуть можно на 12 клеток, поэтому выиграшная стратегия есть у второго.

г) Шашка может сдвигаться только на поля, отстоящие от стартового на кратное трём число клеток. Всего таких полей 13, не считая стартового. Получается, эта игра аналогична игре на полоске длины 14, где сдвигать шашку разрешается на

1, 2, 3 или 4 клетки. В такой игре ходы можно дополнять до сдвига на 5 клеток, всего сдвинуть можно на 13 клеток, поэтому выигрышная стратегия есть у первого игрока: свдинуть шашку на 3 клетки и дополнять ходы соперника. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`
–У тебя уже получились задачи 8 и 9? Попробуй здесь применить ту же стратегию. Как её модифицировать для каждого пункта?

Листок 12. Математические игры-2: анализ позиций

В начале занятия нужно объяснить, как проводится анализ выигрышных и проигрышных позиций, алгоритм которого описан в листике. Это можно сделать на примере следующей задачи:

• Имеется полоска клетчатой бумаги длиной 15 клеток. В крайней правой её клетке стоит шашка. Двое играющих по очереди передвигают её влево на 1, 3 или 4 клетки. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение. Анализируем выигрышные и проигрышные позиции, начиная с конца полоски. Клетка 15 — проигрышная (стоящий на ней перед своим ходом следующего хода сделать не может). Клетка 14 — выигрышная, т.к. с нее можно одним ходом попасть на проигрышную 15-ю. Клетка 13 проигрышная, так как из нее единственно возможный ход на 1 клетку ведет на выигрышную 14-ю. Далее продолжаем анализ в том же духе. В итоге получим такую картину: (клетку нумеруются слева направо): ПВВВВПВПВВВВПВП. Тем самым позиция 1 проигрышная, то есть первый игрок проиграет, если **второй** будет своими ходами двигать шашку на проигрышные позиции. □

–Подход в большинстве задач заключается в том, чтобы по указанным правилам расставить выигрышные и проигрышные позиции. Важно, чтобы учащиеся понимали, почему предложенные правила и впрямь описывают выигрышные и проигрышные позиции — это необходимо объяснить в начале и пояснять тем учащимся, у которых возникнут затруднения.
–Важно следить за тем, что учащийся правильно расставил выигрышные и проигрышные позиции. Можно получить верный ответ, допустив в решении несколько ошибок. Всегда для проверки можно предложить сыграть в эту игру или в аналогичную (если предложенные числа слишком большие).

*Позиция называется **выигрышной**, если игрок, делающий ход из этой позиции, может затем обеспечить себе выигрыш. В противном случае позиция называется **проигрышной**.*
Выигрышные и проигрышные позиции расставляются с конца по следующим правилам:

- *позиция, из которой нельзя сделать ход — проигрышная;*
- *если из позиции X **можно** попасть в проигрышную позицию, то позиция X — выигрышная;*
- *если **все** ходы из позиции X ведут в выигрышные позиции, то позиция X — проигрышная.*

Победу может обеспечить себе первый игрок, если начальная позиция — выигрышная, и второй, если она проигрышная. Выигрышная стратегия — ходить на проигрышные позиции.
В описанных ниже играх требуется предъявить выигрышную стратегию для одного из игроков.
$\boxed{\mathbf{1}}$ **а)** В левом нижнем углу доски 7×7 стоит *хромой король*, который за один ход может сдвинуться или на одну клетку вправо, или на одну клетку по диагонали вправо-вверх. Игроки ходят по очереди, Кто не может сделать ход — проиграл. **б)** А теперь хромой король может ходить ещё и на одну клетку вверх.

Решение. **а)** Верхняя горизонталь — проигрышная, вторая сверху — выигрышная, третья сверху — снова проигрышная, и т.д. Самая нижняя горизонталь — тоже проигрышная, так что выигрывает **второй.** **б)** Проигрышными будут клетки G7, G5, G3, G1, E7, E5, E3, E1, C7, C5, C3, C1, A7, A5, A3, A1; остальные будут выигрышными. Так что выигрывает **второй.** $\square$

$\boxed{\mathbf{2}}$ На доске 11×15 в левом нижнем углу стоит *хромой конь*. Двое ходят по очереди. За ход разрешается передвигать коня на две клетки вправо и одну клетку вверх или на две клетки вверх и на одну вправо. Кто не может сделать ход — проиграл.

