

## Олимпиада «Физтех» по математике

2011 год, вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{y^2 - \frac{2x}{y}} = x - y, \\ x^2 + \frac{2}{y^2} = y^2 + 1. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{2}{\log_{x-1} \left( \frac{5}{2} - x \right)} \leq 1.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{8 \operatorname{tg} x + 22 \operatorname{ctg} x} = -\sqrt{15} (\sin x + \cos x).$$

4. В треугольнике  $ABC$  окружность радиуса  $\frac{13}{3}$  с центром на отрезке  $BC$  проходит через точку  $B$  и касается отрезка  $AC$  в точке  $D$  такой, что угол  $ADB$  равен  $\operatorname{arctg} \frac{3}{2}$ . Найдите высоту  $BF$  треугольника  $ABC$  и длину отрезка  $CD$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если длины отрезков  $AB$  и  $CD$  равны.

5. Найдите все значения параметра  $b$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |b - x^2|, \\ y = a(x - b) \end{cases}$$

имеет решение при любом значении параметра  $a$ .

6. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  сторона основания  $ABC$  равна 1, боковое ребро равно 2. Сфера с центром  $O$  на плоскости  $CDS$  касается рёбер  $SA$ ,  $SB$  и  $AB$ . Найдите расстояния от центра сферы до плоскостей  $ABC$  и  $ADS$ , а также радиус сферы.

## Ответы

1.  $(0, -1), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ .

2.  $(1; \frac{3}{2}) \cup [\frac{1+\sqrt{7}}{2}; 2) \cup (2; \frac{5}{2})$ .

3.  $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \pi + \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

4.  $BF = 6, CD = \frac{52}{5}, S = \frac{6}{5}(36 + \sqrt{451})$ .

5.  $[0; 1]$ .

6.  $\rho(O, ABC) = \frac{1}{13}\sqrt{\frac{7}{2}}, \rho(O, ADS) = \frac{2}{13}\sqrt{\frac{42}{5}}, R = \frac{3\sqrt{71}}{26}$ .