Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2013 г.

Вариант № 1

1. Двое рабочих одновременно приступили к изготовлению одинаковых партий деталей. Когда первый рабочий сделал половину деталей, второму оставалось изготовить 24 детали, а когда второй выполнил половину работы, первому оставалось сделать 15 деталей. Сколько деталей осталось изготовить второму рабочему, когда первый выполнил свою работу? (8 баллов)

2. Решите уравнение $2^x - 6\cdot 2^{1-x} = 1$. (8 баллов)

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{17} = 52,\ a_{30} = 13$? (8 баллов)

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos\dfrac{\pi y}{8} = \sqrt{1+2\cos^2\dfrac{\pi y}{8}\cos\dfrac{\pi x}{4} - \cos\dfrac{\pi x}{4}}, \\ |x| + |y-4| \le 4, \quad y < x+2. \end{cases}$$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+x} - \sqrt{4-2x}}{2x+5-2\sqrt{x^2+5x+6}} \le 0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = g(g^2(x))$, где $g(x) = 3/\left(x^2-4x+5\right)$. (10 баллов)

7. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с углом A, равным $2\arccos(15/17)$, вписана окружность. Вторая окружность с радиусом 10,8 касается сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Найдите площадь трапеции $ABCD$. (12 баллов)

8. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций

$y = 1 + x - x^2$ и $y = 0,5\left(x^2+3\right)$. (12 баллов)

9. Определите все значения a, при которых уравнение $(x-a)^2 - 1 = 2\left(x+|x|\right)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a. (12 баллов)

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите объем параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 3 и $\sqrt{3}$, а угол между ними $30°$. (12 баллов)

Ягубов.РФ

Решение варианта №1

1. Двое рабочих одновременно приступили к изготовлению одинаковых партий деталей. Когда первый рабочий сделал половину деталей, второму оставалось изготовить 24 детали, а когда второй выполнил половину работы, первому оставалось сделать 15 деталей. Сколько деталей осталось изготовить второму рабочему, когда первый выполнил свою работу?

Решение: Если n – количество деталей в партии, p_1 и p_2 – производительности рабочих, то $\frac{n}{2p_1}=\frac{n-24}{p_2};\ \frac{n}{2p_2}=\frac{n-15}{p_1};\ \frac{n}{p_1}=\frac{n-x}{p_2}$. Из первых двух уравнений получаем:

$n^2/4=n^2-39n+360$, или $n^2-52n+480=0;\ n=26\pm14,\ n_1=12-$ пост. корень, $n_2=40$.

Подставляя $n=40$ в первое и третье уравнения, получаем $\frac{20}{p_1}=\frac{16}{p_2}$ и $\frac{40}{p_1}=\frac{40-x}{p_2}$, откуда

$40-x=32,\ x=8$. **Ответ:** 8 деталей.

2. Решите уравнение $2^x-6\cdot2^{1-x}=1$.

Решение: $2^x-6\cdot2^{1-x}=1,\ \left(2^x\right)^2-2^x-12=0;\ 2^x=(1\pm7)/2,\ 2^x=4,\ x=2$. **Ответ:** $x=2$.

3. Какое наибольшее значение может принять сумма первых n членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{17}=52,\ a_{30}=13$?

Решение: Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии,

$\begin{cases}a+16d=52,\\ a+29d=13\end{cases}\Leftrightarrow d=-3,\ a=100$.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии S_n принимает наибольшее значение, если $a_n>0$, а $a_{n+1}\le0$. Так как $a_n=a+d(n-1)$, то из неравенства $100-3(n-1)>0$ найдем $n=[103/3]=34$. Тогда $\max S_n=S_{34}=0{,}5\cdot(100+100-3\cdot33)\cdot34=1717$.

Ответ: 1717.

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=\sqrt{1+2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{4}},\\ |x|+|y-4|\le4,\quad y<x+2.\end{cases}$$

Решение:

Рассмотрим уравнение системы $\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=\sqrt{1+2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{4}}$. При условии

$\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}\ge0$, т.е. при $-4+16k\le y\le4+16k,\ k\in Z,$ имеем

$2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1-2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}=0\ \Leftrightarrow\ (2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1)(1-\cos\frac{\pi x}{4})=0\ \Leftrightarrow$

$\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=1$ или $\cos\frac{\pi x}{4}=1\ \Leftrightarrow\ y=2+16k,\ y=-2+16k,\ k\in Z,$ или $x=8n,\ n\in Z$.

Целочисленными решениями системы будут точки

$(l;2+16k),(l;-2+16k),(8n;m),\ l,k,n,m\in Z,\ -4+16s\le m\le4+16s,\ s\in Z,$ лежащие в

квадрате с центром в точке $(0;\,4)$, стороной $4\sqrt{2}$, диагоналями параллельными осям координат и в полуплоскости $y < x+2$. Такими точками будут $(0;\,0),\,(0;\,1),\,(1;\,2),\,(2;\,2)$.