Решение. Выигрышные и проигрышные позиции чередуются так: вертикаль и горизонталь, содержащие самую верхнюю правую клетку доски — проигрышные; затем две вертикали и две горизонтали (кроме уже проанализированных клеток) — выигрышные; дальше одна вертикаль и одна горизонталь (кроме уже проанализированных клеток) — проигрышные; затем две вертикали и две горизонтали (кроме уже проанализированных клеток) — выигрышные, и т.д. В частности, левый нижний угол доски 11×15 будет выигрышным (кстати, независимо от того, расположить ли доску вертикально или горизонтально). □

$\boxed{3}$ Двое игроков ходят по очереди на циферблате с одной стрелкой: каждый своим ходом переводит стрелку на два или три часа вперед. В начале игры стрелка показывает полдень. Выигрывает тот, кто первым поставит стрелку на 11 часов. (Стрелка может сделать несколько оборотов, прежде чем указать на 11 часов.)

Решение. Анализируем позиции с конца: 11 – П, 8 и 9 – В, 6 – П, 3 и 4 – В, 1 – П, 10 – В, 7 – П, 5 – В, 2 – П, 12 – В. Таким образом, выигрывает **первый.** □

$\boxed{4}$ **а)** Игра начинается с числа 4. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое меньшее натуральное число. Выигрывает тот, кто получит 2013. Тот же вопрос, если для выигрыша нужно получить число: **б)** $2^{2013} - 1$; **в)** $2013 \cdot 2^{2013}$.

Решение. Предыдущая проигрышная позиция получается из следующей как неполное частное от деления этой следующей на 2. Так что в пункте а) проигрышными будут позиции 2013, 1006, 503, 251, 125, 62, 31, 15, 7, а остальные, в том числе позиция 4 — выигрышными. В пункте б) позиция 4 — проигрышная (как и все степени двойки). В пункте в) все позиции вида $2013 \cdot 2^k$ — проигрышные, в том числе 2013, так что в этом случае, как и в пункте а), позиция 4 — выигрышная. □

5 Однажды на волшебном дереве выросло 300 золотых монет. Кот Базилио и лиса Алиса договорились по очереди каждую ночь ходить к этому дереву и забирать не более половины имеющихся на нём монет. Если кто-то из них не может больше сорвать ни одной монеты, то отдает другому всё, что успел взять. Первой пошла Алиса. Кто останется в дураках?

Решение. Проигрышные позиции — числа вида 2^k-1, включая и число 1 (доказывается по индукции). □

6 **а)** Имеются две кучи камней: в одной 5, в другой 7. За один ход можно взять один камень из любой кучи или по одному камню из обеих куч. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. **б)** А если в одной куче 2013 камней, а в другой — 2014? *Подсказка: найдите в этом листочке аналогичную задачу.*

Решение. Эту задачу легко перевести на язык задачи 1.б) с доской 5×7. Тогда левый нижний угол будет проигрышным, и выиграет **второй** игрок. В случае доски 2013×2014 левый нижний угол будет выигрышным, и выиграет **первый** игрок. □

7 Играют двое. В начале игры первый игрок называет любое целое число от 2 до 9. Затем игроки по очереди умножают полученное число на любое целое число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число больше 1000.

Решение. Ясно, что числа от 112 до 1000 — выигрышные: умножая их на 9, получаем числа, большие 1000. $112 : 2 = 56$; $111 \cdot 9 = 999$; поэтому все числа от 56 до 111 — проигрышные.

Далее, числа от $28 = 56 : 2$ до 55 — выигрышные: умножая их на 2, будем получать проигрышные числа от 56 до 111. Числа от 19 до 26 можно загнать в диапазон от 56 до 111 умножением на 3, числа от 14 до 18 — умножением на 4, числа 12 и 13 — умножением на 5, числа 10 и 11 — умножением на 6, числа 8 и 9 — умножением на 7, число 7 — умножением на 8. Так что все числа от 7 до 55 — выигрышные. Тогда числа 4, 5, 6, очевидно, будут проигрышными, а числа 2 и 3 — выигрышными. Поэтому **первый игрок выиграет**, если первым ходом назовет число 4, 5 или 6, а дальше будет ходить на проигрышные позиции. $\square$

Листок 13. Индукция

В начале занятия учащимся нужно объяснить, что такое индукция:
Пусть дана последовательность пронумерованных утверждений: $У_1, У_2, У_3, ..., У_k, У_{k+1}, ...$ Чтобы доказать все эти утверждения, достаточно:
1) доказать, что верно первое утверждение $У_1$ *(база индукции)*;
2) для каждого натурального k доказать, что если верно $У_k$, то верно и $У_{k+1}$ *(шаг индукции)*.

