

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

17 января 2012 года

**Сначала, пожалуйста, прочитайте следующее:**

1. Теоретический тур состоит из трех задач. Продолжительность тура 4 часа.
2. Пользуйтесь только той ручкой, которая Вам предоставлена.
3. Для расчетов Вы можете использовать свой калькулятор. Если своего у Вас нет, тогда Вы можете попросить его у организаторов олимпиады.
4. Вам предоставлены чистые листы бумаги и *Листы для записи (Writing sheets)*. Чистые листы бумаги предназначены для черновых записей, их Вы можете использовать по Вашему усмотрению, они не проверяются. На *Writing sheets* следует записывать решения задач, которые будут оценены при проверке работы. В решениях как можно меньше используйте словесные описания. В основном Вы должны использовать уравнения, числа, буквенные обозначения, рисунки и графики.
5. Используйте только лицевую сторону *Writing sheets*. При записи не выходите за пределы отмеченной рамки.
6. Решение каждой задачи следует начинать с новой страницы *Writing sheets*.
7. На каждом использованном *Writing sheets*, в отведенных для этого графах, необходимо указать Вашу страну (*Country*), Ваш код (*Student Code*), порядковый номер задачи (*Question Number*), текущий номер каждого листа (*Page Number*) и полное количество листов, использованных при решении всех задач (*Total Number of Pages*). Если Вы не хотите, чтобы некоторые использованные *Writing sheets* были включены в ответ, тогда перечеркните их большим крестом на весь лист и не включайте в Ваш подсчет полного количества листов.
8. Когда Вы закончите работу, разложите все листы в следующем порядке:
  - Пронумерованные по порядку *Writing sheets*;
  - Черновые листы;
  - Неиспользованные листы;
  - Отпечатанные условия задачи

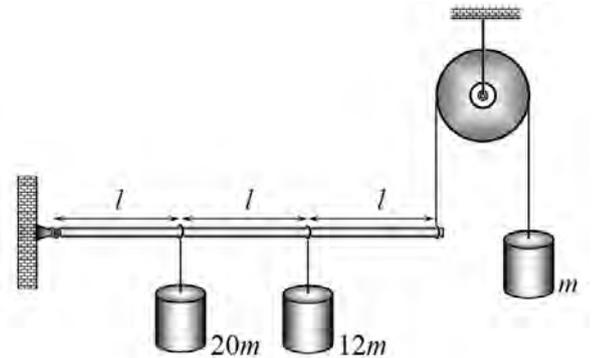
Положите все листы бумаги в конверт и оставьте на столе. Вам не разрешается выносить *никакие* листы бумаги из аудитории.

**Задача 1 (10 баллов)**

Эта задача состоит из трех частей, не связанных друг с другом.

**Задача 1.А. 2012 (4 балла)**

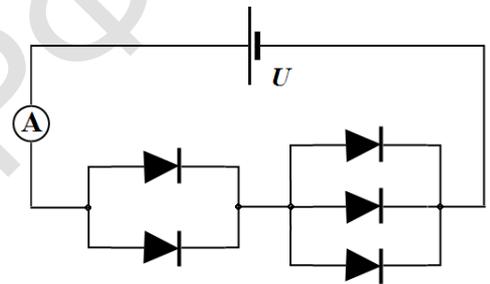
Один конец жёсткого невесомого стержня шарнирно закреплён, к другому концу на перекинутой через невесомый блок нити подвешен груз массой  $m$ . Ещё два груза массами  $20m$  и  $12m$  подвешены на нитях к стержню в точках, делящих его на три равные части (см. рис.). Все нити невесомы и нерастяжимы. Стержень удерживают неподвижно в горизонтальном положении, а затем отпускают. Найдите ускорения грузов сразу после отпуска стержня.

**Задача 1.В. И диоды...(2,5 балла)**

На отдельном бланке приведен график вольт-амперной характеристики одного диода (зависимости силы тока через диод от напряжения на нем —  $I_0(U)$ ).

Пять таких одинаковых диодов соединены так, как показано на рисунке.

Постройте график зависимости силы тока в цепи от напряжения источника  $U$ , если последнее изменяется от 0 до 3 В.