Ответ: $(0;\,0),\,(0;\,1),\,(1;\,2),\,(2;\,2)$.

5. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{4-2x}}{2x+5-2\sqrt{x^2+5x+6}} \le 0.$

Решение:

ОДЗ числителя и знаменателя: $x(x+1)\ge 0,\quad 4-2x\ge 0,\ x^2+5x+6\ge 0,\ \Rightarrow$ $x\in(-\infty;-3]\cup[-2;-1]\cup[0;\,2]$.

На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$$\frac{x^2+x-(4-2x)}{(x+3)-2\sqrt{(x+3)(x+2)}+x+2}\le 0 \ \Rightarrow \frac{(x+4)(x-1)}{(x+3)-2\sqrt{(x+3)(x+2)}+x+2}\le 0.$$

Если $x\ge -2,$ то приходим к неравенству $\dfrac{(x+4)(x-1)}{(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})^2}\le 0$, и $x\in[-2;\,1]$.

С учетом ОДЗ $x\in[-2;-1]\cup[0;1]$.

Если $x\le -3,$ то приходим к неравенству $\dfrac{(x+4)(x-1)}{-(\sqrt{-x-3}+\sqrt{-x-2})^2}\le 0$, и

$x\in(-\infty;-4]$, что входит в ОДЗ.

Окончательно имеем $x\in(-\infty;-4]\cup[-2;-1]\cup[0;\,1]$.

Ответ: $x\in(-\infty;-4]\cup[-2;-1]\cup[0;\,1]$.

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g^2(x))$, где $g(x)=\dfrac{3}{x^2-4x+5}$.

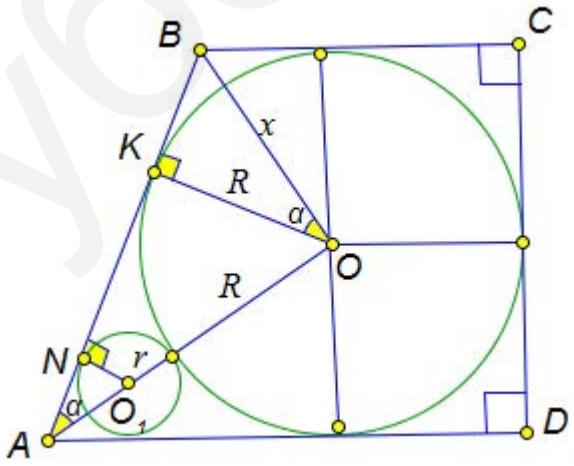
Решение: Функция $g(x)=\dfrac{3}{x^2-4x+5}=\dfrac{3}{(x-2)^2+1}$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0;\,3]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x=2$, $g_{\max}=g(2)=3$, на промежутке $(-\infty;\,2)$ функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(2;+\infty)-$ убывает. Функция $g^2(x)$ принимает все значения из промежутка $(0;\,9]$, поскольку $t=g(x)\in(0;\,3]$, а функция t^2 возрастает в этом промежутке. Для нахождения множества значений функции $f(x)=g(g^2(x))$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $(0;\,9]$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[g(9);\,g(2)]=[3/50;\,3]$. Ответ: $E_f=\left[\dfrac{3}{50};\,3\right]$.

7. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с углом A, равным $2\arccos\frac{15}{17}$ вписана окружность. Вторая окружность с радиусом 10,8 касается сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

Решение: Пусть O - центр вписанной в трапецию окружности, O_1 - центр окружности, касающейся сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Пусть для определенности угол D прямой (случай с прямым углом B рассматривается аналогично). Точки K и N - точки касаний стороны AB окружностей с центрами в точках O и O_1 соответственно. Треугольник OAB прямоугольный, угол AOB равен 90° (AO и BO - биссектрисы углов A и B, сумма этих углов равна 180°). Пусть $x = OB$, $\alpha = \angle OAB = \frac{\angle BAD}{2} = \arccos\frac{15}{17}$. Так как $OK \perp AB$, $\angle BOK = \alpha = \arccos\frac{15}{17}$, то $R = OK = x\cos\alpha = \frac{15}{17}x$ (R - радиус вписанной в трапецию окружности). В прямоугольном треугольнике OAB имеем: $AB = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{17}{8}x$, $OA = \frac{x}{tg\alpha} = \frac{15}{8}x$. В прямоугольном треугольнике NAO_1 имеем: $AO_1 = \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{459}{20} = 22{,}95$, r - радиус второй окружности из условия задачи, $r = 10{,}8$. Для отрезка OA получаем соотношение $OA = R + r + AO_1 = \frac{15}{17}x + 10{,}8 + 22{,}95$, следовательно, $\frac{15}{8}x = \frac{15}{17}x + 10{,}8 + 22{,}95$, $x = 34$.