Для примера можно разобрать следующие задачи, каждый раз особо обратив внимание на базу и на шаг индукции.
• Докажите, что с помощью монет в 3 и 5 тугриков можно уплатить любую сумму в целое число тугриков, начиная с 8.

Решение. Индукция по сумме тугриков. *База:* $8 = 3 + 5$. *Шаг.* Пусть $k \geq 8$ мы набрать этими монетами можем. Пусть в этой сумме есть хотя бы одна монета в 5 тугриков. Заменим её на две монеты по 3 тугрика и получим набор для $k + 1$. Если в сумме нет ни одной монеты в 5 тугриков, то есть хотя бы три монеты в 3 тугрика (иначе $k < 8$). Заменим их на две монеты по 5 тугриков и получим набор для $k + 1$. □

• На плоскости проведено несколько прямых. Докажите, что части, на которые разделилась плоскость, можно покрасить в два цвета так, чтобы никакие две одноцветные части не имели больше одной общей граничной точки.

Решение. Индукция по числу прямых. *База:* пусть на плоскости проведена всего одна прямая, которая делит эту плоскость на две части. Одну из этих частей покрасим в белый цвет, а другую — в черный. *Шаг.* Пусть на плоскости проведено k прямых, и части плоскости раскрашены в черный и белый цвета требуемым образом. Проведем $(k + 1)$-ую прямую. Все части плоскости по одну сторону от этой новой прямой перекрасим в противоположные цвета, а по другую сторону оставим все без изменений. $\square$

–Общий совет, который можно давать учащимся: попробовать сначала проверить утверждение задачи для небольших n *и поискать закономерность, которую можно обобщить до шага индукции.*

$\boxed{\mathbf{1}}$ Докажите равенства для любого натурального n:

$$\textbf{а)}\ 1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2};$$

$$\textbf{б)}\ 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2;$$

$$\textbf{в)}\ 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Решение. База: во всех трёх случаях очевидна.

Шаг. Пусть для $n=k$ формула верна. Докажем её для $n=k+1$.

а) $1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k\cdot(k+1)}{2}\cdot(k+1)=\frac{(k+2)\cdot(k+1)}{2}$

б) $1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$

в) $1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ $\square$

–Важно следить за тем, чтобы учащиеся не путали n *и* k *— переменную и её конкретные значения.*

$\boxed{\mathbf{2}}$ **а)** В клетчатом квадрате $n\times n$ закрасили все клетки на главной диагонали и все клетки, лежащие ниже главной диагонали. Сколько всего клеток было закрашено?

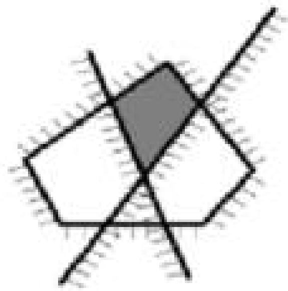
б) На плоскости проведено n прямых. Никакие две из них не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке. На сколько частей эти прямые делят плоскость?

в) Коля рисует на клетчатой бумаге пирамидку: в первом сверху ярусе одна клетка, во втором — три, в третьем — пять, в четвёртом — семь, и так далее. Сколько всего клеточек будет в первых 20 ярусах пирамидки?

Указание. *Подумайте, как эта задача связана с предыдущей.*
Ответ. **а), б)** $\frac{n(n+1)}{2}$. **в)** n^2.

Решение. Пункт а) очевидным образом сводится к задаче 1 а), а пункт в) — к задаче 1 б). Пункт б) сводится к задаче 1 а), если понять, что каждая новая прямая пересекает k старых прямых и делит на две части $k+1$ из уже имеющихся частей плоскости. □

3 У *бородатого многоугольника* во внешнюю сторону растёт щетина. Его пересекает n прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растет щетина (см. рисунок справа). В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы одна из частей окажется бородатой снаружи.



