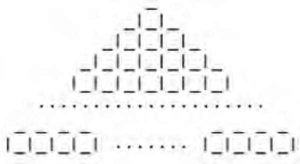
Листок 19. Постепенное конструирование

1 **а)** Найдите значение суммы $1+3+5+\cdots+(2n-1)$; **б)** Докажите, что $1+2+4+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$.



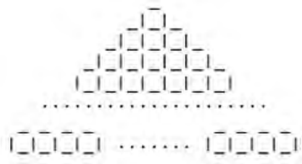
Ограничимся рассмотрением первых n горизонталей. Если переставить левую (по отношению к центральной вертикали) часть пирамидки направо, то получится, как несложно видеть, квадрат $n\times n$. Его площадь равна площади исходной фигуры. Поэтому $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. **Арифметический способ доказательства.** Докажем, что искомая сумма равна n^2, индукцией по n. Для $n=1$ утверждение верно. Предположим, что утверждение аерно для любых $k<n+1$. Тогда $1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1)=n^2+(2(n+1)-1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$. Здесь мы воспользовались предположением индукции. Таким образом, утверждение доказано. **б)** Доказательство проведем индукцией по n. Проверка утверждения для $n=0$ очевидна. Шаг индукции: $1+2+4+\cdots+2^n+2^{n+1}=2^{n+1}-1+2^{n+1}=2\cdot 2^{n+1}-1=2^{n+2}-1$. Утверждение пункта **б)** доказано.

2 Бодрый студент записывал на лекции по 90 слов в минуту. Сонный студент сначала был совсем сонный, и за первую минуту лекции записал только одно слово. Потом он начал понемногу просыпаться, и за вторую минуту лекции записал уже три слова, за третью — пять, за четвёртую — семь, и так далее. **а)** Сколько времени длилась лекция, если в итоге оба студента записали слов поровну? **б)** Сколько слов записал на лекции каждый студент?

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ

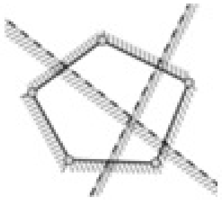
Листок 19. Постепенное конструирование

1 **а)** Найдите значение суммы $1+3+5+\cdots+(2n-1)$; **б)** Докажите, что $1+2+4+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$.



Ограничимся рассмотрением первых n горизонталей. Если переставить левую (по отношению к центральной вертикали) часть пирамидки направо, то получится, как несложно видеть, квадрат $n\times n$. Его площадь равна площади исходной фигуры. Поэтому $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. **Арифметический способ доказательства.** Докажем, что искомая сумма равна n^2, индукцией по n. Для $n=1$ утверждение верно. Предположим, что утверждение аерно для любых $k<n+1$. Тогда $1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2(n+1)-1)=n^2+(2(n+1)-1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$. Здесь мы воспользовались предположением индукции. Таким образом, утверждение доказано. **б)** Доказательство проведем индукцией по n. Проверка утверждения для $n=0$ очевидна. Шаг индукции: $1+2+4+\cdots+2^n+2^{n+1}=2^{n+1}-1+2^{n+1}=2\cdot 2^{n+1}-1=2^{n+2}-1$. Утверждение пункта **б)** доказано.

2 Бодрый студент записывал на лекции по 90 слов в минуту. Сонный студент сначала был совсем сонный, и за первую минуту лекции записал только одно слово. Потом он начал понемногу просыпаться, и за вторую минуту лекции записал уже три слова, за третью — пять, за четвёртую — семь, и так далее. **а)** Сколько времени длилась лекция, если в итоге оба студента записали слов поровну? **б)** Сколько слов записал на лекции каждый студент?



3 У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растёт щетина. Его пересекают несколько бородатых прямых, у каждой из которых с одной стороны тоже растёт щетина (см. рисунок справа). Эти прямые делят многоугольник на несколько частей. Докажите, что хотя бы одна из этих частей — бородатая снаружи.

4 Дан клетчатый квадрат с длиной стороны 2^n. Из него вырезали: **а)** угловую клетку; **б)** одну клетку, но неизвестно, какую именно. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трёхклеточные уголки.

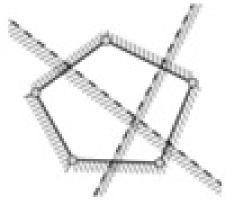
5 Карточки с числами от 1 до 2017 выложены в ряд в произвольном порядке. Одна из карточек — красная, а остальные — белые. За один шаг можно поменять красную карточку местами с любой другой. Как за несколько шагов расположить числа на карточках по возрастанию?

6 Докажите, что все числа в бесконечной последовательности 10017, 100117, 1001117, 10011117, 100111117, ... делятся на 53.

7 Докажите, что единицу можно представить в виде суммы 2017 попарно различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.

8 **а)** Сколько есть способов разрезать полоску 2×3 на доминошки 1×2? **б)** Тот же вопрос для полосок 2×4 и 2×5. Полоски нельзя переворачивать. **в)** Света посчитала число способов разрезать полоску 2×2018 и вычла из него число способов разрезать полоску 2×2017. А Наташа посчитала число способов разрезать полоску 2×2016. У кого результат вышел больше?

МАЛЫЙ МЕХМАТ МГУ — ШКОЛЕ



3 У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растёт щетина. Его пересекают несколько бородатых прямых, у каждой из которых с одной стороны тоже растёт щетина (см. рисунок справа). Эти прямые делят многоугольник на несколько частей. Докажите, что хотя бы одна из этих частей — бородатая снаружи.

4 Дан клетчатый квадрат с длиной стороны 2^n. Из него вырезали: **а)** угловую клетку; **б)** одну клетку, но неизвестно, какую именно. Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на трёхклеточные уголки.

5 Карточки с числами от 1 до 2017 выложены в ряд в произвольном порядке. Одна из карточек — красная, а остальные — белые. За один шаг можно поменять красную карточку местами с любой другой. Как за несколько шагов расположить числа на карточках по возрастанию?

6 Докажите, что все числа в бесконечной последовательности 10017, 100117, 1001117, 10011117, 100111117, ... делятся на 53.

7 Докажите, что единицу можно представить в виде суммы 2017 попарно различных дробей с числителем 1 и натуральным знаменателем.

8 **а)** Сколько есть способов разрезать полоску 2×3 на доминошки 1×2? **б)** Тот же вопрос для полосок 2×4 и 2×5. Полоски нельзя переворачивать. **в)** Света посчитала число способов разрезать полоску 2×2018 и вычла из него число способов разрезать полоску 2×2017. А Наташа посчитала число способов разрезать полоску 2×2016. У кого результат вышел больше?