Найдем площадь трапеции $ABCD$:

$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2}2R = R(AB + 2R) = 30(\frac{17 \cdot 34}{8} + 60) = 3967{,}5$. **Ответ:** 3967,5.



8. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций $y = 1 + x - x^2$ и $y = 0{,}5\left(x^2 + 3\right)$.

Решение: $y = 1 + x - x^2$, $y = 0{,}5\left(x^2 + 3\right)$, $y = ax + b$.

$1 + x - x^2 = ax + b$, $x^2 + (a-1)x + b - 1 = 0$.

$D = (a-1)^2 - 4b + 4 = 0$, $a^2 - 2a - 4b + 5 = 0$. (*)

$0{,}5\left(x^2 + 3\right) = ax + b$, $x^2 - 2ax - 2b + 3 = 0$.

Ягубов.рф

$D/4 = a^2 - (-2b+3) = 0,\ a^2 + 2b - 3 = 0$. (**)

Из (*) и (**) получаем $3a^2 - 2a - 1 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = -1/3$.

$b = \dfrac{3-a^2}{2},\ b_1 = 1, b_2 = \dfrac{13}{9}$.

Ответ: $y = x+1,\ y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{13}{9}$.

9. Определите все значения a, при которых уравнение $(x-a)^2 - 1 = 2(x+|x|)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений a.

Решение:

I. $x \ge 0,\quad (x-a)^2 - 1 = 4x,\ x^2 - 2(a+2)x + a^2 - 1 = 0$; $D/4 = a^2 + 4a + 4 - a^2 + 1 = 4a + 5$.

Уравнение имеет два различных неотрицательных корня $x_{1,2} = a + 2 \pm \sqrt{4a+5}$, если

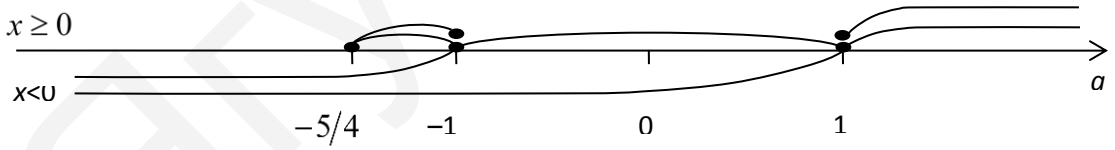
$$\begin{cases} 4a+5>0, \\ a+2>0, \\ a^2-1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -5/4, \\ \left[\begin{array}{l} a \le -1, \\ a \ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5/4 < a \le -1, \\ a \ge 1. \end{array}\right.$$

Уравнение имеет ровно один неотрицательный корень $x_{1,2} = a + 2 + \sqrt{4a+5}$, если

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D = 4a+5 = 0, \\ a+2 \ge 0, \end{cases} \\ a^2 - 1 < 0, \\ \begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a+2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -5/4, \\ a > -2, \end{cases} \\ -1 < a < 1, \\ \begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a+2 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -5/4, \\ -1 < a < 1. \end{array}\right.$$

II. $x < 0,\quad (x-a)^2 - 1 = 0$.

Корень $x_1 = a + 1 < 0$, если $a < -1$, и корень $x_2 = a - 1 < 0$, если $a < 1$, то есть, уравнение имеет два различных отрицательных корня $x_{1,2} = a \pm 1$, если $-\infty < a < -1$, и уравнение имеет ровно один отрицательный корень $x = a - 1$, если $-1 \le a < 1$.