*Для построения используйте выданный вам отдельный бланк.  
Не забудьте его сдать!*

**Задача 1.С. Плоская линза (3,5 балла)**

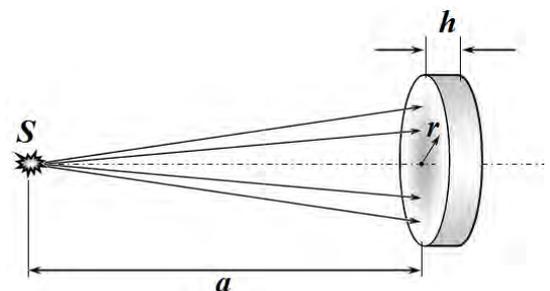
Круглая прозрачная плоскопараллельная пластинка толщиной  $h$  изготовлена из материала, оптический показатель преломления которого зависит от расстояния  $r$  до центральной оси пластинки по закону

$$n(r) = n_0(1 - \beta r^2), \quad (1)$$

где  $n_0, \beta$  — известные положительные постоянные величины. Пластинка находится в воздухе, показатель преломления которого  $n = 1$ .

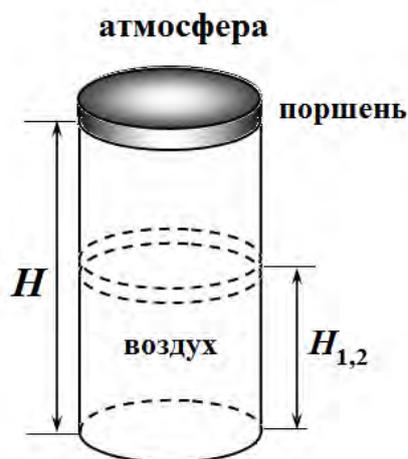
На оси пластинки на расстоянии  $a$  ( $a \gg h$ ) расположен точечный источник света  $S$ .

Покажите, что пластинка является своеобразной линзой, то есть, формирует изображение источника. Определите, на каком расстоянии  $b$  от пластинки находится изображение источника  $S$ . Чему равно фокусное расстояние этой линзы?



## Задача 2

## Приключения поршня (10 баллов)



В открытом цилиндрическом сосуде высотой  $H = 30.0$  см и площадью поперечного сечения  $S = 50.0$  см<sup>2</sup> находится атмосферный воздух при нормальных условиях, то есть при атмосферном давлении  $p_0 = 1.01 \times 10^5$  Па и температуре  $T_0 = 273$  К. В сосуд осторожно вставляется сверху тонкий тяжелый поршень массы  $M = 50.0$  кг. Стенки сосуда и поршень изготовлены из материала, который очень плохо проводит тепло. Считайте, что воздух представляет собой идеальный двухатомный газ со средней молярной массой  $\mu = 29.0$  г/моль, ускорение свободного падения равно  $g = 9.80$  м/с<sup>2</sup>, а универсальная газовая постоянная равна  $R = 8.31$  Дж/(моль·К). Теплоемкостью поршня и сосуда, а также трением поршня о стенки полностью пренебрегайте.

Поршень освобождают. Процесс перехода к окончательному равновесию осуществляется в две стадии. На первой стадии поршень совершает колебания. При этом газовые процессы нельзя считать равновесными. Вследствие неравновесности колебания поршня являются затухающими, т.е. механическая энергия рассеивается (диссипирует). Считайте, что половина рассеянной энергии передается газу в сосуде, а половина - в атмосферу. На этой стадии также можно пренебречь теплопроводностью сосуда и поршня. После прекращения колебаний поршень останавливается на высоте  $H_1$ .

Вторая стадия является медленной – в течение некоторого промежутка времени поршень перемещается и окончательно останавливается на высоте  $H_2$ .

2.1 [0.5 балла] Чему равно давление воздуха  $p_1$  в сосуде в конце первой стадии? Ответ выразите через атмосферное давление  $p_0$ , показатель адиабаты  $\gamma$  и параметр  $\alpha = Mg / p_0 S$ . Найдите численное значение  $p_1$ .

2.2 [1.5 балла] Чему равна температура воздуха  $T_1$  в конце первой стадии? Ответ выразите через  $T_0$ ,  $\gamma$  и  $\alpha = Mg / p_0 S$ . Найдите численное значение  $T_1$ .

2.3 [0.5 балла] Найдите высоту  $H_1$ . Ответ выразите через  $H$ ,  $\gamma$  и  $\alpha = Mg / p_0 S$ . Найдите численное значение  $H_1$ .

2.4 [0.5 балла] Чему равно давление воздуха  $p_2$  в сосуде в конце второй стадии? Ответ выразите через  $p_0$  и  $\alpha = Mg / p_0 S$ . Найдите численное значение  $p_2$ .

