

15 января 2014 года, 9.00–13.30

Второй день

(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

4. Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(1+\sqrt{3}) = 2+\sqrt{3}$ и $P(3+\sqrt{5}) = 3+\sqrt{5}$?

5. Пусть $U = \{1, 2, \dots, 2014\}$. Для натуральных a, b, c обозначим через $f(a, b, c)$ количество упорядоченных наборов множеств $(X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3)$, удовлетворяющих следующему условию:

(i) $Y_1 \subseteq X_1 \subseteq U$ и $|X_1| = a$;

(ii) $Y_2 \subseteq X_2 \subseteq U \setminus Y_1$ и $|X_2| = b$;

(iii) $Y_3 \subseteq X_3 \subseteq U \setminus (Y_1 \cup Y_2)$ и $|X_3| = c$.

Докажите, что $f(a, b, c)$ не меняется при перестановке a, b и c . (Здесь $|A|$ обозначает количество элементов множества A .)

6. Выпуклый четырёхугольник поделен на девять четырёхугольников четырьмя отрезками, точки пересечения которых лежат на диагоналях исходного четырёхугольника (см. рисунок). Известно, что в четырёхугольники 1, 2, 3, 4 можно вписать окружности. Докажите, что в четырёхугольник 5 также можно вписать окружность.