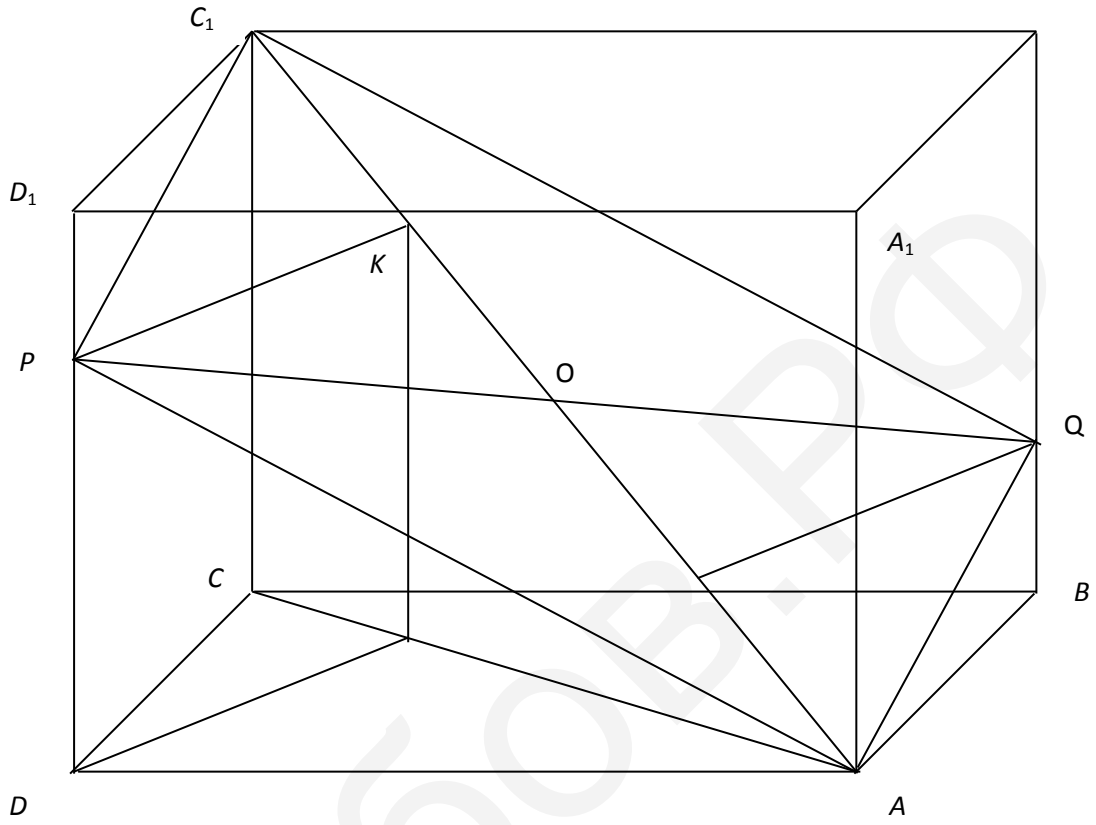
Ответ: $a \in (-\infty; -5/4),\quad x_{1,2} = a \pm 1$;

$a \in (-1; 1),\quad x_1 = a - 1,\quad x_2 = a + 2 + \sqrt{4a+5}$;

$a \in [1; +\infty),\quad x_{1,2} = a + 2 \pm \sqrt{4a+5}$.

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите объем параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 3 и $\sqrt{3}$, а угол между ними $30°$.

Решение:



Проведем $DL \perp AC$, $LK \parallel CC_1$ $(K \in AC_1)$, $PK \parallel DL$. Откладывая на боковом ребре BB_1 отрезок $BQ=PD_1$, получаем параллелограмм $PAQC_1$, который будет сечением наименьшей площади; при этом AC_1–его большая, а PQ –меньшая диагонали, заданные в условии.

$AC_1 = 3,\ PQ = \sqrt{3},\ \varphi = 30°,\ \sin\varphi = 1/2,\ \cos\varphi = \sqrt{3}/2.$

$$DL = PK = \frac{1}{2}\cdot PQ\cdot\sin\varphi = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \quad OK = \frac{1}{2}\cdot PQ\cdot\cos\varphi = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}.$$

$\frac{CL}{AL} = \frac{C_1K}{AK} = \frac{C_1O-OK}{C_1O+OK} = \frac{3/2-3/4}{3/2+3/4} = \frac{1}{3}$. Пусть $CL = x$, тогда $AL = 3x,\ AC = 4x.$

$DL^2 = CL\cdot AL$, т.е. $\frac{3}{16} = 3x^2,\ x = \frac{1}{4},\ AC = 1.\ CC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AC^2} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}.$

Объем $V = AC\cdot DL\cdot CC_1 = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$ **Ответ:** $V = \frac{\sqrt{6}}{2}.$

Первый (отборочный) этап академического соревнования

Олимпиады школьников «Шаг в будущее» по образовательному предмету «Математика», осень 2013 г.

Вариант № 7

1. Из пунктов *A* и *B* одновременно выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Когда первый проехал половину пути, второму осталось проехать до пункта *A* 72 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать до пункта *B* 45 км. На каком расстоянии от пункта *A* велосипедисты встретились? (8 баллов)

2. Решите уравнение $3^{1+\sqrt{x}} + 3^{2-\sqrt{x}} = 28$. (8 баллов)

3. Какое наименьшее значение может принять сумма первых *n* членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{35} = 2$, $a_{40} = 17$? (8 баллов)

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi(y+4)}{8} = \sqrt{2\sin^2\dfrac{\pi x}{8} - 2\sin^2\dfrac{\pi y}{8}\cos\dfrac{\pi x}{4} + 2\cos\dfrac{\pi x}{4}}, \\ |x| + |y-4| \le 4, \quad y < x+2. \end{cases}$$ (8 баллов)