Решение. Индукция по числу прямых. *База:* если нет прямых, то всё очевидно.

Шаг. Пусть утверждение верно для k прямых. Проведем $(k+1)$-ю прямую. Если она не пройдет через имеющуюся «бородатую снаружи» часть, то эта часть так и останется бородатой, а если пройдет, то эта часть окажется разбита прямой на две или больше частей, хотя бы одна из которых бородатая снаружи. □

4 Дан клетчатый квадрат с длиной стороны 2^n. Из него вырезали: **а)** угловую клетку; **б)** одну клетку, но неизвестно, какую именно. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трёхклеточные уголки.

Решение. **а)** При $n = 1$ все очевидно. Пусть мы научились разрезать квадрат $2^n \times 2^n$ без угловой клетки на 3-уголки. Берем квадрат $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ без угловой клетки. Делим его на 4 квадрата $2^n \times 2^n$, один из которых будет тоже без угловой клетки, а остальные — целые. Квадрат без угловой клетки разрежем по предположению индукции. Из оставшихся трех квадратов вырежем по одной угловой клетке (те, которые рядом друг с другом и тоже образуют 3-уголок), а дальше каждый из оставшихся квадратов без угловой клетки режем по предположению индукции.

б) Аналогично пункту а), разрежем квадрат $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ без одной клетки на 4 квадрата $2^n \times 2^n$, вырезанная клетка попадет в один из этих четырех квадратов. Этот квадрат разрежем по предположению индукции, а с остальными тремя поступим так же, как в пункте а). □

5 Головоломка «Ханойская башня» представляет собой три вертикальных стержня на подставке. На один из них надеты n колец разного размера, в порядке убывания размера, меньший лежит на предыдущем по размеру большем. Кольца разрешается перекладывать с одного стержня на другой, при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите:
а) Все кольца можно переложить на другой стержень.
б) Это можно сделать за $2^n - 1$ перекладываний. **в)** Меньшим количеством перекладываний обойтись нельзя.

Решение. Будем доказывать сразу три пункта. *База.* Одно кольцо можно переложить на другой стержень не менее, чем за одно $(2^1 - 1)$ перекладывание.

Переход. Пусть для башни высотой в k колец требуется не менее $2^k - 1$ перекладываний. Рассмотрив башню высотой в $k+1$ кольцо. Для того, чтобы переложить нижнее кольцо, все остальные должны оказаться на третьем стержне (тогда мы сможем снять большое кольцо с первого стержня и переложить на второй). На это требуется не менее $2^k - 1$ перекладываний. Чтобы вернуть все остальные кольца обратно на нижнее кольцо (то есть уже на второй стержень) требуется не менее $2^k - 1$ перекладываний. Плюс ещё одно перекладывание нижнего кольца. Получается не менее $2^k - 1 + 2^k - 1 + 1 = 2^{k+1} - 1$. Таким образом, если мы сумели переложить k колец, то сумеем переложить и $k + 1$ кольцо, на это нам потребуется в точности указанное число перекладываний. $\square$

$\boxed{\mathbf{6}}$ Пусть n – целое неотрицательное число. Докажите, что из любых 2^{n+1} натуральных чисел можно выбрать ровно 2^n, сумма которых делится на 2^n.

Решение. База. Рассмотрим $n = 0$. Из любых двух чисел можно выбрать одно, которое делится на 1.

Шаг. Пусть утверждение верно для $n = k$. Тогда рассмотрим 2^{k+2} натуральных чисел. Разобьём их на две группы по 2^{k+1} чисел. В каждой группе по предположению индукции найдётся 2^k чисел, чья сумма делится на 2^k. Итого две суммы по 2^k слагаемых. Кроме этого останется 2^{k+1} чисел, среди которых по предположению индукции найдётся ещё 2^k чисел, чья сумма делится на 2^k. Итого три суммы по 2^k слагаемых. Среди этих трёх сумм найдутся или две суммы, делящиеся на 2^{k+1}, или две суммы, не делящиеся на 2^{k+1}. Сложив такие две суммы мы получим 2^{k+1} слагаемых, сумма которых делится на 2^{k+1}. $\square$

$\boxed{\mathbf{7}}$ Вычислите суммы: сначала вычислите эти суммы для $n = 1, 2, 3, 4, 5$, а затем найдите закономерность и докажите её по индукции.

а) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$; **б)** $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$.

Решение. **а)** $1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n = 2^{n+1}-1$. Закономерность легко угадывается, а потом доказывается по индукции. **б)** $1 \cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n! = (n+1)!-1$. Закономерность угадать уже чуть посложнее, но доказывается она тоже несложно. $\square$

Листок 14. Найди крайнего

Тема этого листка — метод крайнего. Он заключается в том, чтобы рассмотреть в условиях задачи некоторый крайний случай: наименьший, самый левый и т.д. Для примера у доски стоит разобрать пару задач на эту тему.
• Дано 25 чисел. Сумма любых четырех из них положительна. Докажите, что сумма их всех тоже положительна.

Решение. Среди данных чисел должно быть хотя бы одно положительное. Действительно, возьмем любые четыре из этих чисел. Если бы все они были неположительны, то и их сумма была бы неположительной, что противоречит условию. Выберем это положительное число. Остальные 24 числа разобьем произвольным образом на шесть четверок. Сумма всех 25 чисел — это сумма выбранного числа (которое положительно по выбору) и сумм получившихся четверок (которые положительны по условию). Она является положительной. □

• Шахматная доска разбита на двуклеточные прямоугольники-домино. Докажите, что найдется пара домино, образующая квадрат из 4 клеток.

Решение. Пусть такой пары не найдётся. Рассмотрим левый верхний угол. Пусть доминошка в нём лежит без ограничения общности вертикально, то есть занимает клетки $a7$, $a8$. Тогда доминошка, покрывающая клетку $b8$ не может лежать вертикально и должна занимать клетки $b8$, $c8$. Аналогично, в клетке $b7$ доминошка расположена вертикально, в клетке $c7$ горизонтально и т.д. Получается «лесенка» из доминошек, которая доходит до противоположного угла доски. Однако там возникает противоречие: клетки $g7$, $h7$ занимает горизонтальная доминошка, клетку $h8$ должна занимать вертикальная доминошка, но для неё нет места. □

$\boxed{\mathbf{1}}$ Сколькими способами можно расставить в ряд натуральные числа от 1 до 100 так, чтобы соседние числа отличались не более чем на единицу?

Ответ. **Двумя.**

Решение. Число 1 может стоять только в начале ряда или в конце, так как у него только один возможный сосед — двойка. Значит, двойка будет стоять в ряду на втором месте. Тогда на третьем месте может стоять только тройка, на четвертом — только четверка, и т. д. Таким образом получаем два способа: единица в начале и единица в конце. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Сколько соседей может быть у каждого числа? Два? А больше? А меньше? А если у числа один сосед, где оно может стоять?

$\boxed{\mathbf{2}}$ Зайчиха купила для своих семерых зайчат семь барабанов разных размеров и семь пар палочек разной длины. Если зайчонок видит, что у него и барабан больше, и палочки длиннее, чем у кого-то из братьев, он начинает барабанить. Какое наибольшее число зайчат может начать барабанить?

Ответ. **Шестеро.**

Решение. Все зайчата барабанить не могут, так как заведомо не будет барабанить зайчонок, которому достанется самый маленький барабан. С другой стороны, если дать этому же зайчонку и самые короткие палочки, то остальные шестеро зайчат будут барабанить. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Могут ли барабанить все семь зайчат? Почему? А шесть?

$\boxed{\mathbf{3}}$ **а)** По кругу выписано несколько натуральных чисел, каждое из которых не превосходит одного из соседних с ним. Докажите, что среди этих чисел точно есть хотя бы два равных.
б) По кругу выписано несколько чисел, каждое из которых

равно среднему арифметическому двух соседних с ним. Докажите, что все эти числа равны между собой. (*Средним арифметическим* чисел a и b называется число $\frac{a+b}{2}$.)

Решение. **а)** Найдем среди написанных чисел самое большое. Если оно такое одно, то оно больше обоих своих соседей, что противоречит условию. А если оно наибольшее и не больше одного из соседних с ним, то соседнее с ним ему просто равно. **б)** Рассмотрим наибольшее из этих чисел (или одно из них, если таких чисел несколько). Из того, что оно не меньше своих соседей и равно их среднему арифметическому, следует, что оно равно своим соседям. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что все числа равны. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*В каком смысле крайнее число нас здесь может заинтересовать? У нас же они стоят по кругу.*

$\boxed{\mathbf{4}}$ На шахматной доске стоит несколько **а)** ладей; **б)** ферзей. Обязательно ли найдется фигура, бьющая не более двух других? (Перепрыгивать через другие фигуры ладьи и ферзи не могут.)