2.5 [0.5 балла] Чему равна температура воздуха  $T_2$  в конце второй стадии?

2.6 [0.5 балла] Найдите высоту  $H_2$ . Ответ выразите через  $H$  и  $\alpha = Mg / p_0 S$ .

Найдите численное значение  $H_2$ .

2.7 [2 балла] Найдите частоту  $\omega$  малых колебаний поршня около положения равновесия  $H_2$ , считая процесс квазистатическим и адиабатическим. Ответ выразите через  $g$ ,  $H$ ,  $\gamma$  и  $\alpha = Mg / p_0 S$ . Найдите численное значение  $\omega$ .

По окончании второй стадии в дне сосуда проделали множество отверстий суммарной площадью  $S_o = 5.00 \times 10^{-4}$  см<sup>2</sup>, при этом размер каждого отверстия много меньше длины свободного пробега молекул. Спустя некоторое время поршень начинает двигаться с некоторой постоянной скоростью  $u$ .

Известно, что среднее число молекул  $\bar{N}$ , попадающих на единицу площади поверхности в единицу времени равно

$$\bar{N} = \frac{1}{4} n \bar{v}, \quad (1)$$

где  $\bar{v} = \sqrt{8RT / \pi \mu}$  – так называемая средняя тепловая скорость молекул,  $R$  – универсальная газовая постоянная. Средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул, попадающих в отверстие, равна

$$\bar{W} = 2k_B T, \quad (2)$$

где  $k_B$  – постоянная Больцмана.

Считая поток тепла через стенки и поршень пренебрежимо малым, ответьте на следующие вопросы:

2.8 [1 балл] Установившееся давление воздуха под поршнем имеет вид  $p_3 = Af(\alpha)$ , где  $A$  – некоторая постоянная, зависящая от  $p_0$ , а  $f(\alpha)$  – некоторая функция от  $\alpha$ . Найдите  $A$  и  $f(\alpha)$ . Найдите численное значение  $p_3$ .

2.9 [2 балла] Установившаяся скорость поршня имеет вид  $u = Bg(\alpha)$ , где  $B$  – некоторая постоянная, зависящая от  $d$ ,  $S$ ,  $R$ ,  $T_0$  и  $\mu$ , а  $g(\alpha)$  – некоторая функция от  $\alpha$ . Найдите  $B$  и  $g(\alpha)$ . Найдите численное значение  $u$ .

2.10 [1 балл] Установившаяся температура газа под поршнем имеет вид  $T_3 = Ch(\alpha)$ , где  $C$  – некоторая постоянная, зависящая от  $T_0$ , а  $h(\alpha)$  – некоторая функция от  $\alpha$ . Найдите  $C$  и  $h(\alpha)$ . Найдите численное значение  $T_3$ .

### Задача 3 (10 баллов)

#### Ядерная капля

В этой задаче рассматриваются основные характеристики и условия устойчивости атомных ядер. Пусть атомное ядро содержит  $A$  нуклонов ( $A$  – атомный вес элемента), а именно  $Z$  протонов ( $Z$  – порядковый номер в таблице элементов) и  $N = A - Z$  нейтронов. При этом выражение для полной энергии ядра записывается в виде

$$E = (Zm_p + Nm_n)c^2 + E_p(A, Z) = Mc^2, \quad (1)$$

где  $M$  – масса ядра,  $m_p$  – масса свободного протона,  $m_n$  – масса свободного нейтрона,  $c$  – скорость света, а  $E_p$  – потенциальная энергия взаимодействия нуклонов в ядре.

Потенциальная энергия взаимодействия нуклонов может быть описана следующей полуэмпирической формулой Вайцеккера (Weizsäcker)

$$E_p(A, Z) = -a_1 A + a_2 A^{2/3} + a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_4 \frac{(A/2 - Z)^2}{A}, \quad (2)$$

где  $a_1 = 15.8$  МэВ,  $a_2 = 16.8$  МэВ,  $a_3 = 0.72$  МэВ,  $a_4 = 23.5$  МэВ.

Полуэмпирическая формула Вайцеккера соответствует одной из простейших моделей атомного ядра, так называемой модели сферической жидкой капли, которая основывается на аналогии между ядром и каплей обычной жидкости. При этом масса и заряд ядра считаются равномерно распределенными внутри шара некоторого радиуса, а сама нуклонная жидкость характеризуется некоторым параметром  $\sigma$ , являющимся аналогом коэффициента поверхностного натяжения жидкости.