5. Решите неравенство $\dfrac{|x+1| - \sqrt{3x+7}}{\sqrt{4-2x} - \sqrt{x^2+x}} \ge 0$. (10 баллов)

6. Найдите множество значений функции $f(x) = g(g^2(x))$, где $g(x) = 3/(|x-2|+1)$. (10 баллов)

7. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с углом A, равным $2\arccos(15/17)$, вписана окружность. Вторая окружность с радиусом $18/25$ касается сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Найдите площадь треугольника ABD. (12 баллов)

8. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций

$y = 1 + x + x^2$ и $y = 0{,}5\left(x^2 + 3\right)$. (12 баллов)

9. Определите все значения *a*, при которых уравнение $(x+1)^2 = a(2|x| - 1)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений *a*. (12 баллов)

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите длины сторон основания параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 6 и $2\sqrt{3}$, а угол между ними $30°$. (12 баллов)

Якубов.рф

Решение варианта №7

1. Из пунктов *A* и *B* одновременно выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Когда первый проехал половину пути, второму осталось проехать до пункта *A* 72 км, а когда второй проехал половину пути, первому осталось проехать до пункта *B* 45 км. На каком расстоянии от пункта *A* велосипедисты встретились?

Решение: Если l – расстояние между A и B, v_1, v_2 – скорости велосипедистов, то

$\frac{l}{2v_1}=\frac{l-72}{v_2}$; $\frac{l}{2v_2}=\frac{l-45}{v_1}$; $\frac{x}{v_1}=\frac{l-x}{v_2}$. Из первых двух уравнений получаем:

$l^2/4=l^2-117l+72\cdot 45$, или $l^2-156l+4320=0$; $l=78\pm 42$, $l_1=120$, $l_2=36$ – пост. корень.

Подставляя $l=120$ в первое и третье уравнения, получаем $\frac{60}{v_1}=\frac{48}{v_2}$ и $\frac{x}{v_1}=\frac{120-x}{v_2}$, откуда

$4x=600-5x$, $x=66\frac{2}{3}$. **Ответ:** $66\frac{2}{3}$ км.

2. Решите уравнение $3^{1+\sqrt{x}}+3^{2-\sqrt{x}}=28$.

Решение: $3^{1+\sqrt{x}}+3^{2-\sqrt{x}}=28$. $3\cdot\left(3^{\sqrt{x}}\right)^2-28\cdot 3^{\sqrt{x}}+9=0$;

$3^{\sqrt{x}}=\frac{14\pm\sqrt{196-27}}{3}=\frac{14\pm 13}{3}$.

1) $3^{\sqrt{x}}=1/3$, нет решений; 2) $3^{\sqrt{x}}=9$, $\sqrt{x}=2$, $x=4$. **Ответ:** $x=4$.

3. Какое наименьшее значение может принять сумма первых *n* членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{35}=2$, $a_{40}=17$?

Решение: Если a – первый член и d – разность арифметической прогрессии,

$\begin{cases} a+34d=2, \\ a+39d=17 \end{cases} \Leftrightarrow d=3,\ a=-100$.

Сумма первых *n* членов арифметической прогрессии S_n принимает наименьшее значение, если $a_n<0$, а $a_{n+1}\geq 0$. Так как $a_n=a+d(n-1)$, то из неравенства $-100+3(n-1)<0$ найдем $n=[103/3]=34$.

Тогда $\min S_n=S_{34}=0{,}5\cdot(-100-100+3\cdot 33)\cdot 34=-1717$. **Ответ:** –1717.

4. Найдите все целочисленные решения системы

$$\begin{cases} \sqrt{2}\sin\frac{\pi(y+4)}{8}=\sqrt{2\sin^2\frac{\pi x}{8}-2\sin^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}+2\cos\frac{\pi x}{4}}, \\ |x|+|y-4|\leq 4,\quad y<x+2. \end{cases}$$

Решение:

Рассмотрим уравнение системы $\sqrt{2}\sin\frac{\pi(y+4)}{8}=\sqrt{2\sin^2\frac{\pi x}{8}-2\sin^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}+2\cos\frac{\pi x}{4}}$. Оно равносильно уравнению $\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=\sqrt{2\sin^2\frac{\pi x}{8}+2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}}$ или

$\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=\sqrt{1+2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}-\cos\frac{\pi x}{4}}$. При условии $\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}\geq 0$, т.е. при $-4+16k\leq y\leq 4+16k,\ k\in Z,$ имеем