Решение. **а) Обязательно.** Рассмотрим самую верхнюю ладью, если таких несколько, то самую левую из них. Тогда выше и левее этой ладьи нет других ладей, значит, она бьет не более двух других. **б) Не обязательно.** Например, если расставить четырех ферзей в угловые клетки шахматной доски, то каждый из них будет бить трех других. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–*Что можно сказать про крайнюю ладью? Кстати, а какая ладья будет крайней?*

$\boxed{\mathbf{5}}$ В стране есть несколько городов. Сумасшедший путешественник едет из города А в самый далёкий от него город В, затем — в самый далёкий от В город С, и т. д. Докажите, что если город C не совпадает с городом A, то путешественник никогда не вернётся обратно в город A.

Решение. Предположим, что на втором шаге путешественник не возвратился в A, т.е. город C отличен от города A. Тогда маршрут от A до B короче маршрута из B в C (поскольку C — наиболее удаленный от B город). В дальнейшем каждый следующий маршрут будет не короче предыдущего, так как каждый раз мы в качестве следующего пункта назначения выбираем наиболее удаленный город. Пусть на некотором шаге путешетвенник все же вернулся в город A, выйдя из некоторого города X. По доказанному, маршрут от X до A длиннее маршрута от A до B, а это противоречит тому, что B — наиболее удаленный от A город. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`
–*Пусть путешественник вернулся в город A. Что тогда можно сказать о расстояниях между городами на его маршруте?*

$\boxed{\mathbf{6}}$ Петя купил «Конструктор», в котором было 100 палочек разной длины. В инструкции к «Конструктору» написано, что из любых трёх палочек можно составить треугольник. Петя решил проверить это утверждение. Палочки лежат в конструкторе по возрастанию длин. Какое наименьшее число проверок нужно Пете, чтобы доказать или опровергнуть утверждение?
Ответ. **Хватит одной проверки.**

Решение. Возьмем две самые короткие палочки (длин a и b) и самую длинную (длины c). Если из них треугольник сложится (то есть $a + b > c$), то сложатся и все остальные. Ведь для любых других трех палочек длин d, e, f из набора получим $d + e \geqslant a + b > c \geqslant f$, так что неравенство треугольника не нарушится. Ну а если не сложится уже из них, то все плохо, и в инструкции обман. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Когда из трёх палочек можно сложить треугольник? Какое условие на длины палочек это задаёт? И как это условие проверить?

$\boxed{\mathbf{7}}$ 25 астрономов на двадцати пяти разных планетах наблюдают друг за другом при помощи телескопов, причём каждый наблюдает за ближайшим к нему (все расстояния между планетами различны). Докажите, что:

а) есть две планеты, астрономы на которых наблюдают друг за другом;

б) хотя бы за одним астрономом никто не наблюдает.

Решение. **а)** Выберем две планеты, расстояние между которыми наименьшее. Тогда сидящие на них астрономы следят друг за другом. **б)** Рассмотрим две планеты A и B, расстояние между которыми наименьшее. Астрономы на этих планетах наблюдают друг за другом. Если найдется астроном, который смотрит на планету A или B, то найдется астроном, на которого никто не смотрит (на все планеты наблюдателей не хватит). В противном случае исключим из рассмотрения планеты A и B. Получим систему из $25 - 2 = 23$ планет, для которых попрежнему выполняется условие задачи. Продолжая так далее, в конце концов найдем планету, на которую никто не смотрит. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Что значит, что два астронома наблюдают друг за другом? Где это точно произойдёт?

–Найдётся ли астроном, за которым наблюдает более одного астронома? Почему?

$\boxed{\mathbf{8}}$ В клетках доски 8×8 расставлены числа 1, 2, ..., 64. Докажите, что найдется пара соседних по стороне клеток, числа в которых отличаются не менее чем на 5.