В формуле для потенциальной энергии  $E_p$  учитывались следующие вклады:

- поверхностная энергия, учитывающая поверхностное натяжение ядерной материи в модели жидкой капли;
- энергию кулоновского отталкивания протонов, входящих в ядро;

- обменная энергия взаимодействия, отражающая тенденцию к стабильности ядер с  $N = Z$ ;
- прямая зависимость от числа нуклонов  $A$  вследствие действия ядерных сил.

Также в выводе этой полуэмпирической формулы Вайцеккер использовал экспериментально установленную зависимость радиуса атомного ядра от числа нуклонов

$$R(A) = R_0 A^{1/3}, \quad (3)$$

где  $R_0$  – некоторая константа.

Основываясь на всем вышеизложенном, дайте ответы на следующие вопросы:

3.1 [2 балла] Найдите электростатическую энергию  $E_C$  шара радиуса  $R$ , равномерно заряженного по объёму зарядом  $Q$ . Ответ выразите через заряд  $Q$ , диэлектрическую постоянную  $\varepsilon_0$  и радиус шара  $R$ .

3.2 [1 балл] Найдите численное значение коэффициента  $R_0$  в формуле (3).

3.3 [1 балл] Найдите численное значение плотности ядерного вещества  $\rho_m$ .

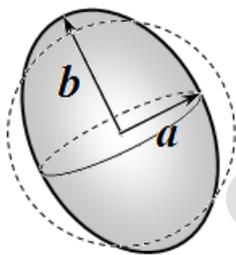
3.4 [1 балл] Найдите численное значение коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$  нуклонной жидкости.

Допустим теперь, что ядро делится на две части с атомными весами  $kA$  и  $(1-k)A$ , где  $0 < k < 1$ . Можно считать, что и заряд ядра, и число нейтронов между осколками распределяются также как и атомный вес.

3.5 [2 балла] Деление ядра становится энергетически выгодным при выполнении условия  $Z^2 / A > f(k)$ . Найдите выражение для функции  $f(k)$  и постройте ее схематический график.

3.6 [0.5 балла] С точностью до двух значащих цифр найдите предельное значение  $(Z^2 / A)_0$ , при котором самопроизвольное деление еще теоретически возможно.

При выполнении условия из п. 3.5 ядро может существовать достаточно долго. Например, период полураспада ядра урана-235 равен 713 миллионов лет. Следовательно, мгновенному делению ядер препятствует некоторый энергетический барьер, который исчезает при некотором критическом значении  $(Z^2 / A)_{critical}$ . В действительности, ядро начнет делиться только при значительном отклонении его формы от сферической.



Для простоты примем, что сферическое ядро испытывает такие деформации, при которых его поверхность становится поверхностью вытянутого эллипсоида вращения, который в декартовых координатах описывается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad (4)$$

где  $a$  – малая, а  $b$  – большая полуоси эллипсоида соответственно.

Объем вытянутого эллипсоида вращения определяется выражением

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 b, \quad (5)$$

а площадь его поверхности может быть вычислена по формуле

$$S = 2\pi a \left( a + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \arcsin \left( \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \right) \right). \quad (6)$$

Пусть сферическое ядро испытывает такую деформацию, что  $b = R(1 + \varepsilon)$  и  $a = R(1 - \lambda)$ , причем  $\varepsilon, \lambda \ll 1$ , а  $R$  – начальный радиус ядерной капли.

3.7 [0.5 балла] Найдите соотношение между  $\varepsilon$  и  $\lambda$ .

Расчеты показывают, что энергия электростатического взаимодействия протонов деформированного ядра составляет приблизительно  $E_C^{deformed} = E_C \left( 1 - \frac{1}{6} \varepsilon (\varepsilon + \lambda) \right)$ .

3.8 [2 балла] Получите выражение и найдите численное значение  $(Z^2 / A)_{critical}$ .

Известны следующие физические константы:

Элементарный заряд  $e = 1.609 \times 10^{-19}$  Кл

Диэлектрическая постоянная  $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$  Ф/м

Масса нуклона (протона или нейтрона)  $m_p \approx m_n \approx m = 1.67 \times 10^{-27}$  кг

$1\text{eV} = e \times 1\text{В} = 1.609 \times 10^{-19}$  Дж

При решении данных задач вы можете использовать формулы:

$$\arcsin(x) \approx x, \quad \text{при } |x| \ll 1$$

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2, \quad \text{при } |x| \ll 1$$