ЯУОВ.РФ

$2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1-2\cos^2\frac{\pi y}{8}\cos\frac{\pi x}{4}+\cos\frac{\pi x}{4}=0 \Leftrightarrow (2\cos^2\frac{\pi y}{8}-1)(1-\cos\frac{\pi x}{4})=0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{2}\cos\frac{\pi y}{8}=1$ или $\cos\frac{\pi x}{4}=1 \Leftrightarrow y=2+16k,\ y=-2+16k,\ k\in Z,$ или $x=8n,\ n\in Z.$

Целочисленными решениями системы будут точки
$(l;\ 2+16k),\ (l;\ -2+16k),\ (8n;\ m),\ l,k,n,m\in Z,\ -4+16s\le m\le 4+16s,\ s\in Z,$ лежащие в квадрате с центром в точке $(0;\ 4)$, стороной $4\sqrt{2}$, диагоналями параллельными осям координат и в полуплоскости $y<x+2$. Такими точками будут $(0;\ 0),\ (0;\ 1),\ (1;\ 2),\ (2;\ 2)$.

Ответ: $(0;\ 0),\ (0;\ 1),\ (1;\ 2),\ (2;\ 2)$.

5. Решите неравенство $\dfrac{|x+1|-\sqrt{3x+7}}{\sqrt{4-2x}-\sqrt{x^2+x}}\ge 0.$

Решение:

ОДЗ числителя и знаменателя: $3x+7\ge 0,\quad x(x+1)\ge 0,\quad 4-2x\ge 0,\ \Rightarrow$
$x\in[-7/3;\ -1]\cup[0;\ 2].$

На ОДЗ исходное неравенство эквивалентно следующему

$\dfrac{(x+1)^2-3x-7}{x^2+x-(4-2x)}\le 0 \ \Rightarrow \dfrac{x^2-x-6}{(x+4)(x-1)}\le 0 \Rightarrow \dfrac{(x+2)(x-3)}{(x+4)(x-1)}\le 0 \Rightarrow x\in(-4;\ -2]\cup(1;\ 3].$

Окончательно имеем $x\in[-7/3;\ -2]\cup(1;\ 2].$

Ответ: $x\in[-7/3;\ -2]\cup(1;\ 2].$

6. Найдите множество значений функции $f(x)=g(g^2(x))$, где $g(x)=\dfrac{3}{|x-2|+1}.$

Решение: Функция $g(x)==\dfrac{3}{|x-2|+1}$ определена на всей числовой оси и принимает все значения из промежутка $(0;\ 3]$. Функция $g(x)$ достигает максимального значения в точке $x=2$, $g_{\max}=g(2)=3$, на промежутке $(-\infty;\ 2)$ функция $g(x)$ возрастает, на промежутке $(2;\ +\infty)-$ убывает. Функция $g^2(x)$ принимает все значения из промежутка $(0;\ 9]$, поскольку $t=g(x)\in(0;\ 3]$, а функция t^2 возрастает в этом промежутке. Для нахождения множества значений функции $f(x)=g(g^2(x))$ достаточно найти множество значений функции $g(x)$ на промежутке $(0;\ 9]$. На указанном промежутке $g(x)$ принимает все значения из множества $[g(9);\ g(2)]=[3/8;\ 3]$.

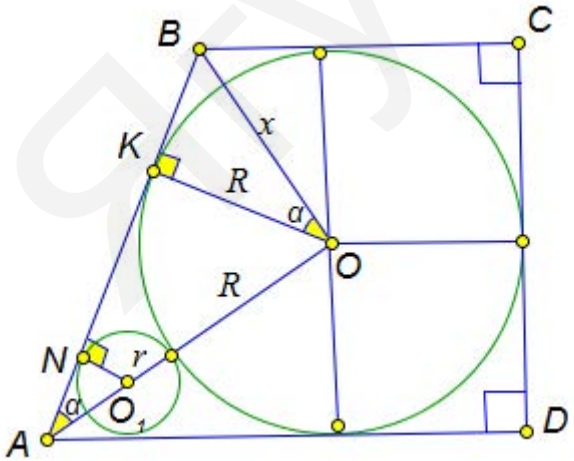
Ответ: $E_f=\left[\dfrac{3}{8};\ 3\right].$

ЯУБОВ.РФ

7. В прямоугольную трапецию $ABCD$ с углом A, равным $2\arccos\frac{15}{17}$ вписана окружность. Вторая окружность с радиусом $\frac{18}{25}$ касается сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Найдите площадь треугольника ABD.

