VII Международная Жаутыковская олимпиада по математике
Алматы, 2011

16 января 2011 года, 9.00–13.30
Первый день
(Каждая задача оценивается в 7 баллов)

1. В трапеции $ABCD$ точки M и N – середины оснований AD и BC соответственно.

а) Докажите, что трапеция равнобедренная, если известно, что точка пересечения серединных перпендикуляров к боковым сторонам лежит на отрезке MN.

б) Остается ли утверждение пункта а) в силе, если известно лишь, что точка пересечения серединных перпендикуляров к боковым сторонам лежит на прямой MN ?

2. Найдите все функции f: $R\to R$ такие, что для любых $x,y\in R$ выполнено равенство

$$f(x + f(y)) = f(x - f(y)) + 4xf(y).$$

(Здесь R обозначает множество действительных чисел.)

3. Обозначим через N множество всех целых положительных чисел. Упорядоченную пару $(a;b)$ чисел $a,b\in N$ назовем *интересной*, если для любого $n\in N$ существует $k\in N$, такое, что число a^k+b делится на 2^n. Найдите все интересные упорядоченные пары чисел.

VII International Zhautykov Olympiad in Mathematics
Almaty, 2011

16 January, 2011, 9.00–13.30
First day
(Each problem is worth 7 points)

1. Given is trapezoid $ABCD$, M and N being the midpoints of the bases AD and BC, respectively.

a) Prove that the trapezoid is isosceles if it is known that the intersection point of perpendicular bisectors of the lateral sides belongs to the segment MN.

b) Does the statement of the point a) remain true if it is only known that the intersection point of perpendicular bisectors of the lateral sides belongs to the line MN ?

2. Find all functions f: $R\to R$ which satisfy the equality

$$f(x + f(y)) = f(x - f(y)) + 4xf(y)$$

for any $x,y\in R$. (Here R denotes the set of real numbers.)

3. Let N denote the set of all positive integers. An ordered pair $(a;b)$ of numbers $a,b\in N$ is called *interesting*, if for any $n\in N$ there exists $k\in N$ such that the number a^k+b is divisible by 2^n. Find all interesting ordered pairs of numbers.