Решение. Рассуждаем от противного. Пусть это не так. Рассмотрим клетку, в которой стоит 1. Пусть сначала эта клетка не угловая и не у края доски. Тогда в четырех соседних клетках должны стоять числа 2, 3, 4, 5. Теперь посмотрим на клетки, соседние с этими четырьмя. Их не менее семи (не считая клетки с единицей), а числа там должны стоять не более 5+4=9. Но из еще не использованных таких чисел осталось только четыре — это 6, 7, 8, 9. Значит, в какой-то из этих восьми клеток будет число, более чем на 4 превосходящее соседнее с ним число 2, 3, 4 или 5.

Аналогично рассматриваются случаи, когда единица стоит в клетке у границы доски (но не в углу) и когда единица стоит в угловой клетке. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–В каком смысле крайнюю клетку лучше рассмотреть? Сколько у неё соседних клеток? А какие в них могут быть числа? А что с соседями её соседей?

Листок 15. Множества

В начале занятия у доски следует разобрать примеры множеств и операций над ними и записать следующие определения. Для наглядности множества можно изображать в виде кругов и изображать операции над ними, закрашивая соответствующие области. Такое представление множеств называется кругами Эйлера.

Множество есть совокупность различных элементов, мыслимая как единое целое.

Множество можно задать, описав его ($A = \{\text{нелетающие птицы}\}$), перечислив его элементы ($B = \{1, \text{кошка}, \text{страус}, \text{Ё}\}$) или с помощью других множеств.

Если все элементы множества A принадлежат множеству B, то говорят, что A есть *подмножество* множества B. Обозначается это как $A \subset B$. ($\{1, 2, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$).

Пересечением двух множеств называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих сразу обоим. Обозначается как $A \cap B$.

Объединением двух множеств называется множество, содержащее все их элементы и только их. Обозначается как $A \cup B$.

Мощностью множества называется количество элементов в этом множестве. Обозначается как $|A|$.

Затем предлагается разобрать у доски две задачи.

• Пусть Л — множество человек в вашей аудитории. Какие подмножества в нём можно выделить? Пересекаются ли они?

• На олимпиаду пришли 436 школьников. Из них 128 правильно решили первую задачу и 126 — вторую. 62 участника справились с обеими задачами. А сколько школьников не решили ни первую, ни вторую задачи?

Решение. Давайте поймём, сколько школьников всего решили первую или вторую задачи. $126+128-62 = 192$, поскольку$|A\cup$

$B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. В свою очередь, это следует из того, что при подсчёте мощности A и при подсчёте мощности B элементы из их пересечения были подсчитаны дважды, а остальные элементы — ровно по одному разу. Итак, хотя бы одну из первых двух задач решили 192 школьника. Остальные $436 - 192 = 244$ школьника не решили ни одну из них. $\square$

$\boxed{1}$ Перечислите все: **а)** элементы; **б)** подмножества множества {колбаса, очки, верёвка}.

Решение. **а)** 3; **б)** $2^3 = 8$. $\square$

$\boxed{2}$ Пусть $A = \{\diamondsuit, \ddagger\}$, $B = \{\ddagger, \bullet, \S\}$. Запишите пересечение и объединение этих двух множеств. Сколько в них элементов?

Решение. **а)** $A \cap B = \{\ddagger\}$; **б)** $A \cup B = \{\diamondsuit, \ddagger, \bullet, \S\}$ $\square$

$\boxed{3}$ Пусть $A =$ {чётные числа}, $B =$ {числа, которые делятся на 4}, C {натуральные числа меньше 10}. Чему равны $A \cap B$, $A \cap B \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B$?

Решение. $A\cap B = B$, $A\cap B\cap C = \{2, 4, 6, 8\}$, $B\cap C = \{4, 8\}$, $A\cap B = A$. $\square$

$\boxed{4}$ Сколько **а)** двузначных, **б)** четырёхзначных, **в)** n-значных чисел можно составить, используя только цифры 1 и 2?

Решение. **а)** 4, **б)** 16, **в)** 2^n.

На каждое место мы ставим или 1 или 2. $\square$

$\boxed{5}$ Сколько подмножеств у множества, содержащего: **а)** 2 элемента; **б)** 4 элемента; **в)** n элементов? **г)** Существует ли множество, у которого ровно 7 подмножеств? **д)** Что общего у задач 4 и 5?