Решение: Пусть O - центр вписанной в трапецию окружности, O_1 - центр окружности, касающейся сторон AB и AD трапеции и вписанной в нее окружности. Пусть для определенности угол D прямой (случай с прямым углом B рассматривается аналогично). Точки K и N - точки касаний стороны AB окружностей с центрами в точках O и O_1 соответственно. Треугольник OAB прямоугольный, угол AOB равен 90° (AO и BO - биссектрисы углов A и B, сумма этих углов равна 180°). Пусть $x = OB$, $\alpha = \angle OAB = \frac{\angle BAD}{2} = \arccos\frac{15}{17}$. Так как $OK \perp AB$, $\angle BOK = \alpha = \arccos\frac{15}{17}$, то $R = OK = x\cos\alpha = \frac{15}{17}x$ (R - радиус вписанной в трапецию окружности). В прямоугольном треугольнике OAB имеем: $AB = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{17}{8}x$, $OA = \frac{x}{tg\alpha} = \frac{15}{8}x$. В прямоугольном треугольнике NAO_1 имеем: $AO_1 = \frac{r}{\sin\alpha} = \frac{153}{100} = 1{,}53$, r - радиус второй окружности из условия задачи, $r = \frac{18}{25} = 0{,}72$. Для отрезка OA получаем соотношение $OA = R + r + AO_1 = \frac{15}{17}x + 0{,}72 + 1{,}53$, следовательно, $\frac{15}{8}x = \frac{15}{17}x + 0{,}72 + 1{,}53$, $x = \frac{34}{15}$.
Найдем площадь треугольника ABD:
$S_{ABD} = AD \cdot R = (AO\cos\alpha + R)R = R(\frac{15 \cdot 15}{8 \cdot 17}x + R) = 2(3{,}75 + 2) = 11{,}5$.

Ответ: 11,5.



8. Составьте уравнение общей касательной к графикам функций $y = 1 + x + x^2$ и $y = 0{,}5\left(x^2 + 3\right)$.

Решение:
$y = 1 + x + x^2$, $y = 0{,}5\left(x^2 + 3\right)$, $y = ax + b$.

$1+x+x^2=ax+b,\ x^2+(1-a)x+1-b=0.$

$D=(1-a)^2-4(1-b)=0,\ a^2-2a+4b-3=0.$ (*)

$0,5(x^2+3)=ax+b,\ x^2-2ax-2b+3=0.$

$D/4=a^2-(-2b+3)=0,\ a^2+2b-3=0.$ (**)

Из (*) и (**) получаем $a^2+2a-3=0,\ a_1=1,\ a_2=-3.$

$b=\dfrac{3-a^2}{2},\ b_1=1, b_2=-3.$

Ответ: $y=x+1,\ y=-3(x+1).$

9. Определите все значения *a*, при которых уравнение $(x+1)^2=a(2|x|-1)$ имеет ровно два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений *a*.

Решение:

I. $x\ge 0,\ x^2+2x+1=2ax-a;\ x^2-2(a-1)x+a+1=0;$

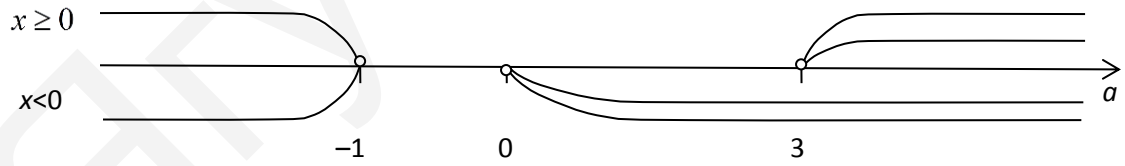
$D/4=a^2-2a+1-a-1=a^2-3a.$

1) два различных неотрицательных корня $x_{1,2}=a-1\pm\sqrt{a^2-3a}$, если:

$$\begin{cases} a^2-3a>0, \\ a-1>0, \\ a+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<0, \\ a>3, \end{array}\right. \\ a>1 \end{cases} \Leftrightarrow a>3.$$

2) один неотрицательный корень $x=a-1+\sqrt{a^2-3a}$, если:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2-3a=0, \\ a-1\ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a+1<0, \\ a-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3, \\ a<-1, \\ a=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3, \\ a\le -1. \end{array}\right.$$



II. $x<0,\ x^2+2x+1=-2ax-a;\ x^2+2(a+1)x+a+1=0;$

$D/4=a^2+2a+1-a-1=a^2+a.$

1) два различных отрицательных корня $x_{1,2}=-a-1\pm\sqrt{a^2+a}$, если:

$$\begin{cases} a^2+a>0, \\ a+1>0, \\ a+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0, \\ a>-1 \end{cases} \Leftrightarrow a>0.$$

2) один отрицательный корень $x=-a-1-\sqrt{a^2+a}$, если:

