XIV Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2018

12 января 2018 года, 9.00-13.30
Первый день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. Пусть α, β и γ – углы треугольника, противолежащие сторонам a, b и c соответственно. Докажите неравенство

$$2\left(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma\right)\geqslant\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+c^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

2. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC соответственно взяты точки N, K и L так, что $AL=BK$ и CN – биссектриса угла C. Отрезки AK и BL пересекаются в точке P. Обозначим через I и J центры вписанных окружностей треугольников APL и BPK соответственно. Пусть Q – точка пересечения прямых CN и IJ. Докажите, что $IP=JQ$.

3. Докажите, что существует бесконечно много пар (m,n) натуральных чисел таких, что число $(m!)^n+(n!)^m+1$ делится на $m+n$.