Решение. **а)** 4, **б)** 16, **в)** 2^n, **г)** нет: 7 — это не степень двойки. **д)** Сопоставим каждому числу подмножество следующим образом: 1 означает, что мы берём в подмножество соответствующий по порядку элемент множества, 2 — что не берём. Аналогично, каждому подмножеству будет сопоставлено ровно одно число. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Попробуй взять множество из 2 и из 4 элементов и просто выписать все его подмножества. Получается закономерность?

$\boxed{\mathbf{6}}$ На полу площадью 12 м^2 лежат три ковра. Площадь одного ковра 5 м^2, другого — 4 м^2, третьего — 3 м^2. Каждые два ковра перекрываются на площади 1,5 м^2. Все три ковра перекрываются на площади 0,5 м^2. **а)** Какова площадь пола, не покрытая коврами? **б)** Какова площадь, покрытая только первым ковром?

Решение. **а)** $12 - 5 - 4 - 3 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 - 0{,}5 = 4$. **б)** $5 - 1{,}5 - 1{,}5 + 0{,}5 = 2{,}5$. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Попробуй посмотреть пол под коврами как на множества. Если сложить площади трёх ковров, то какие участки будут посчитаны более одного раза? Как это можно исправить?

$\boxed{\mathbf{7}}$ У 20 марсиан есть уши, а у остальных — нет. У 40 марсиан есть глаза, а у остальных — нет. У 10 марсиан есть и уши, и глаза. Какое наименьшее количество марсиан может быть?

Ответ. **50.**

Решение. Аналогично задаче про олимпиаду, разобранной у доски. Марсиан без ушей и глаз не меньше нуля, потому ввсего их не менее чем $20 + 40 - 10$. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Вспомни задачу, которая разбиралась у доски. У скольких марсиан есть уши или глаза?

8 На заводе работают 40 фрезеровщиков, каждый из которых является художником, философом или поэтом. Всего среди них 28 художников, 27 философов и 11 поэтов. Какое наибольшее количество фрезеровщиков могут быть одновременно и художниками, и философами?

Решение. **26**, ибо если их 27, то всего философов и художников 28, а значит с поэтами вместе их не более 39. □

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Попробуй изобразить множества, о которых идёт речь в задаче. Сколько максимум может быть художников-философов? Сколько тогда всего фрезеровщиков?

9 Аня, Боря и Вася составляли слова из заданных букв. Все составили разное число слов: больше всех — Аня, меньше всех — Вася. Затем ребята просуммировали очки за свои слова. Если слово есть у двух игроков, за него даётся 1 очко, у одного игрока — 2 очка, слова, общие у всех трёх игроков, вычёркиваются. Могло ли так случиться, что больше всех очков набрал Вася, а меньше всех — Аня?

Решение. **Могло**. Заметим, что можно выкинуть общие слова всех троих. Пусть Вася составил x слов, Боря — $x+y$, а Аня — $x+y+z$. Пусть у Васи и Ани a общих слов. Тогда Васи не более $2x-a$ очков, а у Ани не менее $x+y+z$ очков. Поэтому $a+y+z<x$. Пусть все остальные слова у Ани общие с Борей (тогда $a>z$), их $x+y+z-a$. При этом у Бори должно быть очков больше, чем у Ани, но меньше слов: $2(a^{-}z)>a$, $a^{-}z<a$. Т.е. $a>2z$. Наконец у Бори меньше очков, чем у Васи (пусть них нет общих слов): $x+y+a^{-}z<2x^{-}a$, т.е. $2a+y<x+z$.

$$a+y+z<x,$$

$$a>2z,$$

$$2a + y < x + z.$$

Подберём числа, например: $x = 7$, $y = 1$, $z = 1$, $a = 3$. Тогда у Вани 4 его слов, 3 общих с Аней, у Ани ещё 6 слов общих с Борей, а у Бори ещё 2 слова. Ваня 7 слов, Аня 9 слов, Боря 8 слов. Итого у Вани $4 \cdot 2 + 3 = 11$ очков, у Ани $6 + 3 = 9$ очков, а у Бори $2 \cdot 2 + 6 = 10$ очков. $\square$

○ `Учащийся не знает, что делать.`

–Попробуй изобразить множества слов каждого из них. Обозначь неизвестные нам количества слов переменными.

–Решение подбором тоже годится, поскольку пример даёт положительный ответ на вопрос задачи.