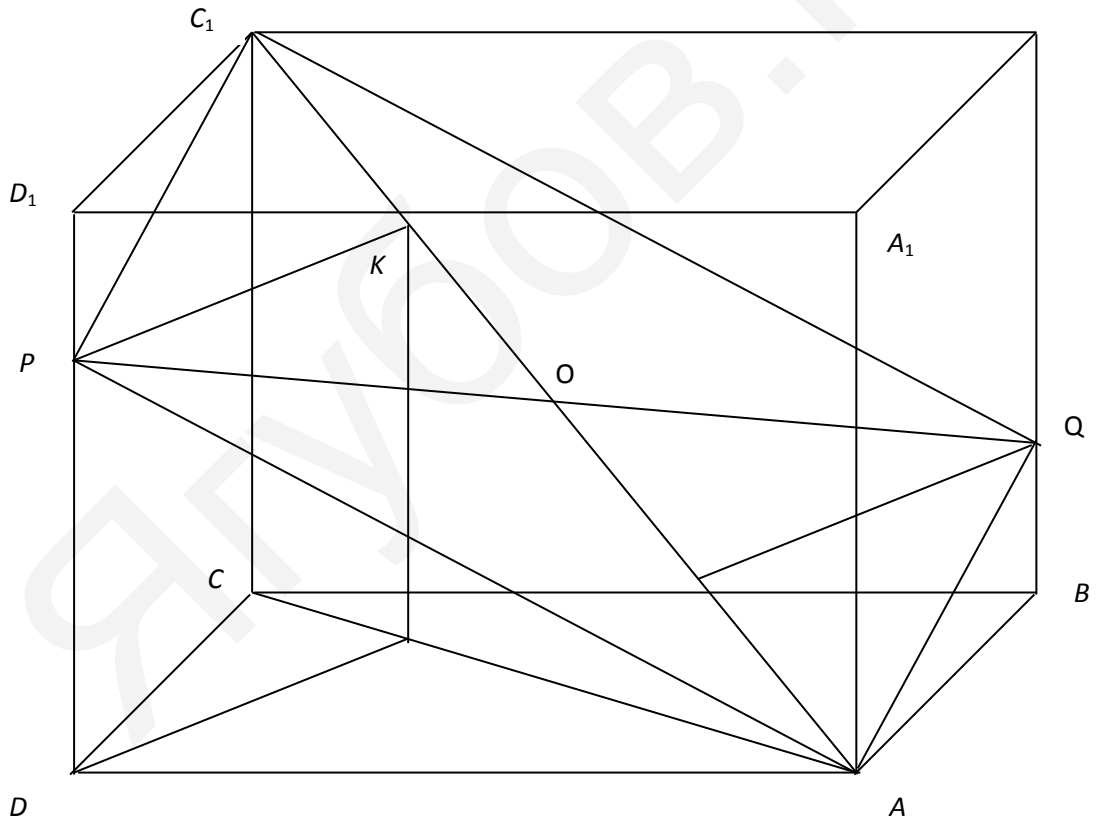
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+a=0,\\ a+1>0,\end{cases}\\ a+1<0,\\ \begin{cases}a+1=0,\\ a+1>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0,\\ a<-1.\end{array}\right.$$

Ответ: $a<-1,\ x_1=a-1+\sqrt{a^2-3a},\ x_2=-a-1-\sqrt{a^2+a}$;

$0<a<3,\ x_{1,2}=-a-1\pm\sqrt{a^2+a}$.

10. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите длины сторон основания параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 6 и $2\sqrt{3}$, а угол между ними $30°$.

Решение:



Проведем $DL\perp AC$, $LK\|CC_1$ $(K\in AC_1)$, $PK\|DL$. Откладывая на боковом ребре BB_1 отрезок $BQ=PD_1$, получаем параллелограмм $PAQC_1$, который будет сечением наименьшей площади; при этом AC_1–его большая, а PQ –меньшая диагонали, заданные в условии.

$AC_1=6,\quad PQ=2\sqrt{3},\quad \varphi=30°,\quad \sin\varphi=1/2,\quad \cos\varphi=\sqrt{3}/2.$

Ягубов.РФ

$DL = PK = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $OK = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot \cos\varphi = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$.

$\frac{CL}{AL} = \frac{C_1K}{AK} = \frac{C_1O - OK}{C_1O + OK} = \frac{3 - 3/2}{3 + 3/2} = \frac{1}{3}$. Пусть $CL = x$, тогда $AL = 3x$.

$DL^2 = CL \cdot AL$, т.е. $\frac{3}{4} = 3x^2$, $x = \frac{1}{2}$, $CL = \frac{1}{2}$, $AL = \frac{3}{2}$. Тогда $CD = \sqrt{DL^2 + CL^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$,

$AD = \sqrt{DL^2 + AL^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$.

Ответ: $1; \sqrt{3}$.

Ягубов.рф